回転展開法を用いた
自己重複を持つ部分的な辺展開図の数え上げ

○ 塩田 拓海　　斎藤 寿樹

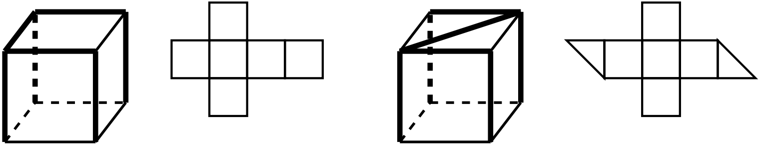
九州工業大学

July 20, 2021

辺展開図

[上原, 2018, 定義 1.0.1]

- 凸多面体の辺に切れ込みを入れて平坦に開いた多角形を辺展開図という（図 1）



(a)　　　(b)

図 1: (a) の切り方は辺展開図であるが (b) は辺展開図ではない

半正多面体

定義

1. 凸多面体のうち全ての面が正多角形であるもの
2. 各頂点に接続する面の組み合わせが同じもの
3. 1,2 のうち正多面体，アルキメデスの角柱・反角柱を除くもの

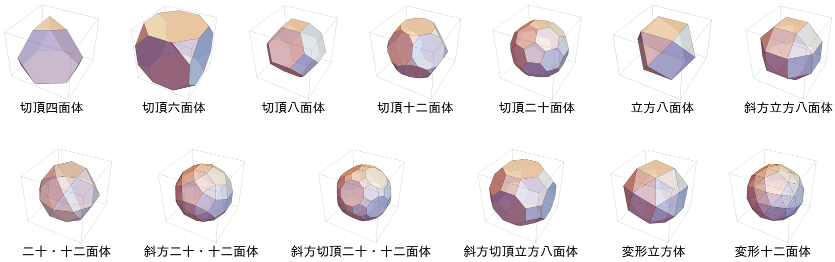
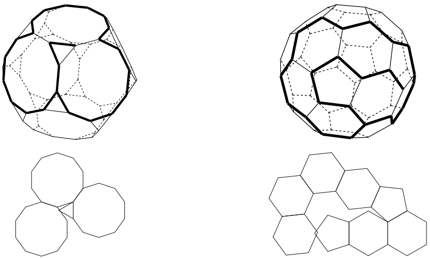


図 2: 半正多面体

凸多面体における自己重複の例

[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

- いくつかの凸多面体には自己重複を持つ辺展開図が存在する（図 3）



(a) 切頂十二面体　　(b) 切頂二十面体

図 3: 自己重複を持つ部分的な辺展開図の例

凸多面体に関する既存研究

既存研究

- T. Horiyama and W. Shoji のアルゴリズム (CCCG 2011) が存在
- 正多面体には自己重複を持つ辺展開図が無い [堀山・庄司, 2011]
- 5 種類の半正多面体には自己重複を持つ辺展開図が無い [廣瀬, 2015]

- 全ての半正多面体の自己重複は未解決

凸多面体	辺展開図の数	自己重複を持つ辺展開図の有無	自己重複を持つ辺展開図の個数
切頂四面体	6,000	無	0
切頂六面体	32,400,000	無	0
切頂八面体	101,154,816	無	0
切頂十二面体	4,982,259,375,000,000,000	有	未解決
切頂二十面体	375,291,866,372,898,816,000	有	未解決
立方八面体	331,776	無	0
二十・十二面体	208,971,104,256,000	未解決	未解決
斜方立方八面体	301,056,000,000	無	0
斜方切頂立方八面体	12,418,325,780,889,600	未解決	未解決
変形立方体	89,904,012,853,248	未解決	未解決

研究成果

定理

- 二十・十二面体，斜方切頂立方八面体，変形立方体には自己重複を持つ辺展開図は存在しない

凸多面体	辺展開図の数	自己重複を持つ辺展開図の有無	自己重複を持つ辺展開図の個数
切頂四面体	6,000	無	0
切頂六面体	32,400,000	無	0
切頂八面体	101,154,816	無	0
切頂十二面体	4,982,259,375,000,000,000	有	未解決
切頂二十面体	375,291,866,372,898,816,000	有	未解決
立方八面体	331,776	無	0
二十・十二面体	208,971,104,256,000	無 [本研究]	0 [本研究]
斜方立方八面体	301,056,000,000	無	0
斜方切頂立方八面体	12,418,325,780,889,600	無 [本研究]	0 [本研究]
変形立方体	89,904,012,853,248	無 [本研究]	0 [本研究]

