回転展開法を用いた
自己重複を持つ部分的な辺展開図の数え上げ

塩田 拓海 *　　斎藤 寿樹 *

1 はじめに

1.1 研究の背景・目的

凸多面体の展開図の研究は，1525 年 Albrecht Dürer（1471–1528，Nürnberg，ドイツ）が，“Underweysung der messung mit dem zirckel un richt scheyt”[1]（邦訳『測定教本』）を出版したことに起源するとされる [2]．この本の中には，私たちが「辺展開図」や「辺展開」と呼んでいるものが描かれている．ここで，辺や面に切り込みを入れて平坦に開いた多角形を**展開図**，辺に沿って切り込みを入れることを**辺展開**，辺に沿って切った展開図を**辺展開図**とする．しかし，Dürer の本に描かれた全ての辺展開図はどれを見ても面どうしが重ならない多角形，つまり自己重複を持たないものとなっている．Dürer が意図的に自己重複を持たないように辺展開図を描いたという証拠は無いが，この「Dürer の描画」を通じて次の未解決問題が得られた．

未解決問題 1 (凸多面体の辺展開（[2]，未解決問題 21.1 を参照）)**.** すべての凸多面体は単純で重ならない多角形に辺展開することができるだろうか．つまり全ての凸多面体は自己重複を持たない辺展開図があるだろうか．

この問題は,「Dürer の描画」以降，未だ未解決問題である．この問題を解決すべく，凸多面体に制約条件が付けられた研究が進められてきた．その 1 つが「整凸面多面体」(正多面体，半正多面体，角柱・反角柱，ジョンソン・ザルガラーの多面体に対象を限定した研究である．しかし，最も私たちに馴染みの深い正多面体（全 5 種）の辺展開図に関しても，自己重複を持たないかはごく最近まで分かっておらず，2011 年になって始めて堀山らによってどの辺展開図も自己重複を持たないということが分かった [3]．また，廣瀬らは半正多面体（全 13 種）に関しては，2015 年に 5 種類の多面体が重なりを持たないことを示した [4]．しかし，残りの 8 種類のうち 5 種類に関しては自己重複は存在するが，その個数は分かっておらず [3]，3 種類に関しては自己重複の有無すらも分かっていなかった (表 1)．これは，全ての辺展開図に対して，どの 2 組の面を見ても自己重複を持たないかを判定するという方法で計算をしているからである．つまり，ある凸多面体 A の辺展開図の個数を N，A を構成する面の数を S とするとき $N \cdot \binom{S}{2} = NS(S-1)/2$ 回の計算をしなければならない．そのため辺展開図の個数 N が膨大な凸多面体の重複の有無を現実的な時間で解くことは不可能なのである．

本研究では，今まで自己重複を持つ辺展開図の有無が未解決とされていた凸多面体の自己重複の有無を判定し，自己重複がある場合は，自己重複を持つ辺展開図がいくつあるかを数え上げることを目的とする．

1.2 本研究の成果

本研究では，表 1 に太字で記した箇所を解決した．具体的には，回転展開法という手法を考案し，二十・十二面体，斜方立方八面体，変形立方体の辺展開図には自己重複が無いことを示した．また凸多面体に

*九州工業大学，Kyushu Institute of Technology

表 1: 各凸多面体の辺展開図の個数および重複の有無（本研究で解決した箇所を**太字**で示す）

凸多面体	辺展開図の個数	自己重複を持つ辺展開図の有無	自己重複を持つ辺展開図の個数
正四面体	16	無	0
正六面体	384	無	0
正八面体	384	無	0
正十二面体	5,184,000	無 [3]	0
正二十面体	5,184,000	無 [3]	0
切頂四面体	6,000	無 [4]	0
切頂六面体	32,400,000	無 [4]	0
切頂八面体	101,154,816	無 [4]	0
切頂十二面体	4,982,259,375,000,000,000	有 [3]	未解決
切頂二十面体	375,291,866,372,898,816,000	有 [3]	未解決
立方八面体	331,776	無 [4]	0
二十・十二面体	208,971,104,256,000	**無 [本研究]**	**0 [本研究]**
斜方立方八面体	301,056,000,000	無 [4]	0
斜方二十・十二面体	201,550,864,919,150,779,950,956,544,000	有 [3]	未解決
斜方切頂立方八面体	12,418,325,780,889,600	**無 [本研究]**	**0 [本研究]**
斜方切頂二十・十二面体	21,789,262,703,685,125,511,464,767,107,171,876,864,000	有 [3]	未解決
変形立方体	89,904,012,853,248	**無 [本研究]**	**0 [本研究]**
変形十二面体	438,201,295,386,966,498,858,139,607,040,000,000	有 [5]	未解決

