

# アルキメデスの (反) 角柱の重なりを持つ辺展開図

塩田 拓海\*

斎藤 寿樹\*

## 1 はじめに

多面体の展開に関する研究は, “Underweysung der messung mit dem zirckel un richt scheyt” [3] が Albrecht Dürer によって出版されたことに起源するとされている [4]. 彼はこの本の中で, 多面体を辺に沿って切り開き, 平坦な多角形にした辺展開図を描いている. しかし, この本の中での描画は, どの辺展開図も 2 つの面が重なっていない多角形, つまり重なりを持たない辺展開図であった. この本から以下の未解決問題が得られている.

**未解決問題 1** ([4], 未解決問題 21.1). すべての凸多面体は重なりを持たないように辺展開することができるのか?

Mount や Sharir らによって凸多面体の面を切っても良いとき, いかなる凸多面体でも, 重なりを持たないよう展開できることが示された [8, 11]. しかし, 凸多面体には重なりをもつ辺展開図があるということが分かっている [9]. また, Biedl らや Grünbaum は, どのように辺展開をしても重なりを持つ凸でない多面体が存在することを示した [1, 6].

正多面体や半正多面体における重なりを持つ辺展開図の存在や, 重なりを持つ辺展開図の数え上げに関する研究がある (表 1, 2). 変形十二面体には重なりを持つ辺展開図があることが知られている [2]. 堀山と庄司は重なりを持つ辺展開図を列挙するアルゴリズムを示した. このアルゴリズムは, BDD を用いて辺展開図を列挙し, それぞれの辺展開図に重なりがあるかを数値計算により確認するというものである. その結果, 切頂十二面体, 切頂二十面体, 斜方二十・十二面体, 斜方切頂二十・十二面体について

重なりを持つ辺展開図を発見し [7], 正多面体および 5 種類の半正多面体には重なりを持つ辺展開図が存在しないことを示した [7, 13]. また, 著者らは, 回転展開という重なりを持つ部分的な辺展開図を列挙するアルゴリズムを提案した. このアルゴリズムは, 多面体の底面を切り開きながら転がすことで任意の二面間の道を列挙し, それぞれの道の両端点に位置する二面に重なりがあるかを数値計算により確認する. このアルゴリズムを用いることで, 変形立方体について重なりを持つ辺展開図を発見し, 二十・十二面体, 斜方切頂立方八面体には重なりを持つ辺展開図が存在しないことを示した [12].

角柱における重なりを持つ辺展開図の存在に関する研究もある. Schlickerrieder は, 正角柱の側面の高さを特定の値とした場合, 正 12 角柱は, 図 1 のように辺展開をすると重なりを持ち, 正 15 角柱は図 2 のように辺展開をすると重なりを持つことを示した [10]. しかし, 正角柱のうち全ての面が正多角形であるアルキメデスの角柱や, 正角柱をねじって側面の四角形を正三角形にした, アルキメデスの反角柱の辺展開図については重なりがあるかは明らかにされていない.

本研究では, アルキメデスの角柱およびアルキメデスの反角柱に関して以下に示す 2 つの定理を示す.

**定理 1.**  $3 \leq n \leq 23$  のときアルキメデスの  $n$  角柱には重なりを持つ辺展開図が存在しない.  $n \geq 24$  のときアルキメデスの  $n$  角柱には重なりを持つ辺展開図が存在する.

**定理 2.**  $3 \leq n \leq 11$  のときアルキメデスの  $n$  反角柱には重なりを持つ辺展開図が存在しない.  $n \geq 12$  のときアルキメデスの  $n$  反角柱には重なりを持つ辺展開図が存在する.

\*九州工業大学, Kyushu Institute of Technology

表 1: 正多面体の辺展開図の重なりの有無

正多面体	重なりを持つ 辺展開図が存在するか?
正四面体	無し
正六面体	無し
正八面体	無し
正十二面体	無し [7]
正二十面体	無し [7]

表 2: 半正多面体の辺展開図の重なりの有無

半正多面体	重なりを持つ 辺展開図が存在するか?
切頂四面体	無し [13]
立方八面体	無し [13]
切頂六面体	無し [13]
切頂八面体	無し [13]
斜方立方八面体	無し [13]
変形立方体	有り [12]
二十・十二面体	無し [12]
斜方切頂立方八面体	無し [12]
切頂十二面体	有り [7]
切頂二十面体	有り [7]
斜方二十・十二面体	有り [7]
変形十二面体	有り [2]
斜方切頂二十・十二面体	有り [7]

