

# フロンティア法による アルキメデスの立体の辺展開図の列挙

塩田 拓海 (Takumi SHIOTA)

九州工業大学

November 28, 2020

# 辺展開図

[上原, 2018, 定義 1.0.1]

- 凸多面体を辺に切れ込みを入れて平坦に開いた多角形を辺展開図という (図 1).

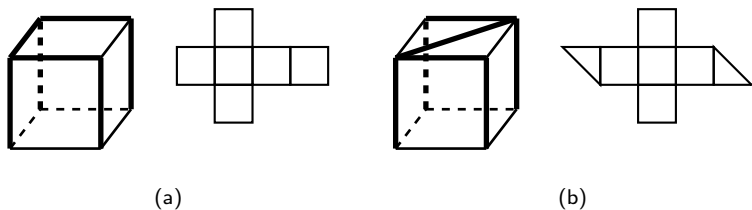


図 1: (a) の切り方は辺展開図であるが (b) は辺展開図ではない

# アルキメデスの立体 (図2)

## 定義

1. 凸多面体のうち全ての面が正多角形
2. 各頂点に接続する面の組み合わせが同じ
3. 1,2のうちプラトンの立体, 角柱・反角柱を除くもの

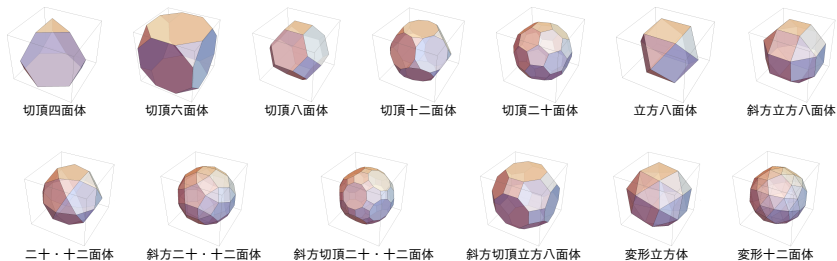


図 2: アルキメデスの立体 (全 13 種)

# アルキメデスの立体における自己重複の例

[Takashi Horiyama and Wataru Shoji, 2013]

- いくつかのアルキメデスの立体には、自己重複を持つ辺展開図が存在する (図 3)。

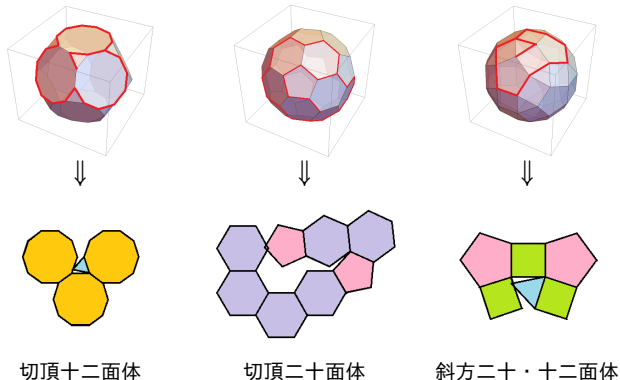


図 3: 自己重複の例

# アルキメデスの立体の自己重複の有無

## 1. 自己重複を持たないもの



切頂四面体



切頂六面体



切頂八面体



立方八面体



斜方立方八面体

## 2. 切り方により自己重複を持つもの



切頂十二面体



切頂二十面体



斜方二十・十二面体



斜方切頂二十・十二面体



変形十二面体

## 3. 自己重複を持つか持たないか分かっていないもの



二十・十二面体



斜方切頂立方八面体



変形立方体

## 本研究の目的

- 2,3 に分類される立体がいくつの自己重複を持つのかを調べる.

