

回転展開法を用いた 自己重複を持つ部分的な辺展開図の数え上げ

○ 塩田 拓海 齋藤 寿樹

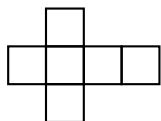
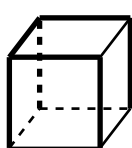
九州工業大学

September 24, 2021

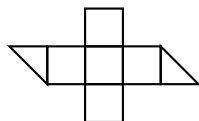
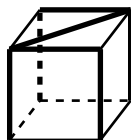
辺展開図

[上原, 2018, 定義 1.0.1]

- 凸多面体の辺に切れ込みを入れて平坦に開いた多角形を辺展開図という (図 1)



(a)



(b)

図 1: (a) の切り方は辺展開図であるが (b) は辺展開図ではない

半正多面体

定義

1. 凸多面体のうち全ての面が正多角形であるもの
2. 各頂点に接続する面の組み合わせが同じもの
3. 1,2のうち正多面体, アルキメデスの角柱・反角柱を除くもの

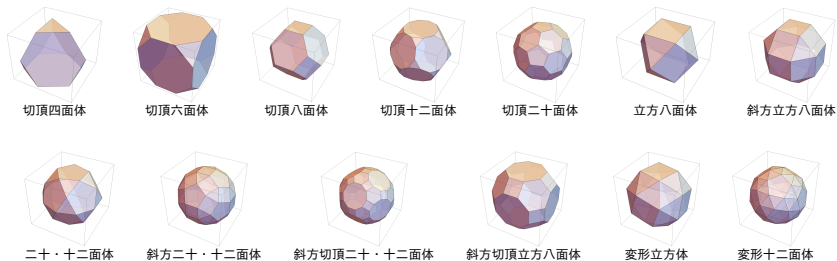
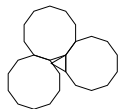
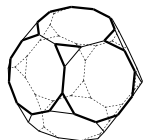


図 2: 半正多面体

凸多面体における自己重複の例

[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

- いくつかの凸多面体には自己重複を持つ辺展開図が存在する (図3)



(a) 切頂十二面体



(b) 切頂二十面体

図3: 自己重複を持つ部分的な辺展開図の例

凸多面体に関する既存研究

既存研究

- 自己重複の有無を判定するアルゴリズムが存在 [堀山・庄司, 2011]
 - ▶ 正多面体には自己重複を持つ辺展開図が無い [堀山・庄司, 2011]
 - ▶ 5種類の半正多面体には自己重複を持つ辺展開図が無い [廣瀬, 2015]
- 一部の半正多面体の自己重複は未解決

| 凸多面体 | 辺展開図の数 | 自己重複を持つ 辺展開図の有無 | 自己重複を持つ 辺展開図の個数 |
|-----------|-----------------------------|--------------------|--------------------|
| 切頂四面体 | 6,000 | 無し | 0 |
| 切頂六面体 | 32,400,000 | 無し | 0 |
| 切頂八面体 | 101,154,816 | 無し | 0 |
| 切頂十二面体 | 4,982,259,375,000,000,000 | 有り | 未解決 |
| 切頂二十面体 | 375,291,866,372,898,816,000 | 有り | 未解決 |
| 立方八面体 | 331,776 | 無し | 0 |
| 二十・十二面体 | 208,971,104,256,000 | 未解決 | 未解決 |
| 斜方立方八面体 | 301,056,000,000 | 無し | 0 |
| 斜方切頂立方八面体 | 12,418,325,780,889,600 | 未解決 | 未解決 |
| 変形立方体 | 89,904,012,853,248 | 未解決 | 未解決 |

