回転展開法を用いた
自己重複を持つ部分的な辺展開図の数え上げ

塩田 拓海 * 斎藤 寿樹 *
(*九州工業大学)

1　はじめに

凸多面体の展開図の研究は，1525 年に Drüer が『測定教本』を出版したことに起源するとされる [1]．ここで，辺や面に切り込みを入れて平坦に開いた多角形を**展開図**，辺に沿って切り込みを入れることを**辺展開**，辺に沿って切った展開図を**辺展開図**とする．この本に描かれた全ての辺展開図はどれを見ても面どうしが重ならない多角形，つまり自己重複を持たないものとなっている．この「Drüer の描画」を通じて次の未解決問題が得られた．

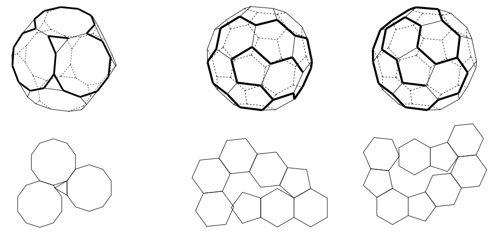
未解決問題 1 (凸多面体の辺展開（[1]，未解決問題 21.1 を参照）)**.** すべての凸多面体は単純で重ならない多角形に辺展開することが出来るだろうか．つまり全ての凸多面体は自己重複を持たない辺展開図があるだろうか．

この問題を解決すべく，凸多面体に制約条件が付けられた研究が進められてきた．その 1 つが凸多面体の自己重複を持つ辺展開図の数え上げである．いくつかの凸多面体には，自己重複を持つ辺展開図が存在することが知られている（図 1，[2]）．しかし，最も私たちに馴染みの深い正多面体（全 5 種）の辺展開図に関しても，自己重複を持たないかはごく最近まで分かっておらず，2011 年になって始めて堀山らによってどの辺展開図も自己重複を持たないということが分かった [2]．また，廣瀬らは半正多面体（全 13 種）に関しては，2015 年に 5 種類の多面体が重なりを持たないことを示した [3]．しかし，残りの 8 種類のうち 5 種類に関しては自己重複は存在するが，その個数は分かっておらず [2]，3 種類に関しては自己重複の有無すらも分かっていなかった (表 1)．これは，全ての辺展開図に対して，どの 2 組の面を見ても自己重複を持たないかを判定するという方法で計算をしているからである．つまり，ある凸多面体 A の辺展開図の個数を N，A を構成する面の数を S とするとき $N \cdot \binom{S}{2} = NS(S-1)/2$ 回の計算をしなければならない．そのため辺展開図の個数 N が膨大な凸多面体の重複の有無を現実的な時間で解くことは不可能なのである．

本研究では，回転展開法という手法を考案し，3 つの凸多面体の辺展開図には自己重複が無いことを示した（表 1 に太字で記した箇所）．また，凸多面体を構成する一部の面を使用した辺展開図である**部分的な辺展開図**のうち自己重複を持つものが，切頂十二面体には図 1 (a) の 1 種類，切頂二十面体には図 1 (b) の 2 種類しか存在しないということを示した．

表 1: 各凸多面体の辺展開図の重複の有無

凸多面体	自己重複を持つ辺展開図の有無	自己重複を持つ辺展開図の個数
正四面体	無	0
正六面体	無	0
正八面体	無	0
正十二面体	無 [2]	0
正二十面体	無 [2]	0
切頂四面体	無 [3]	0
切頂六面体	無 [3]	0
切頂八面体	無 [3]	0
切頂十二面体	有 [2]	未解決
切頂二十面体	有 [2]	未解決
立方八面体	無 [3]	0
二十・十二面体	**無 [本研究]**	**0 [本研究]**
斜方立方八面体	無 [3]	0
斜方二十・十二面体	有 [2]	未解決
斜方切頂立方八面体	**無 [本研究]**	**0 [本研究]**
斜方切頂二十・十二面体	有 [2]	未解決
変形立方体	**無 [本研究]**	**0 [本研究]**
変形十二面体	有 [4]	未解決