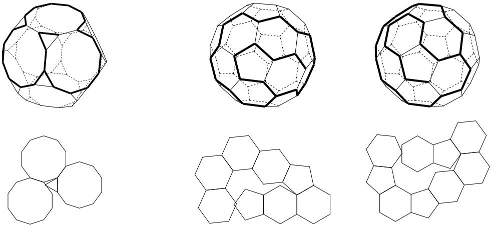
研究成果（続き）

自己重複を持つ部分的な辺展開図

- 切頂十二面体：自己重複を持つ部分的な辺展開図は 1 種類のみ
- 切頂二十面体：自己重複を持つ部分的な辺展開図は 2 種類のみ

- 自己重複を持つ部分的な辺展開図はこれら以外に存在しない

(a) 切頂十二面体　　(b) 切頂二十面体



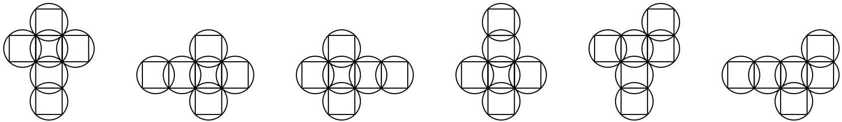
[T. Horiyama et al. 2011]　　[本研究]

T. Horiyama and W. Shoji のアルゴリズム (CCCG 2011)

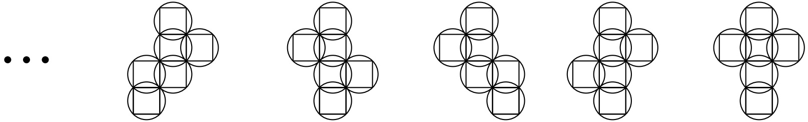
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

- 全ての辺展開図に対して外接円を取り，各面どうしに自己重複が無いかを判定

(例）正六面体（384 個）



(1) (2) (3) (4) (5) (6)



(380) (381) (382) (383) (384)

本研究の方針

- T. Horiyama and W. Shoji のアルゴリズム (CCCG 2011) は，辺展開図の数が多くなると重複の有無を現実的な時間で解けない

- (従来手法) 辺展開図の全ての面に着目

  $\Rightarrow$ (本研究) 辺展開図を構成する一部の面に着目

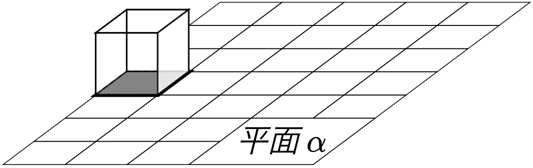
回転展開法

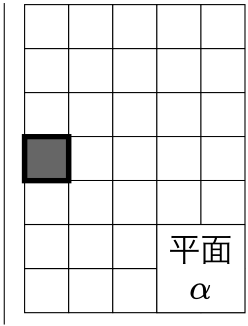
- 凸多面体をコロコロと転がすことで道をつくり，その道の全探索をすることで自己重複の有無を確認する手法

