アルキメデスの角柱の重なりを持つ辺展開図

塩田 拓海 † 斎藤 寿樹

九州工業大学

November 13, 2021

辺展開図

[上原, 2018, 定義 1.0.1]

- 凸多面体の辺に切れ込みを入れて平坦に開いた多角形を辺展開図という（図 1）

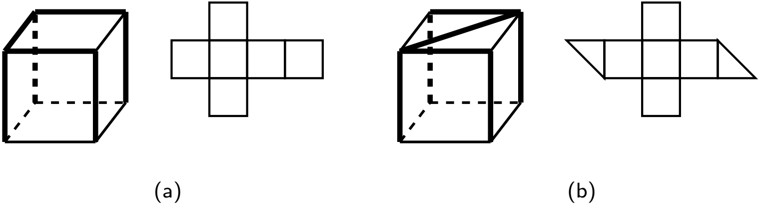


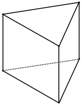
図 1: (a) の切り方は辺展開図であるが (b) は辺展開図ではない

アルキメデスの n 角柱

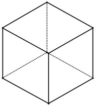
定義

1. 上下の底面が正 n 角形のもの
2. 側面が全て正方形であるもの

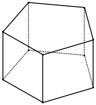
- アルキメデスの n 角柱を $P_R(n)$ とする



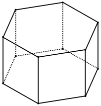
$P_R(3)$



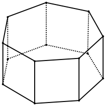
$P_R(4)$



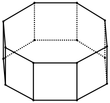
$P_R(5)$



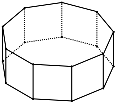
$P_R(6)$



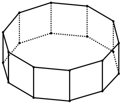
$P_R(7)$



$P_R(8)$



$P_R(9)$

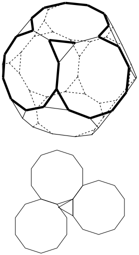


$P_R(10)$

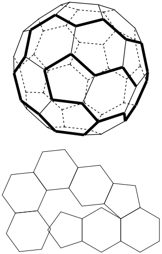
凸多面体における重なりを持つ辺展開図の例

[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

- いくつかの凸多面体には重なりを持つ辺展開図が存在する（図 2）



(a) 切頂十二面体



(b) 切頂二十面体

図 2: 重なりを持つ部分的な辺展開図の例

研究成果

- アルキメデスの n 角柱を $P_R(n)$ とする

定理 1

- $3 \leq n \leq 23$ のとき $P_R(n)$ には重なりを持つ辺展開図が存在しない

- 回転展開 [T. Shiota and T.Saitoh, 2021] を使い，列挙することで示した

定理 2

- 任意の $n \geq 24$ に対して $P_R(n)$ には重なりを持つ辺展開図が存在する

- 本発表ではこちらの証明を示す

本研究の位置付け

- アルキメデスの角柱は**整凸面多面体**に分類される

整凸面多面体	重なりを持つ辺展開図の有無
正多面体 (全 5 種類)	無し [T. Horiyama et al. 2011]
半正多面体 (全 13 種類)	7 種類に無し・6 種類に有り [T. Horiyama et al. 2011, T. Shiota et al. 2021]
アルキメデスの n 角柱 (無限個)	$3 \leq n \leq 23$ のときは無し 任意の $n \geq 24$ に対して有り
アルキメデスの n 半角柱 (無限個)	未解決
ジョンソンの立体 (全 92 種類)	未解決

定理 2 の証明

定理 2

- 任意の $n \geq 24$ に対して $P_R(n)$ には重なりを持つ辺展開図が存在する

- 回転展開 [T. Shiota and T.Saitoh, 2021] を用いて，$n = 24$ の場合以下のように重なりを持つ部分的な辺展開図が存在することを発見

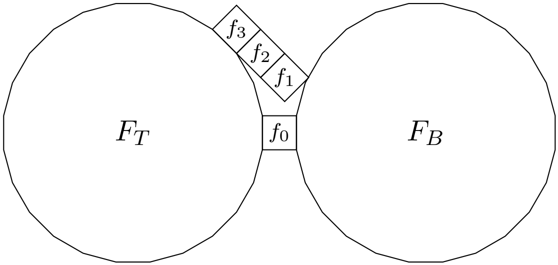
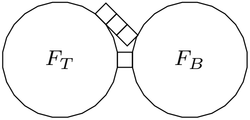


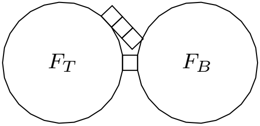
図 3: 重なりを持つ $P_R(24)$ の部分的な辺展開図

定理 2 の証明（続き）

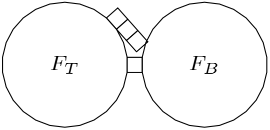
- $n = 24, 25, 26, 27, 28$ の場合，$\{F_B, f_0, F_T, f_3, f_2, f_1\}$ からなる部分的な辺展開図は重なりを持つ