(a) 切頂十二面体　　(b) 切頂二十面体

図 1: 自己重複を持つ部分的な辺展開図の例 ((a) および (b) の左図は [2]，(b) の右図は本研究にて発見．各凸多面体を太線に沿って切ると，下に示す部分的な辺展開図を得る)

2　回転展開法

堀山らによるアルゴリズム [2, 3] では，凸多面体の辺展開図が自己重複を持つかを確認するために全ての辺展開図を列挙し，それぞれの面どうしが重なりを持たないかを命題 1 を用いて判断する．

命題 1 (面と外接円との関係性)**.** ある 2 つの面が与えられたとき，それぞれの面の外接円が重なりを持たないならば，面どうしは重なりを持たない．

しかし，この手法では辺展開図の個数が多い凸多面体を現実的な時間で計算することが出来ない．

そこで辺展開図の全ての面ではなく，辺展開図を構成する一部の面のみに注目をした．ここで凸多面体を構成する一部の面を使用した辺展開図のことを**部分的な辺展開図**とする．

本研究では凸多面体が自己重複を持つかどうかを確認するため，自己重複を持つ部分的な辺展開図を抽出する回転展開法という手法を考案した．その流れを下記に示す．

(1) 回転展開という手続きを行うことにより求まる部分的な辺展開図を全て出力する

(2) 出力された部分的な辺展開図それぞれに対して自己重複を持つかを判定する

手順 1 に回転展開により部分的な辺展開図を出力する方法を示す．ここで凸多面体を辺展開したとき同じ辺を持つ面のことを**隣り合う面**もしくは**繋がる面**とし，面 X と面 Y が隣り合い，かつ面 X と面 Y が辺 Z を共通して持つとき，面 Y は**面 X から辺 Z を介して隣り合う面**と表記する．また，凸多面体の任意のある面 f を**基準面**，f の任意の辺

手順 1（回転展開）

Step 1 基準面，基準辺を決め，基準面が底面となるよう平面 α 上に置く

Step 2 基準面の外心の (x,y) 座標を (0,0) とする

Step 3 基準辺を y 軸に平行かつ x 座標が正となるように平面 α に固定して，準基準面が底面となるよう凸多面体を転がす

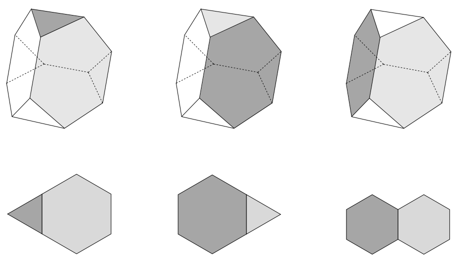
Step 4 注目面の初期位置を準基準面がある面とする

Step 5 注目面を部分的な辺展開図を構成する面の集合に追加する

Step 6 注目面の外心の (x,y) 座標を計算する

Step 7 注目面から辺 e_i $(i \in n)$ を介して隣り合う面が部分的な辺展開図を構成している面に含まれないならば，辺 e_i を平面 α に固定して隣り合う面が底面となるよう凸多面体を転がす（ここで分岐が発生しうるため，それぞれの隣り合う面に対して **Step 8** の処理を行う）

Step 8 隣り合う面を注目面とし **Step 5** に戻る



(a) (b) (c)

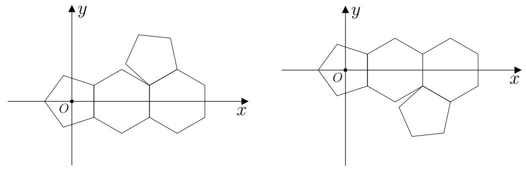
図 2: 基準面による場合分け（濃い灰色の面が基準面，濃い灰色の面と淡い灰色の面の間にある辺が基準辺）

e を**基準辺**，基準面から基準辺を介して隣り合う面を**準基準面**とする．そして，操作の段階で注目している面を**注目面**とし，注目面が n 角形であるならば，注目面を構成する辺の集合を $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ とする．