回転展開法

操作

- 任意のある面を開始面とし，平面 α 上に配置する

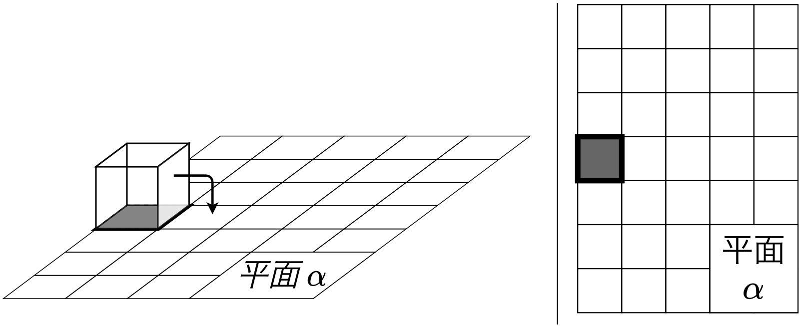




回転展開法

操作

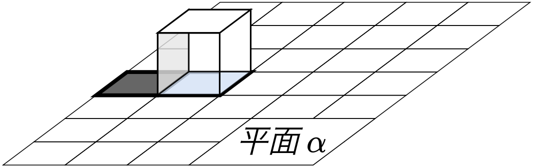
- コロッと転がして，平面 α に付いた面を終端面にする

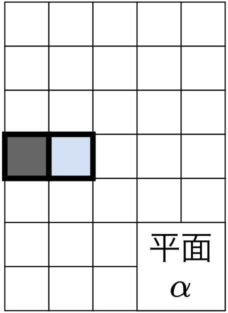


回転展開法

操作

- コロッと転がして，平面 α に付いた面を終端面にする

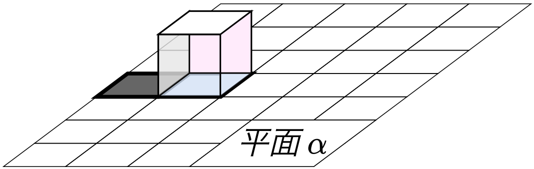


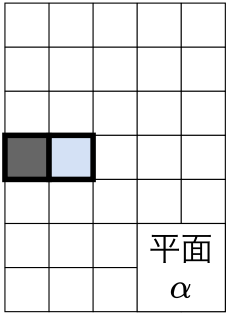


回転展開法

操作

- 残っている面の方に転がして，平面 α に付いた面を終端面にする

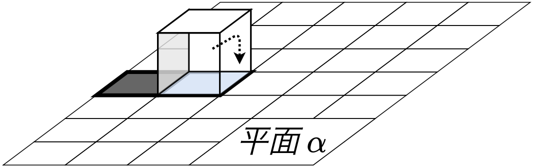


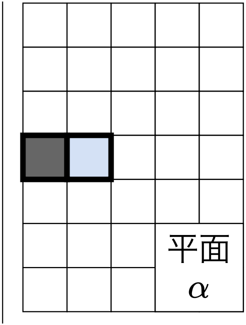


回転展開法

操作

- 残っている面の方に転がして，平面 α に付いた面を終端面にする

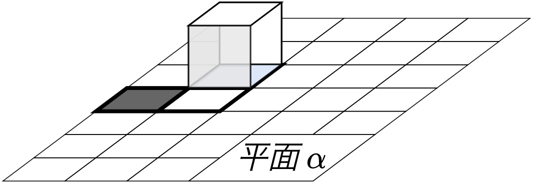


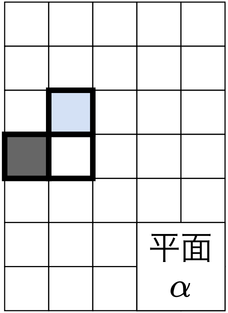


回転展開法

操作

- 残っている面の方に転がして，平面 α に付いた面を終端面にする

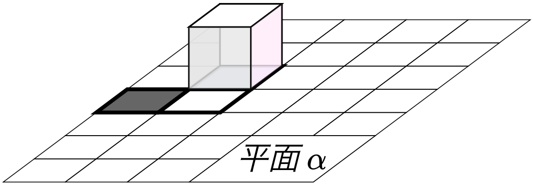


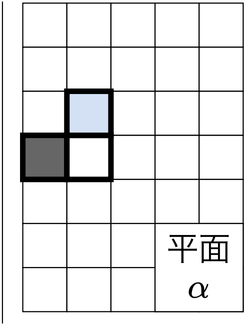


回転展開法

操作

- 残っている面の方に転がして，平面 α に付いた面を終端面にする