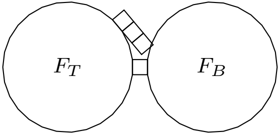
$P_R(24)$



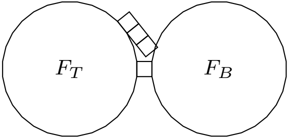
$P_R(25)$



$P_R(26)$



$P_R(27)$



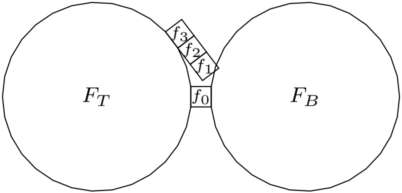
$P_R(28)$

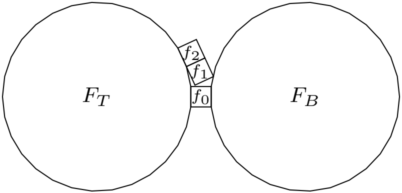
補題 1

- 任意の $24 \leq n \leq 28$ に対して $P_R(n)$ には重なりを持つ辺展開図が存在する

定理 2 の証明（続き）

- $n = 29$ の場合，$\{F_B, f_0, F_T, f_3, f_2, f_1\}$ および $\{F_B, f_0, F_T, f_2, f_1\}$ からなる部分的な辺展開図は重なりを持つ





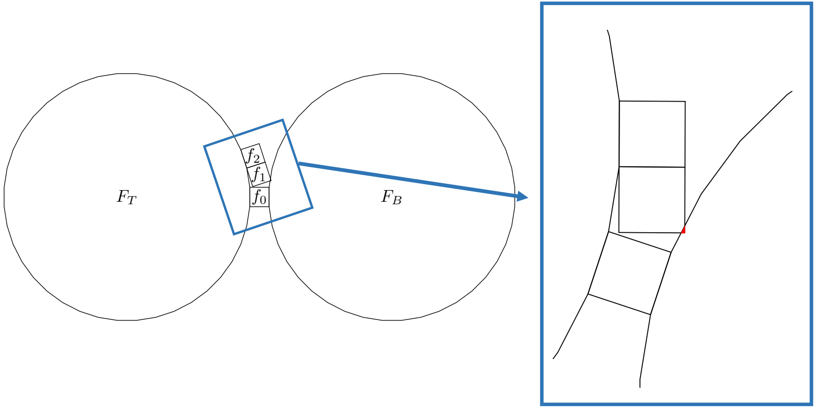
$\{F_B, f_0, F_T, f_3, f_2, f_1\}$　　$\{F_B, f_0, F_T, f_2, f_1\}$

証明の方針

- 任意の $n \geq 29$ に対して，$P_R(n)$ の $\{F_B, f_0, F_T, f_2, f_1\}$ からなる部分的な辺展開図は必ず重なりを持つことを示す

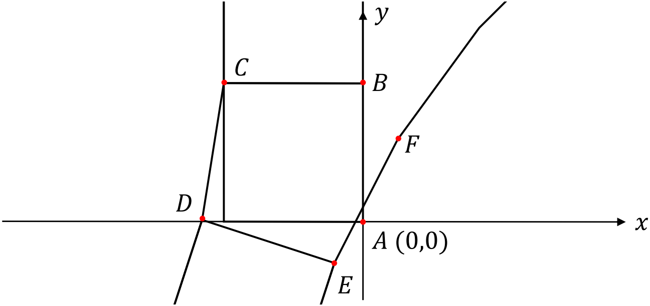
定理 2 の証明（続き）

- 重なっている箇所を拡大すると右図のようになっている



定理 2 の証明（続き）

- 点 A を原点 $(0,0)$ とする（全ての辺の長さは 1）

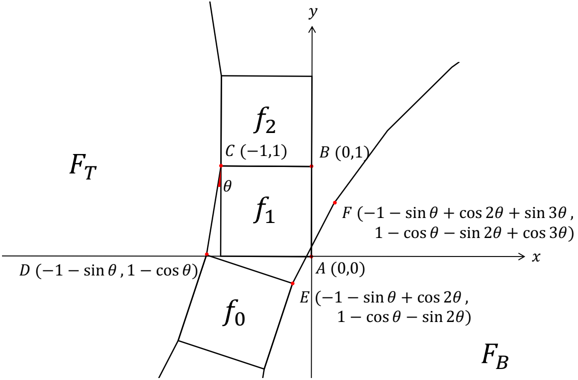


重なりを持つための十分条件

1. 点 E が第 3 象限に存在する（$x < 0$ かつ $y < 0$）
2. 線分 AB と線分 EF の交点が $0 < y < 1$ 上に存在する

定理 2 の証明（続き）

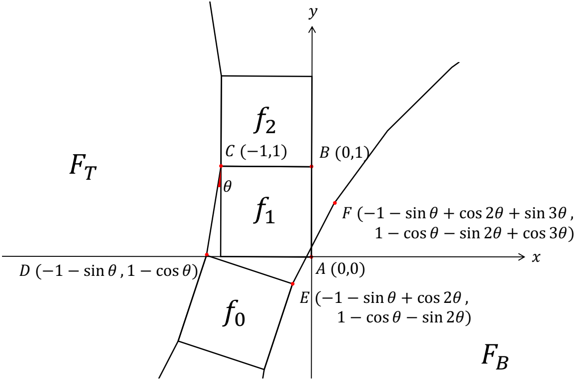
- 各辺の長さを 1，$\theta = \dfrac{2\pi}{n}$ とすることで，各点の (x, y) 座標が求まる