自己重複が有るとされているが，自己重複を持つ辺展開図がいくつあるかは未解決とされている切頂十二面体，切頂二十面体について，それぞれの凸多面体にはいくつの自己重複を持つ辺展開図があるかを求める方針を示す．

1.3　本稿の構成

本稿の構成は以下のとおりである．第 2 章では本稿で使用する諸概念の説明をする．第 3 章では自身が考案した回転展開法を用いた自己重複の有無の判定方法を説明する．第 4 章では，実験条件および回転展開法による計算結果を示す．最後に第 5 章で本稿のまとめおよび今後の課題について述べる．

2　準備

2.1　グラフ

頂点の集合を V，辺の集合 $E \subseteq V \times V$ で構成されたものをグラフ $G = (V, E)$ と表記する．始点と終点を除き同じ頂点を 2 度含まない頂点の列で，連続する 2 つの頂点の間に辺があるようなものを**道**（**パス**）という．グラフの任意の 2 頂点 v_i, v_j $(v_i, v_j \in V)$ 間に頂点と頂点を繋ぐ道が存在するならばグラフは**連結**であるといい，始点と終点が同じであるならば道を**閉路**という．また，連結で閉路を持たないグラフを**木**といい，グラフ $S = (V, E_T)$ が木で $E_T \subseteq E$ であるならば，$S = (V, E_T)$ のことをグラフ $G = (V, E)$ の**全域木**という．

2.2　凸多面体の辺展開

辺展開図は凸多面体の頂点の集合をグラフの頂点集合 V，凸多面体の辺の集合をグラフの辺集合 E と

3 回転展開法

3.1 回転展開法

従来の研究 [3, 6, 4] では，凸多面体の辺展開図が自己重複を持つかを確認するために全ての辺展開図の全ての面の組みで重なりを持たないかを確認することで判断していた．しかし，この手法では辺展開図の個数が多い凸多面体を現実的な時間で計算することが出来ない．そこで辺展開図の全ての面ではなく，辺展開図を構成する一部の面のみに注目をした．ここで凸多面体を構成する一部の面を使用した辺展開図のことを**部分的な辺展開図**とする．

本研究では凸多面体が自己重複を持つかどうかを確認するため，自己重複を持つ部分的な辺展開図を抽出する回転展開法という手法を考案した．回転展開法の流れを下記に示す．

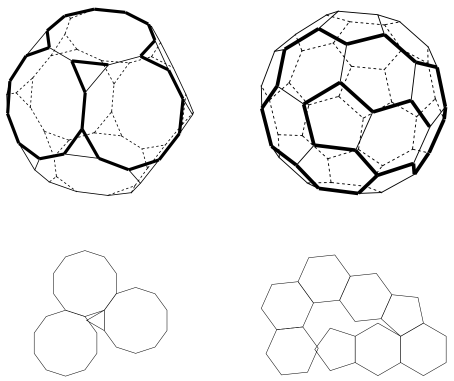
(1) 回転展開という手続きを行うことにより求まる部分的な辺展開図を全て出力する

(2) 出力された部分的な辺展開図それぞれに対して自己重複を持つかを判定する

- **(2–A)** 無いと判定された場合は，自己重複を持つ辺展開図が 0 個であると示す
- **(2–B)** 有ると判定された場合は，自己重複を持つ部分的な辺展開図を抽出する