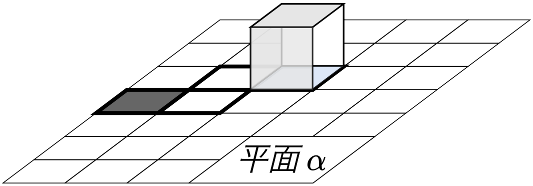


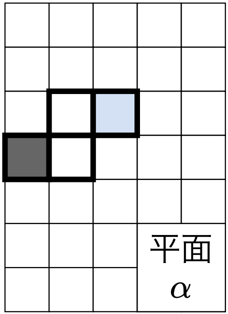


回転展開法

操作

- 残っている面の方に転がして，平面 α に付いた面を終端面にする

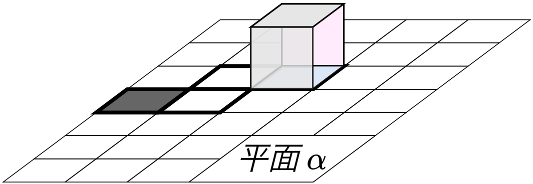


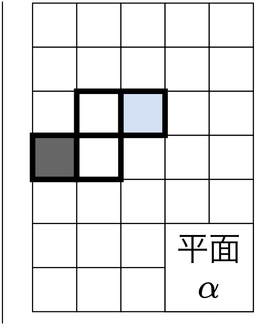


回転展開法

操作

- 残っている面の方に転がして，平面 α に付いた面を終端面にする

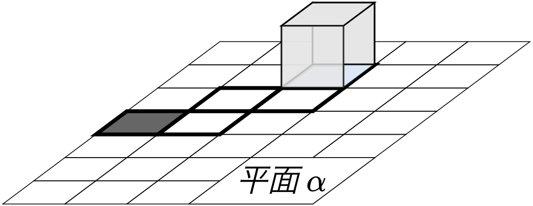


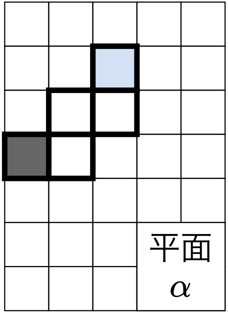


回転展開法

操作

- 残っている面の方に転がして，平面 α に付いた面を終端面にする

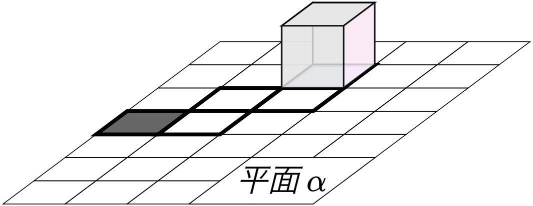


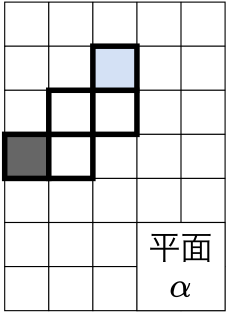


回転展開法

操作

- 残っている面の方に転がして，平面 α に付いた面を終端面にする

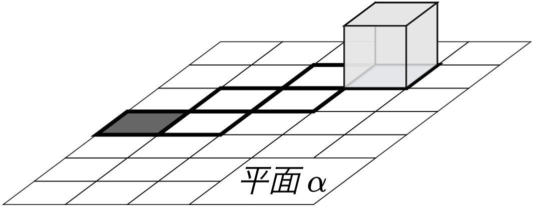


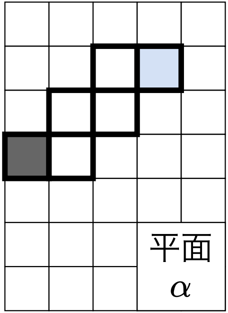


回転展開法

操作

- 残っている面の方に転がして，平面 α に付いた面を終端面にする

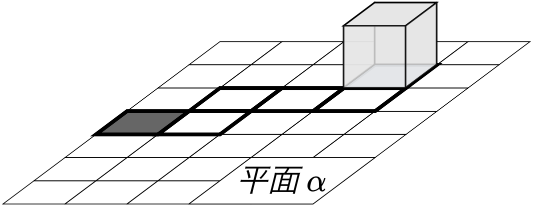


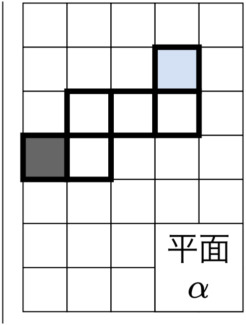


回転展開法

操作