研究成果

定理 1

- 二十・十二面体，斜方切頂立方八面体，変形立方体には自己重複を持つ辺展開図は存在しない

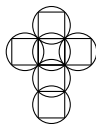
| 凸多面体 | 辺展開図の数 | 自己重複を持つ 辺展開図の有無 | 自己重複を持つ 辺展開図の個数 |
|-----------|-----------------------------|--------------------|--------------------|
| 切頂四面体 | 6,000 | 無し | 0 |
| 切頂六面体 | 32,400,000 | 無し | 0 |
| 切頂八面体 | 101,154,816 | 無し | 0 |
| 切頂十二面体 | 4,982,259,375,000,000,000 | 有り | 未解決 |
| 切頂二十面体 | 375,291,866,372,898,816,000 | 有り | 未解決 |
| 立方八面体 | 331,776 | 無し | 0 |
| 二十・十二面体 | 208,971,104,256,000 | 無し [本研究] | 0 [本研究] |
| 斜方立方八面体 | 301,056,000,000 | 無し | 0 |
| 斜方切頂立方八面体 | 12,418,325,780,889,600 | 無し [本研究] | 0 [本研究] |
| 変形立方体 | 89,904,012,853,248 | 無し [本研究] | 0 [本研究] |

自己重複の有無を判定するアルゴリズム

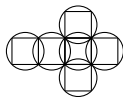
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

- 全ての辺展開図に対して外接円を取り，各面どうしに自己重複が無いかを判定

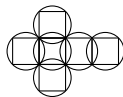
(例) 正六面体 (384 個)



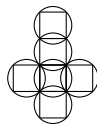
(1)



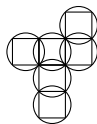
(2)



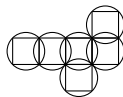
(3)



(4)

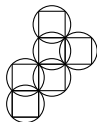


(5)

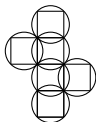


(6)

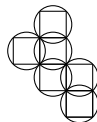
...



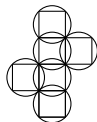
(380)



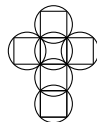
(381)



(382)



(383)

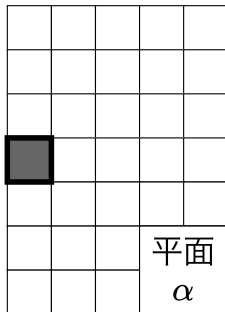
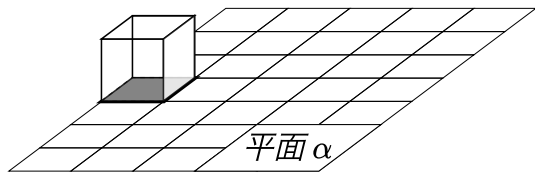


(384)

回転展開法

概要

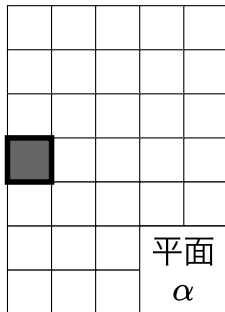
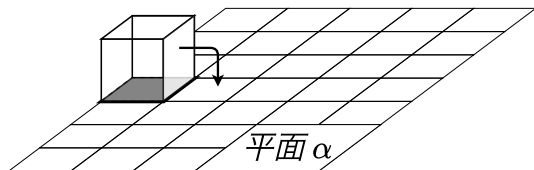
- 凸多面体をコロコロと転がすことで道を作り，任意の二面間の道を全列挙する手法



回転展開法

概要

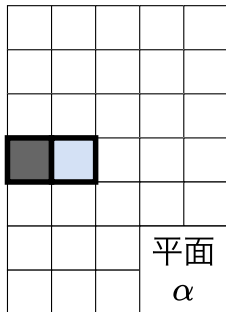
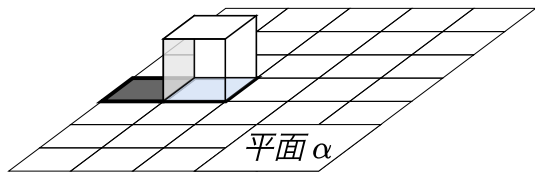
- 凸多面体をコロコロと転がすことで道を作り，任意の二面間の道を全列挙する手法