3.2 回転展開

手順 1 に回転展開により部分的な辺展開図を出力する方法を示す．ここで凸多面体を辺展開したとき同じ辺を持つ面のことを**隣り合う面**もしくは**繋がる面**とし，面 X と面 Y が隣り合い，かつ面 X と面 Y が辺 Z を共通して持つとき，面 Y は**面 X から辺 Z を介して隣り合う面**と表記する．また，凸多面体の任意のある面 f を**基準面**，f の任意の辺 e を**基準辺**，基準面から基準辺を介して隣り合う面を**準基準面**とする．そして，操作の段階で注目している面を**注目面**とし，注目面が n 角形であるならば，注目面を構成する辺の集合を $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ とする．正六面体



(a) 切頂十二面体　(b) 切頂二十面体

図 1: 自己重複を持つ部分的な辺展開図の例 [3] (各凸多面体を太線に沿って切ると，下に示す部分的な辺展開図が得られる)

することでグラフとしてみることができる．なお，凸多面体の辺展開について以下の補題が知られている．

補題 1 (（[2], 補題 22.1.1）)**.** 凸多面体の辺展開図において切られている辺の集合は，その凸多面体の頂点と辺からなるグラフの全域木となる．

2.3 辺展開図の自己重複および判定方法

いくつかの凸多面体は，特定の方法で辺展開すると，自己重複を持つということが知られている [6]．その例を図 1 に示す．(a) の切頂十二面体では正三角形と正十角形が，(b) の切頂二十面体では正五角形と正六角形がそれぞれ重なっている．

辺展開図を全て描画することが出来れば，1 つ 1 つの辺展開図を目で見て確認をすることができるため，自己重複を持つ辺展開図の個数を数え上げることができる．しかし，辺展開図の数は膨大であるため，現実的な時間で自己重複の有無を目視で確認することは出来ない．そこで，命題 1 を用いて自己重複の有無を判定する．

命題 1 (面と外接円との関係性)**.** ある 2 つの面が与えられたとき，それぞれの面の外接円が重なりを持たないならば，面どうしは重なりを持たない．

手順 1（回転展開）

Step 1 基準面，基準辺を決め，基準面が底面となるよう平面 α 上に置く

Step 2 基準面の外心の (x,y) 座標を (0,0) とする

Step 3 基準辺を y 軸に平行かつ x 座標が正となるように平面 α に固定して，準基準面が底面となるよう凸多面体を転がす

Step 4 注目面の初期位置を準基準面がある面とする

Step 5 注目面を部分的な辺展開図を構成する面の集合に追加する

Step 6 注目面の外心の (x,y) 座標を計算する

Step 7 注目面から辺 e_i $(i \in n)$ を介して隣り合う面が部分的な辺展開図を構成している面に含まれないならば，辺 e_i を平面 α に固定して隣り合う面が底面となるよう凸多面体を転がす（ここで分岐が発生しうるため，それぞれの隣り合う面に対して **Step 8** の処理を行う）

Step 8 隣り合う面を注目面とし **Step 5** に戻る

に対し**手順 1** に沿って手続きを行うと図 2 のように，凸多面体が回転しながら展開をする．

正多面体を除く凸多面体において，**手順 1** の **Step 1** における基準面および基準辺の決め方により，出力される部分的な辺展開図が変わってくる．そこで，基準面と基準辺の選び方を変えることで，異なる部分的な辺展開図が出力される場合を全て探索することができる．例えば切頂四面体の場合，図 3 に示す 3 つのように基準面と基準辺を選ぶように場合分けをすれば，他の基準面，基準辺をどのように選んだとしたとしても，同様の部分的な辺展開図が得られる．各凸多面体に対し，基準面と基準辺の選び方による場合分けを行うことにより全ての部分的な辺展開図を出力することが出来るようになる．