# 研究成果

- 切頂四面体および立方八面体のカタログを作成<sup>1</sup>
- 切頂四面体および立方八面体の自己重複の確認

切頂四面体 数値計算およびカタログの目視による確認

立方八面体 カatalogの目視による確認

## 切頂四面体のカタログの一部



## 立方八面体のカタログの一部



<sup>1</sup>フルバージョンは GitHub にて公開中 <https://github.com/ShiotaTakumi>

# 研究成果の位置付け

- 今回は表 1 の ☆ の箇所を新たに作成

表 1: アルキメデスの立体の最新の研究状況

アルキメデスの立体	辺展開図の数	自己重複の数	カタログの有無
切頂四面体	6,000	0 [廣瀬, 2015]	☆
立方八面体	331,776	0 [廣瀬, 2015]	☆
切頂六面体	32,400,000	0 [廣瀬, 2015]	無し
切頂八面体	101,154,816	0 [廣瀬, 2015]	無し
斜方立方八面体	301,056,000,000	0 [廣瀬, 2015]	無し
変形立方体	89,904,012,853,248	未解決	無し
二十・十二面体	208,971,104,256,000	未解決	無し
斜方切頂立方八面体	12,418,325,780,889,600	未解決	無し
切頂十二面体	4,982,259,375,000,000,000	未解決	無し
切頂二十面体	375,291,866,372,898,816,000	未解決	無し
⋮	⋮	⋮	⋮

# 自己重複の確認アルゴリズム

- 1 全域木の列挙
  - 2 展開図の座標計算
  - 3 外接円の描画
  - 4 隣り合わない面の外接円同士の重複の確認
- ステップ 3,4 は [Takashi Horiyama and Wataru Shoji, 2011] と同じ



# 自己重複の確認アルゴリズム

- 1 全域木の列挙
- 2 展開図の座標計算
- 3 外接円の描画
- 4 隣り合わない面の外接円同士の重複の確認

## [上原, 2018, 定理 2.1.1]

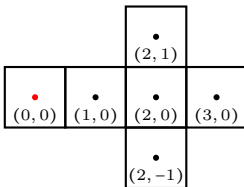
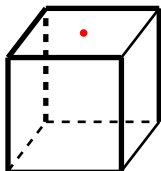
- ▶ 凸多面体をグラフとして見たとき、辺展開図のカット線<sup>a</sup>の集合は全域木を構成する。つまり「辺展開図の数 = 全域木の数」である。

<sup>a</sup>カット線：カットされた辺

- ▶ フロンティア法 [ERATO 湊離散構造処理プロジェクト, 2015] を用いることで、全域木を効率的に列挙

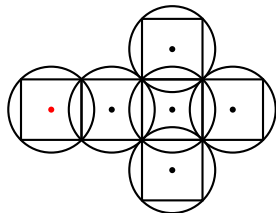
# 自己重複の確認アルゴリズム

- 1 全域木の列挙
- 2 展開図の座標計算
- 3 外接円の描画
- 4 隣り合わない面の外接円同士の重複の確認



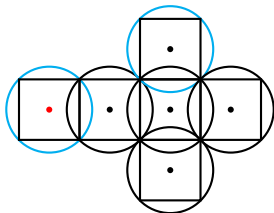
# 自己重複の確認アルゴリズム

- 1 全域木の列挙
- 2 展開図の座標計算
- 3 外接円の描画**
- 4 隣り合わない面の外接円同士の重複の確認



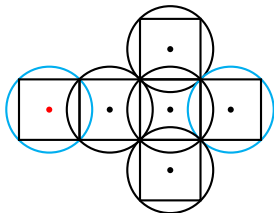
# 自己重複の確認アルゴリズム

- 1 全域木の列挙
- 2 展開図の座標計算
- 3 外接円の描画
- 4 隣り合わない面の外接円同士の重複の確認



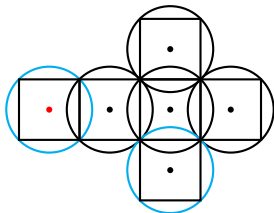
# 自己重複の確認アルゴリズム

- 1 全域木の列挙
- 2 展開図の座標計算
- 3 外接円の描画
- 4 隣り合わない面の外接円同士の重複の確認



# 自己重複の確認アルゴリズム

- 1 全域木の列挙
- 2 展開図の座標計算
- 3 外接円の描画
- 4 隣り合わない面の外接円同士の重複の確認



## 今後の研究の方針

- 辺展開図の数が増えると、今回使った自己重複の確認アルゴリズムでは膨大な計算時間を要してしまう
- カタログを観察すると、図4のように共通する部分を持つ辺展開図が多く存在する
- この観察の結果を用いることで、自己重複の有無の判定の高速化につなげたい

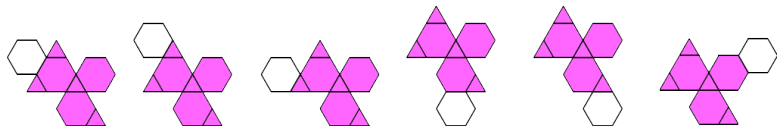


図 4: 切頂四面体の辺展開図カタログより一部