回転展開法

概要

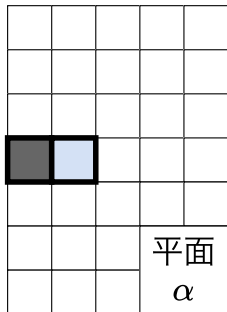
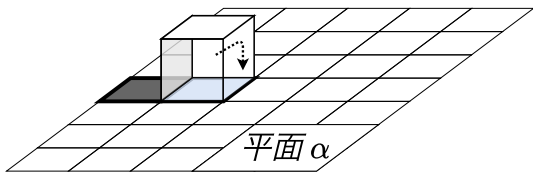
- 凸多面体をコロコロと転がすことで道を作り、任意の二面間の道を全列挙する手法



回転展開法

概要

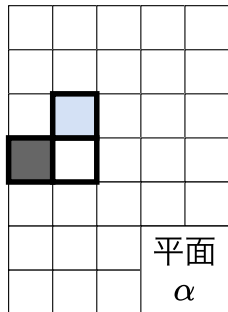
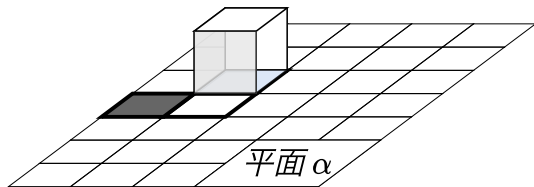
- 凸多面体をコロコロと転がすことで道を作り、任意の二面間の道を全列挙する手法



回転展開法

概要

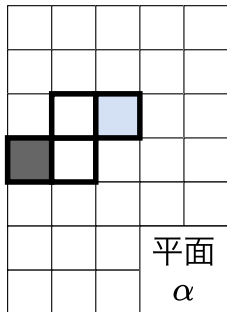
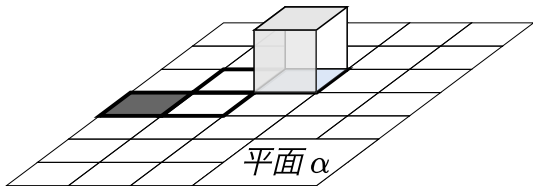
- 凸多面体をコロコロと転がすことで道を作り、任意の二面間の道を全列挙する手法



回転展開法

概要

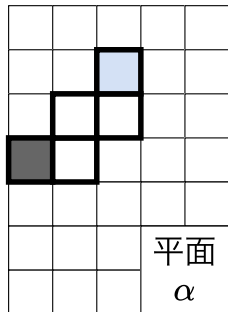
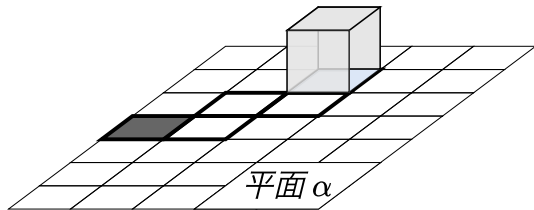
- 凸多面体をコロコロと転がすことで道を作り、任意の二面間の道を全列挙する手法



回転展開法

概要

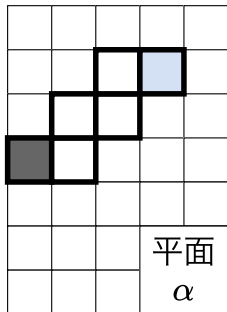
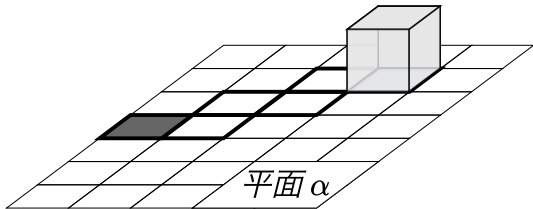
- 凸多面体をコロコロと転がすことで道を作り，任意の二面間の道を全列挙する手法