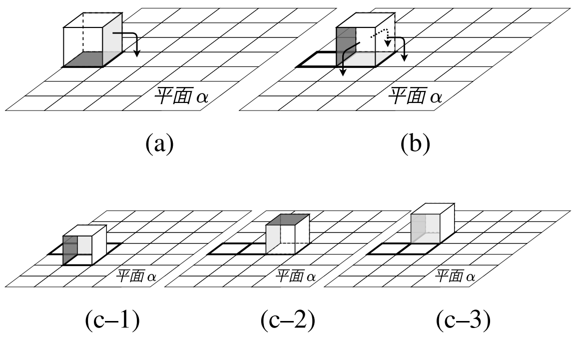


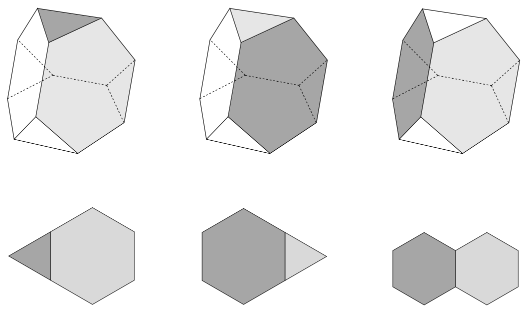
図 2: 正六面体に対する回転展開の手続きの一部（平面 α に描かれた太線の部分が部分的な辺展開図に該当．濃い灰色の面が基準面，淡い灰色の面が準基準面．(a) **Step 3** を実行する前の様子 (b) 1 回目の **Step 7** を実行する前の時の様子 (c) 1 回目の **Step 7** を実行した後の時の様子）

3.3 自己重複の有無の確認

自己重複の有無を確認する際は，**手順 1** の **Step 6** において，基準面と注目面の外接円どうしに重なりが無いかを確かめるという操作を加えれば良い．もし外接円どうしに重なりがある場合は解の集合に追加する．面の重なりの判定においては図 4 に示すように実際には重なっていない場合であっても外接円どうしが重なるため自己重複を持つものとして判定してしまうものもある．そのため重なると判定された場合は部分的な辺展開図の各頂点の座標を数値計算することで，本当に自己重複を持つのかの確認をする必要がある．なお図 5 のように面どうしが接してしまう場合がある． 本研究では，このように面どうしが接している場合は重ならないものとして扱う．

3.4 計算の効率化

手順 1 の **Step 6** において，注目面の外心の (x, y) 座標と基準面の外心の座標 $(0, 0)$ との距離を D とする．今，**手順 1** の **Step 5** において注目面を部分的な辺展開図を構成する面の集合に追加したとき，部分的な辺展開図を構成していない面，つまり使用していない面の外接円の直径の総和を D の値が超えてし



(a) (b) (c)

図 3: 基準面による場合分け（濃い灰色の面が基準面，濃い灰色の面と淡い灰色の面の間にある辺が基準辺）

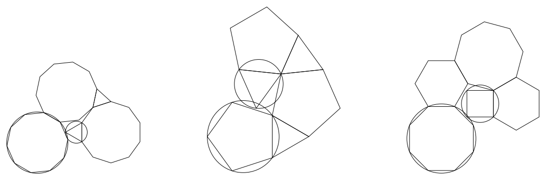


図 4: 重なると判定される部分的な辺展開図

まったとする．これは，どれだけ面を基準面に近づくように面を繋げていっても，絶対に重なることは無い．ゆえに，D の値が使用していない面の外接円の直径の総和を超えた場合，これ以上計算する必要はない．

ここで，同型という言葉の定義をしておく．部分的な辺展開図 S と T があったとき，反転や回転をすることで S における各面の位置関係と T における位置関係が完全に一致したとする．このとき S と T は**同型**であると言う．

凸多面体の基準面の外心から基準辺に垂直に引いた直線を**軸**とする．このとき，凸多面体を基準面を上面とし垂直に見下ろしたとき，軸に対して左右対称である場合は，図 6 に示すように x 軸に関して対

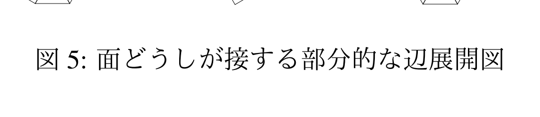
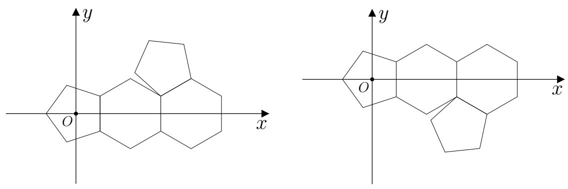