正多面体を除く凸多面体において，**手順 1** の **Step 1** における基準面および基準辺の決め方により，出力される部分的な辺展開図が変わってくる．そこで，基準面と基準辺の選び方を変えることで，異なる部分的な辺展開図が出力される場合を全て探索することができる．例えば切頂四面体の場合，図 2 に示す 3 つのように基準面と基準辺を選ぶように場合分けをすれば，他の基準面，基準辺をどのように選んだとしたとしても，同様の部分的な辺展開図が得られる．各凸多面体に対し，基準面と基準辺の選び方による場合分けを行うことにより全ての部分的な辺展開図を出力することが出来るようになる．

自己重複の有無を確認する際は，**手順 1** の **Step 6** において，基準面と注目面の外接円どうしに重なりが無いかを確かめるという操作を加えれば良い．もし外接円どうしに重なりがある場合は解の集合に追加する．面の重なりの判定においては実際には重なっていない場合であっても外接円どうしが重なるため自己重複を持つものとして判定してしまうものもある．そのため重なると判定された場合は部分的な辺展開図の各頂点の座標を数値計算により求め，本当に自己重複を持つかの確認をする．

この手法は，さらに効率よく計算をすることができる．**手順 1** の **Step 6** において，注目面の外心の (x, y) 座標と基準面の外心の座標 $(0, 0)$ との距離を D とする．今，**手順 1** の **Step 5** において注目面を部分的な辺展開図を構成する面の集合に追加したとき，部分的な辺展開図を構成していない面，つまり使用していない面の外接円の直径の総和を D の値が超えてしまったとする．これは，どれだけ面を基準面に近づくように面を繋げていっても，絶対に重なることは無い．ゆえに，D の値が使用していない面の外接円の直径の総和を超えた場合，これ以上計算する必要はない．



(a) (b)

図 3: x 軸に関して対称となる部分的な辺展開図

図 3 に示すように x 軸に関して対称となる場合も計算の効率化が図れる．ここで，同型という言葉の定義をしておく．部分的な辺展開図 S と T があったとき，反転や回転をすることで S における各面の位置関係と T における位置関係が完全に一致したとする．このとき S と T は**同型**であると言う．凸多面体の基準面の外心から基準辺に垂直に引いた直線を**軸**とする．このとき，凸多面体を基準面を上面とし垂直に見下ろしたとき，軸に対して左右対称である場合は，図 3 に示すように x 軸に関して対称となる，つまり同型な部分的な辺展開図が出力される．そこで，**手順 1** の **Step 5** において追加された注目面の y 座標の値が初めて 0 ではなくなったとき，$y < 0$ ならば枝刈りを行うことで，x 軸に関して対称となる部分的な辺展開図は 1 度計算するだけでよくなる．

3 今後の課題

今回の実験では，回転展開法という手法を用いることで，二十・十二面体，斜方立方八面体，変形立方体に関しては自己重複を持つ辺展開図の個数が 0 個であるということが示せた．しかし，自己重複を持つ部分的な辺展開図の個数が 1 個以上あった切頂十二面体，切頂二十面体に関しては，自己重複を持つ辺展開図の数え上げまでには至らなかった．そのため，今回求めた部分的な辺展開図から自己重複を持つ辺展開図を求めることは今後の課題とされる．

また，切頂二十面体の重複の有無を判定するのに，40 時間以上もかかっている．そのため，斜方二十・十二面体（約 2.0×10^{29} 個）より辺展開図の個数が多い凸多面体は，自己重複の有無を回転展開法を使ったとしても現実的な時間では計算することが出来そうにない．回転展開法を改善し，より効率的に重複の有無を判定する手法を考案する必要がある．

参考文献

[1] D. D. Erik and Joseph O. *Geometric Folding Algorithms*. Cambridge univ. Press, Jul. 2007.

[2] T. Horiyama and W. Shoji. Edge unfoldings of platonic solids never overlap. In *Proceedings of CCCG2011*, 2011.

[3] 廣瀬 健汰. 半正多面体の展開図の重なりについて. 埼玉大学工学部, 2015.

[4] T. C. Hallard, J. F. Kenneth, and K. G. Richard. *Unsolved Problems in Geometry*. Springer-Verlag, reissue edition, 1991.