## 2 準備

$V$  を頂点の集合,  $E \subseteq V \times V$  を辺の集合とすると,  $G = (V, E)$  を **グラフ** という. 頂点列  $(v_1, \dots, v_k)$  は, 連続する 2 つの頂点がすべて隣接しているとき **パス** という. グラフの任意の 2 頂点間にパスが存在するとき, グラフは **連結** という. グラフ  $T = (V_T, E_T)$  が連結かつ  $|E_T| = |V_T| - 1$  のとき, グラフを **木** という. 木  $T = (V_T, E_T)$  は,  $V_T = V$  かつ  $E_T \subseteq E$  であるとき,  $G = (V, E)$  の **全域木** という.

**多面体** は, 少なくとも 4 つの多角形で囲まれた立体であり, それぞれの多角形のことを **面** という. 多面体のうち, 全ての 2 つの面がなす内角が  $180^\circ$  未満のものを **凸多面体** という. 合同で平行な二つの平面を底面として持つ筒状の図形を **柱体** という. 柱体の底面が多角形であるとき, 柱体は **角柱** といい, 角柱の

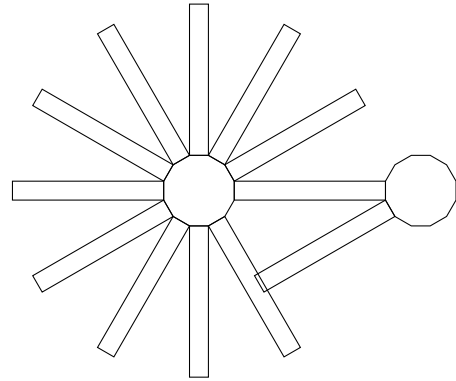


図 1: 正 12 角柱の重なりを持つ辺展開図

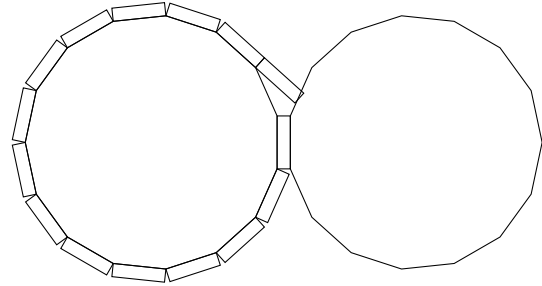


図 2: 正 15 角柱の重なりを持つ辺展開図

うち底面が正多角形であるものを **正角柱** という. 角柱をねじって側面の四角形を三角形にしたものを **反角柱** といい, 反角柱のうち底面が正多角形であるものを **正反角柱** という. 凸多面体のうち全ての面が正多角形であるものを **整凸面多面体** といい, 正角柱・正反角柱のうち整凸面多面体であるものを, それぞれ **アルキメデスの角柱**・**アルキメデスの反角柱** という.

多面体を  $P$  とするとき,  $V_P$  を  $P$  の頂点の集合,  $E_P$  は辺の集合とするならば,  $P$  はグラフ  $G_P = (V_P, E_P)$  として見る事が出来る. 多面体  $P$  の **展開図** (ネット, 一般展開図とも言う) は,  $P$  の辺や面を切り, 平坦に展開した多角形である. 多面体  $P$  の **辺展開図** は, 辺のみを切った展開図である.  $P$  の辺展開図について以下の補題がある.

**補題 1** ([4], Lemma 22.1.1 を参照). 辺展開図  $P$  の切り口は,  $G_P$  の全域木を形成する.

この補題は、 $G_P$ の全域木が $P$ の辺展開に対応することを意味する。 $P$ の2つの面が共通の辺を含んでいるならば、これらの面は隣接するという。 $P$ の双対グラフとは、多面体の面が双対グラフの頂点に対応し、対応する2つの面が隣接している場合のみ連結するグラフである。 $P$ の双対グラフの全域木もまた辺展開図と考えることもできる [10].