図 5: 面どうしが接する部分的な辺展開図



(a) (b)

図 6: x 軸に関して対称となる部分的な辺展開図

手順 2（対称となる場合の枝刈り）

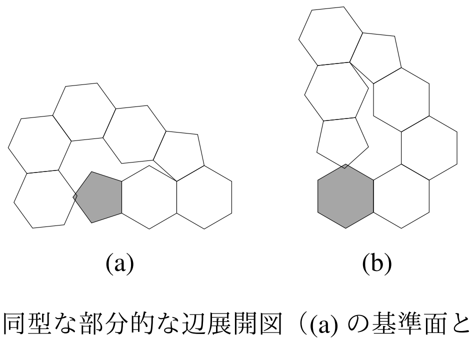
初期状態 **Flag = False**

Step I **Flag = True** ならば終了．そうでなければ，**Step II** へ．

Step II 注目面の y 座標が 0 であるならば終了．注目面の y 座標が 0 より大きいならば **Flag = True** とし終了．注目面の y 座標が 0 より小さいならば枝刈り．

称となる，つまり同型な部分的な辺展開図が出力される．そこで，**手順 1** の **Step 5** において注目面が追加された時点で y 座標に対し**手順 2** のによる枝刈りを行うことで，x 軸に関して対称となる部分的な辺展開図は 1 度計算するだけでよくなる．

また，ある自己重複を持つ部分的な辺展開図には，対となる同型な部分的な辺展開図が存在する．これは図 7 のように，基準面に重なる面を基準面とし回転展開法を計算することで，同型のものが出力されるからである．



(a) (b)

図 7: 同型な部分的な辺展開図（(a) の基準面とか重なっている面を基準面としたのが (b) の部分的な辺展開図である）

そこで，基準面を k 角形，基準面と重複を持つ面を l 角形とするとき，$k \leq l$ となる部分的な辺展開図を**標準形**とし，標準形でないならば排除をし標準形のみを出力する．その上で，$k = l$ となる標準形が複数ある場合は，辺展開図の各頂点の座標を数値計算をすることで，同型であるかを確認をする．

4 計算機実験

4.1 実験設定

本研究では C++を用いて回転展開法を実装した．回転展開法により重なると判定された場合は部分的な辺展開図を TikZ [7] を用いて描画する．計算に使った計算機は Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2643 v4 3.40GHz, CentOS 7.9, 512 GB メモリである．

4.2 実験結果と評価

4.2.1 回転展開法による自己重複の有無の確認

回転展開法により自己重複の有無の確認をした．その結果を表 2 に示す．

立方八面体に自己重複が無いことを確認するのに，同じの実験設定で従来手法を用いて計算をした [8] では約 19.5 分を要した．しかし，回転展開法を用いることで 0.008 秒で計算をし，約 14.6 万倍の早さで自己重複が無いというのを判定している．ゆえに，今まで自己重複を持つ辺展開図の個数が未解決であった二十・十二面体，斜方立方八面体，変形立方体について計算することが出来た．一方で，切頂十二面体に関しては図 1 の (a) に示す 1 種類，切頂二十面体は図 1 の (b) と，図 8 に示す部分的な辺展開図の 2 種類があると数え上げることが出来た．また，変形立方体については図 5 に示す基準の面と接してしまう部分的な辺展開図が 3 種類出力された．[1]

[1]各凸多面体のうち自己重複があると判定された（誤判定も含む）ものの一覧については https://shiotatakumi.github.io/MyPage/achievements.html#2021 に掲載している．