- 以降，全探索をしていく

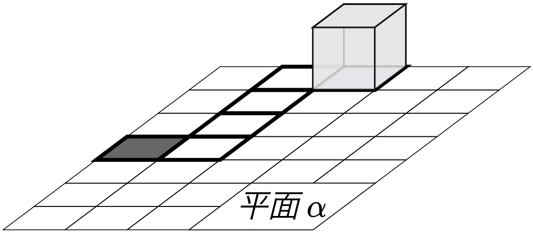


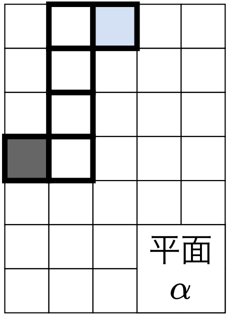


回転展開法

操作

- 以降，全探索をしていく

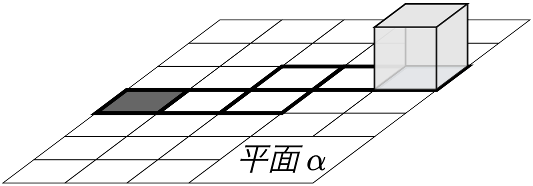


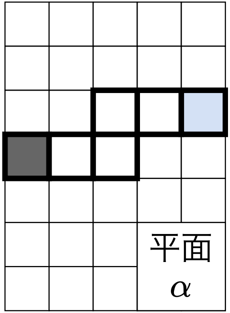


回転展開法

操作

- 以降，全探索をしていく

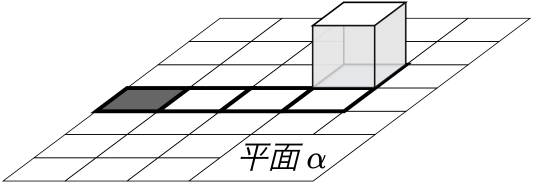


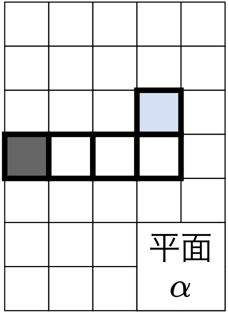


回転展開法

操作

- 以降，全探索をしていく

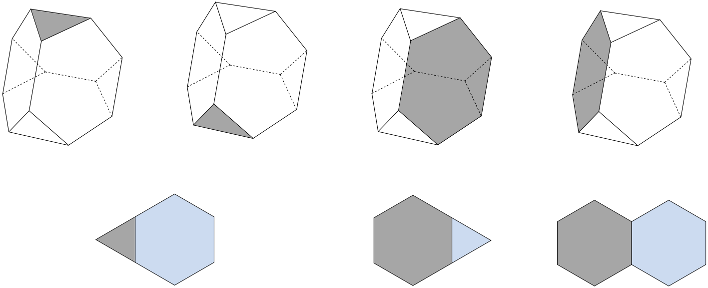




回転展開法

問題点

- 開始面と転がす方向によって，出力される部分的な辺展開図に違いが生じる



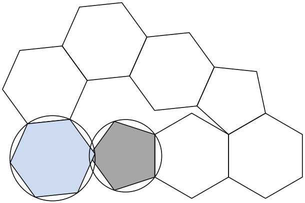
解決方法

- 開始面と転がす方向で場合分けを行うことで全探索が行える

自己重複の有無の確認

確認の方法

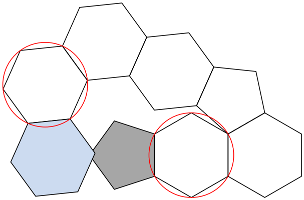
- 開始面と終端面の外接円の重複の有無を調べる.



自己重複の有無の確認

確認の方法

- 開始面と終端面の外接円の重複の有無を調べる.



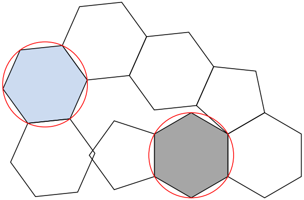
疑問

- 開始面と終端面以外の組みは調べないの？

自己重複の有無の確認

確認の方法

- 開始面と終端面の外接円の重複の有無を調べる.