- n の定義域が $29 \leq n$ の場合，θ の定義域は $0 < \theta \leq 2\pi/29$

定理 2 の証明（続き）

- 点 E の座標 (E_x, E_y) が第 3 象限に存在することを示す

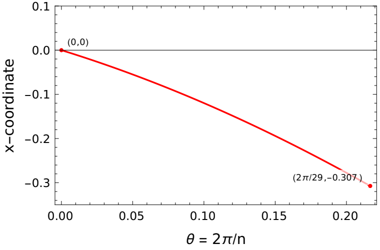


定理 2 の証明（続き）

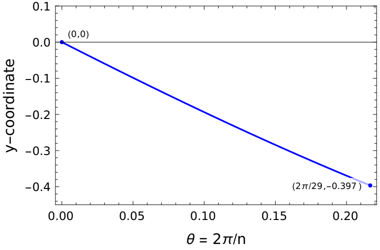
重なりを持つための十分条件

1. 点 E の座標 (E_x, E_y) が第 3 象限に存在する

- θ の定義域が $0 < \theta \leq 2\pi/29$ のとき，(Ex, Ey) の値域は下図のとおり



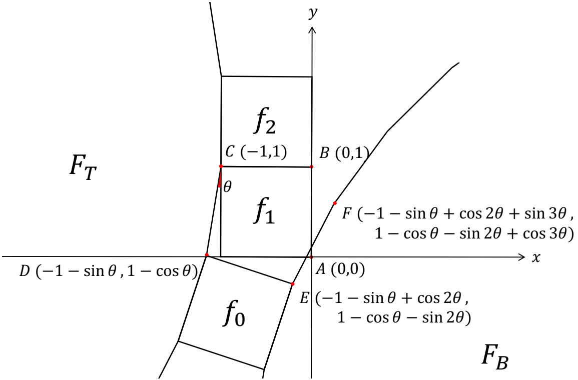
Ex の値域



Ey の値域

定理 2 の証明（続き）

- 線分 AB と線分 EF の交点が $0 < y < 1$ 上に存在することを示す



- 点 E, F を含む直線の方程式は $y = \cot 3\theta(x - E_x) + E_y$

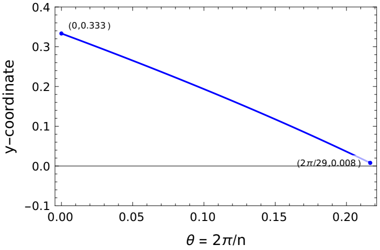
  $\Rightarrow$ 線分 AB（y 軸）との交点の座標は $(0, -E_x \cot 3\theta + E_y)$

定理 2 の証明（続き）

重なりを持つための十分条件

2. 線分 AB と線分 EF の交点が $0 < y < 1$ 上に存在する

- $0 < \theta \leq 2\pi/29$ のとき，交点の y 座標の値域は下図のとおり



交点の y 座標の値域

定理 2 の証明（続き）

- 数値計算の結果より，2 つの十分条件が真であることが示された

重なりを持つための十分条件

1. 点 E が第 3 象限に存在する（$x < 0$ かつ $y < 0$）
2. 線分 AB と線分 EF の交点が $0 < y < 1$ 上に存在する

- この条件から以下の補題 2 が導かれる

補題 2

- 任意の $n \geq 29$ に対して $P_R(n)$ には重なりを持つ辺展開図が存在する

- 補題 1（$24 \leq n \leq 28$ の場合）と補題 2 より定理 2 は示された □

まとめ

アルキメデスの n 角柱 $P_R(n)$ は $\cdots$

- $3 \leq n \leq 23$ のとき，重なりを持つ辺展開図が存在しない．任意の $n \geq 24$ に対して重なりを持つ辺展開図が存在する．

整凸面多面体	重なりを持つ辺展開図の有無
正多面体 (全 5 種類)	無し [T. Horiyama et al. 2011]
半正多面体 (全 13 種類)	7 種類に無し・6 種類に有り [T. Horiyama et al. 2011, T. Shiota et al. 2021]
アルキメデスの n 角柱 (無限個)	$3 \leq n \leq 23$ のときは無し 任意の $n \geq 24$ に対して有り
アルキメデスの n 半角柱 (無限個)	未解決
ジョンソンの立体 (全 92 種類)	未解決

今後の課題

- 今回，数値計算の結果に基づき各点の正負を判断していた

  $\Rightarrow$ 各点の (x, y) 座標の正負を解析的に解くことで示したい

- アルキメデスの半角柱の重なりを持つ辺展開図の存在の判定

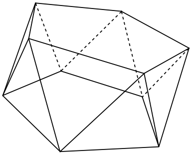


図 4: アルキメデスの半角柱