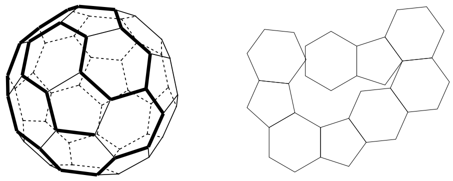


図 8: 自己重複を持つ切頂二十面体の部分的な辺展開図（左側に示すの切頂二十面体の太線に沿って切ると右側に示すの部分的な辺展開図が得られる）

4.2.2 自己重複を持つ辺展開図の数え上げ

回転展開法により，二十・十二面体，斜方立方八面体，変形立方体については部分的な辺展開図に重なりが無いということを示すことが出来た．ゆえにこれらの 3 つの凸多面体に関しては，自己重複を持つ辺展開図の個数は 0 であることを示した．

5 まとめと今後の課題

今回の実験では，回転展開法という手法を用いることで，二十・十二面体，斜方立方八面体，変形立方体に関しては自己重複を持つ辺展開図の個数が 0 個であるということが示せた．しかし，自己重複を持つ部分的な辺展開図の個数が 1 個以上あった切頂十二面体，切頂二十面体に関しては，自己重複を持つ辺展開図の数え上げまでには至らなかった．

ここで，凸多面体の辺展開図の数え上げを行う方法を示す．補題 1 より凸多面体をグラフとしたとき，全域木を数え上げれば良いということが言える．そこで，グラフにおける全域木の個数を数え上げる必要がある．数え上げの方法として行列木定理がある．D をグラフの頂点の次数の情報を対角成分に持つ**次数行列**，A を A_{ij} が頂点 i から頂点 j への辺の有無を $\{1, 0\}$ で表す**隣接行列**，L を $D - A$ で定義する**ラプラシアン行列**とする．このとき $G = (V, E)$ の全域木の数について $T(G)$ について以下の定理が成り立つ．

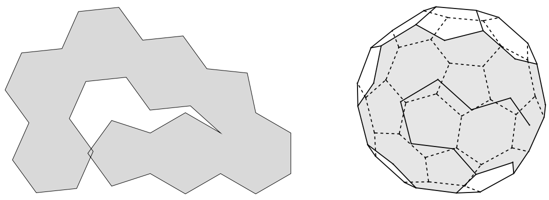
定理 1 (行列木定理 [9])**.** $G = (V, E)$ の全域木の数 $T(G)$ は，ラプラシアン行列 L の任意の余因子に等しい．

表 2: 回転展開法による計算結果（本研究で解決した箇所を**太字**で示す）

凸多面体	辺展開図の個数	計算時間	自己重複を持つ辺展開図の有無
正四面体	16	0.003s	無
正六面体	384	0.003s	無
正八面体	384	0.003s	無
正十二面体	5,184,000	0.006s	無
正二十面体	5,184,000	0.006s	無
切頂四面体	6,000	0.009s	無
切頂六面体	32,400,000	0.023s	無
切頂八面体	101,154,816	0.046s	無
切頂十二面体	4,982,259,375,000,000,000	13m 45.259s	有
切頂二十面体	375,291,866,372,898,816,000	40h 56m 3.642s	有
立方八面体	331,776	0.008s	無
二十・十二面体	208,971,104,256,000	**7.446s**	**無 [本研究]**
斜方立方八面体	301,056,000,000	1.477s	無
斜方切頂立方八面体	12,418,325,780,889,600	**7m 14.816s**	**無 [本研究]**
変形立方体	89,904,012,853,248	**13.520s**	**無 [本研究]**

この定理を元に，部分的な辺展開図を必ず含む辺展開図がいくつあるかを計算する方針を示していく．図 9 (a) に重複を持つ多面体を示す．図 9 (a) は元々は図 1 (b) に示す部分的な辺展開図であった．部分的な辺展開図は，各々の面と面を繋げているいずれかの辺が切られると同じ形は出てこないくなる．逆に，各々の面と面を繋げている辺を切らないものとすれば，必然的に部分的な辺展開図が辺展開図の中に含まれることになる．ゆえに辺を切ってはいけないのであれば，辺は存在しないものとして扱ってもよい．そのため図 9 (a) のような多面体として一括りにしてもよいことが言える．そして図 9 (b) のように部分的な辺展開図を 1 つの多面体と置き換え，この状態で行列木定理により全域木の個数を計算すれば，部分的な辺展開図を含む辺展開図の個数を数え上げることができる．