回転展開法

概要

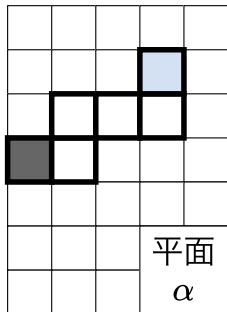
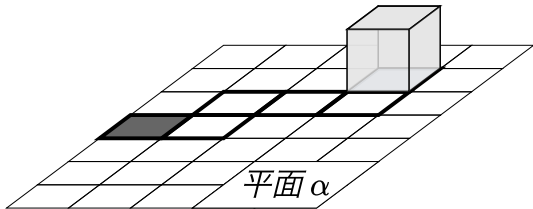
- 凸多面体をコロコロと転がすことで道を作り，任意の二面間の道を全列挙する手法



回転展開法

概要

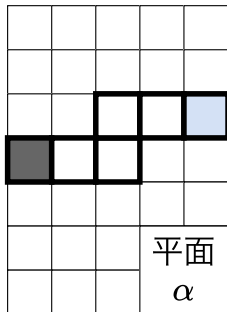
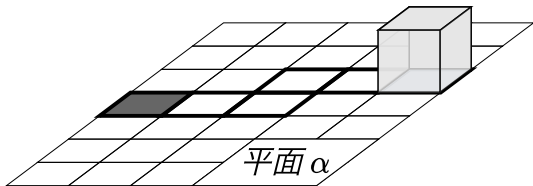
- 凸多面体をコロコロと転がすことで道を作り、任意の二面間の道を全列挙する手法



回転展開法

概要

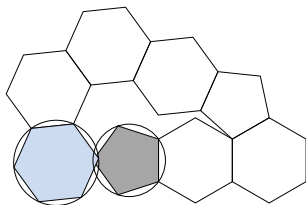
- 凸多面体をコロコロと転がすことで道を作り、任意の二面間の道を全列挙する手法



自己重複の有無の確認

確認の方法

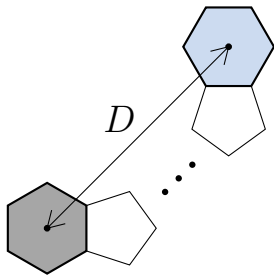
- 開始面と終端面の外接円の重複の有無を調べる.



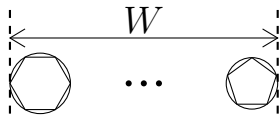
回転展開法の強み

計算の効率化

- 残っている面だけでは、どのように繋げてても自己重複が無い場合は枝刈りをする事が出来る
- $D > W$ の場合はどのように繋げてても自己重複を持たない



残っている面の
外接円の直径の総和



まとめ

定理 1

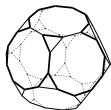
- 二十・十二面体，斜方切頂立方八面体，変形立方体には自己重複を持つ辺展開図は存在しない

| 凸多面体 | 辺展開図の数 | 自己重複を持つ 辺展開図の有無 | 自己重複を持つ 辺展開図の個数 |
|-----------|-----------------------------|--------------------|--------------------|
| 切頂四面体 | 6,000 | 無し | 0 |
| 切頂六面体 | 32,400,000 | 無し | 0 |
| 切頂八面体 | 101,154,816 | 無し | 0 |
| 切頂十二面体 | 4,982,259,375,000,000,000 | 有り | 未解決 |
| 切頂二十面体 | 375,291,866,372,898,816,000 | 有り | 未解決 |
| 立方八面体 | 331,776 | 無し | 0 |
| 二十・十二面体 | 208,971,104,256,000 | 無し [本研究] | 0 [本研究] |
| 斜方立方八面体 | 301,056,000,000 | 無し | 0 |
| 斜方切頂立方八面体 | 12,418,325,780,889,600 | 無し [本研究] | 0 [本研究] |
| 変形立方体 | 89,904,012,853,248 | 無し [本研究] | 0 [本研究] |

まとめ

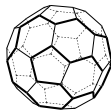
- 自己重複を持つ部分的な辺展開図はこれら以外に存在しない

(a) 切頂十二面体



[T. Horiyama et al. 2011]

(b) 切頂二十面体



[本研究]

今後の課題

- 2つの半正多面体の自己重複を持つ辺展開図の数え上げをする