疑問

- 開始面と終端面以外の組みは調べないの？

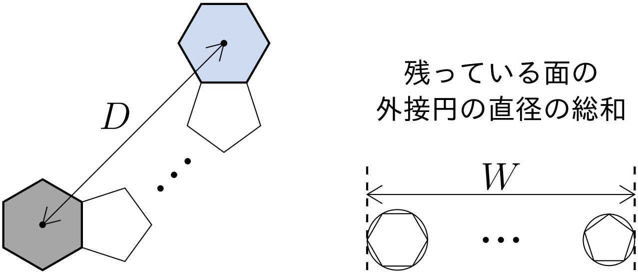
$\Rightarrow$ 全探索をしているため不要

計算の効率化

枝刈り

- 残っている面だけでは，どのように繋げても自己重複が無い場合は枝刈りを行う

- $D > W$ の場合はどのように繋げても自己重複を持たない

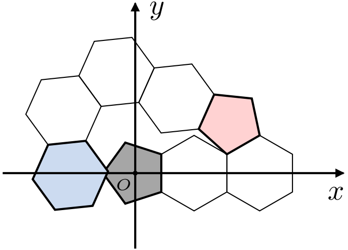


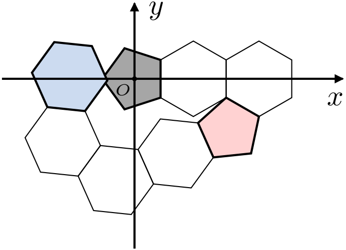
計算の効率化

枝刈り

- 凸多面体に対称性があるとき，x 軸に関して対称になる場合は枝刈りを行う

- 初めて $y = 0$ ではなくなったときに判定





こちらは計算しなくて良い

既存研究との比較

問題

- ある凸多面体に対して，自己重複を持つ辺展開図は存在するか

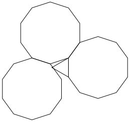
- 立方八面体では，約 14.6 万倍の速さで判定

凸多面体	辺展開図の個数	既存手法	回転展開法
正四面体	16	0.049s	0.003s
正六面体	384	0.377s	0.003s
正八面体	384	0.559s	0.003s
切頂四面体	6,000	7.241s	0.006s
立方八面体	331,776	19m 30.683s	0.006s

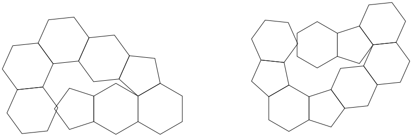
まとめ

回転展開法という手法を用いることで次に示す研究成果を得た

- 二十・十二面体，斜方立方八面体，変形立方体は自己重複を持つ辺展開図は無い
- 切頂十二面体：自己重複を持つ部分的な辺展開図は 1 種類のみ
- 切頂二十面体：自己重複を持つ部分的な辺展開図は 2 種類のみ



(a) 切頂十二面体



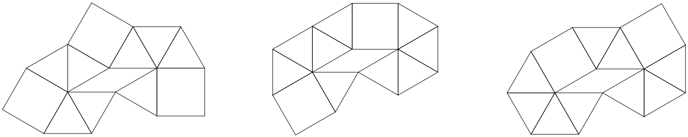
(b) 切頂二十面体

小ネタ

接点を持つ辺展開図

- 変形立方体には面と面が接する辺展開図が存在する

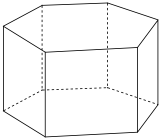
- 回転展開法の計算過程で導出された



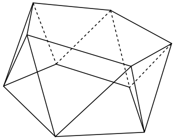
- 本研究で対象とした他の凸多面体には無い

今後の課題

- 未だ計算されていない凸多面体の自己重複の有無の判定
  - アルキメデスの角柱・半角柱
  - ジョンソンの立体



アルキメデスの角柱



アルキメデスの半角柱

今後の課題

- 回転展開法の改善
  - 切頂二十面体の重複の有無を判定するのに 40 時間以上
- 切頂十二面体，切頂二十面体の自己重複を持つ辺展開図の数え上げ
  - 本研究で求まった自己重複を持つ部分的な辺展開図を用いる
  - ZDD [湊, 1993] の演算を用いることで計算をする