しかし，行列木定理によって計算するだけでは図 10 に示すように基準面の取り方によっては，同型な辺展開図が求まってしまう．そのため自己重複を持つ辺展開図の個数を数え上げることが出来ない．



(a) (b)

図 9: 自己重複を持つ部分的な辺展開図を 1 つの多角形と置き換えた様子

また，自己重複を持つ部分的な辺展開図が複数個ある場合，図 11 に示すように，複数の種類の自己重複を持つ辺展開図が存在しうるため，それぞれの自己重複を持つ部分的な辺展開図を行列木定理で計算をした上で，同型のものを排除し，足し合わせるだけでは計算することが出来ない．そのため，今回求めた部分的な辺展開図から自己重複を持つ辺展開図を求めることは今後の課題とされる．

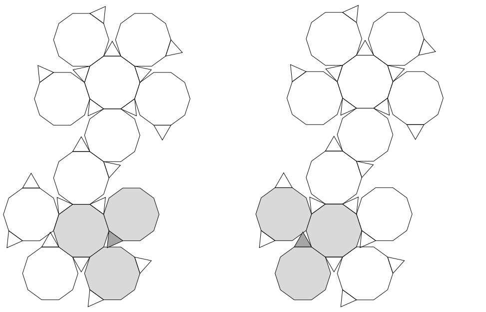


図 10: 同型な辺展開図の例（灰色の面の集合（濃い灰色の面が基準面）が図 1 (a) の部分に該当する）

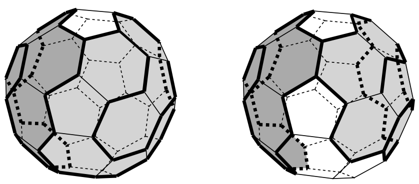


図 11: 自己重複を持つ部分的な辺展開図を 2 種類取ることができる例（濃い灰色の面の集合が図 1 (b) に示す部分的な辺展開図，淡い灰色の面の集合が図 8 に示す部分的な辺展開図に該当する）

また，切頂二十面体の重複の有無を判定するのに，40 時間以上もかかっている．そのため，斜方二十・十二面体（約 2.0×10^{29} 個）より辺展開図の個数が多い凸多面体は，自己重複の有無を回転展開法を使ったとしても現実的な時間では計算することが出来そうにない．回転展開法を改善し，より効率的に重複の有無を判定する手法を考案する必要がある．

参考文献

[1] Albrecht Dürer. Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in linien ebenen unnd gantzen corporen. 1525.

[2] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, Jul. 2007. 上原 隆平 (訳). 幾何的な折りアルゴリズムーリンケージ、折り紙、多面体, 近代科学社, Nov. 2009.

[3] Takashi Horiyama and Wataru Shoji. Edge unfoldings of platonic solids never overlap. In *Proceedings of the 23rd Annual Canadian Conference on Computational Geometry, Toronto, Ontario, Canada, August 10-12, 2011*, 2011.

[4] 廣瀬 健汰. 半正多面体の展開図の重なりについて．埼玉大学工学部情報システム工学科, 2015. 卒業論文，参考：指導教員 堀山 貴史.

[5] Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, and Richard K. Guy. *Unsolved Problems in Geometry*. Springer-Verlag, reissue edition, 1991.

[6] Takashi Horiyama and Wataru Shoji. The number of different unfoldings of polyhedra. In Leizhen Cai, Siu-Wing Cheng, and Tak Wah Lam, editors, *Algorithms and Computation - 24th International Symposium, ISAAC 2013, Hong Kong, China, December 16-18, 2013, Proceedings*, Vol. 8283 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 623–633. Springer, 2013.

[7] TEX Wiki TikZ. `https://texwiki.texjp.org/?TikZ`.

[8] 塩田 拓海. 凸多面体の辺展開図における自己重複確認アルゴリズムの高速化. 九州工業大学情報工学部システム創成情報工学科, 2021. 卒業論文，参考：指導教員 斎藤 寿樹.

[9] Mordechai Lewin. A generalization of the matrix-tree theorem. *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 181, No. 1, pp. 55–70, 1982.