多面体 $P$ の辺展開図が重なりを持つかを効率的に判定するために、次の命題を用いる。

**命題 1** ([7]). 辺展開図の任意の2面について、その外接円が重ならないとき、辺展開図は重なりを持たない。

この命題は、辺展開図が重なるための必要条件である。そのため、 $P$ の2つの面の外接円が重なりを持っている場合、数値計算で2面の重なりを確認する。

$U$ を多面体 $P$ の辺展開図とする。このとき、双対グラフ $D(P)$ の $U$ に対応する全域木は $T(U)$ と表すことが出来る。 $D(P)$ の全域木を列挙し、対応する辺展開図の重なりを調べれば、重なりを持つ辺展開図をすべて見つけることができるが、一般に多面体の全域木は多すぎる。そこで考案されたのが回転展開というアルゴリズムがある [12]. このアルゴリズムは、以下の補題を用いて、全域木ではなくパスを列挙することで重なりを持つ辺展開図を探索するものである。

**補題 2** ([5, 13]).  $U_0$ を多面体 $P$ の重なりを持つ辺展開図とし、 $T(U_0)$ を双対グラフ $D(P)$ の $U_0$ に対応する全域木とする。ここで、2頂点 $v, v' \in T(U)$ に対応する面が重なりを持つ面であるとき、 $v$ から $v'$ へのパスは重なりを持つ部分的な辺展開図となる。

回転展開を実行するために、まず $P$ を平面上に置き、 $P$ の底面を開始面 $f_s$ とする。そして現在の底面を辺展開し、 $P$ を回転する。ここで、現在の底面を $f_\ell$ とし、これを終端面とする。なお、初期段階において、 $f_\ell$ は開始面である。

回転展開は、まず $f_\ell$ に隣接する面が $P$ に存在するかを確認する。その上で、隣接する面 $f$ に対して次の3ステップを実行する。

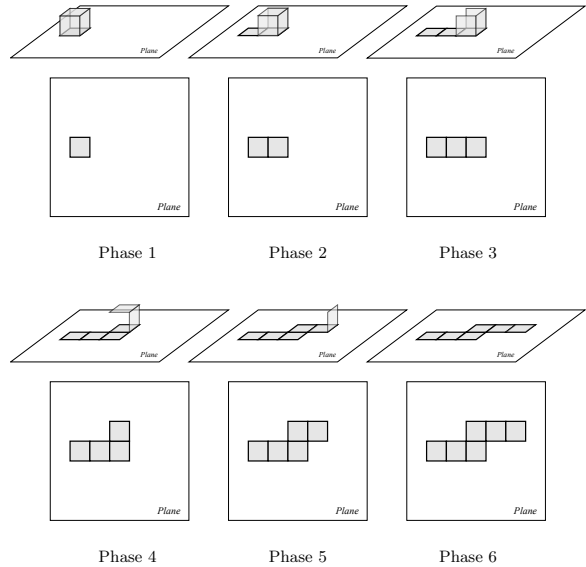


図 3: 回転展開の説明図

**ステップ 1**  $f_\ell$ の辺のうち $f$ と共通する辺を除いた辺を切断し、多面体 $P$ を転がして底面を $f$ とする

**ステップ 2**  $f_\ell$ の外心の座標と、 $f$ の外心の座標を計算する

**ステップ 3** 命題 1 および数値計算を用いて $f_s$ と $f_\ell$ の重なりを確認する

回転展開の説明図を図 3 に示す。なお、回転展開には種々の高速化の方法があるが、その詳細は [12] を参照されたい。

### 3 アルキメデスの角柱

ここでは、定理 1 を証明する。アルキメデスの $n$ 角柱を $P_R(n)$ とし、 $P_R(n)$ の上面と底面をそれぞれ $F_T, F_B$ 、上面から見て任意の側面から反時計回りに側面を $f_0, \dots, f_{n-1}$ とする。

$n \geq 3$ とし、各アルキメデスの角柱 $P_R(n)$ に対して回転展開を適用し、部分的な辺展開図を列挙すると、 $3 \leq n \leq 23$ のとき、この列挙アルゴリズム

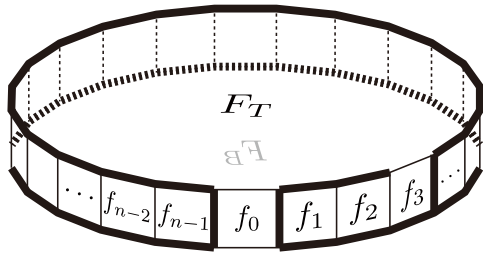


図 4:  $P_R(24)$  で重なりを持つ辺展開図の切り開き方の例

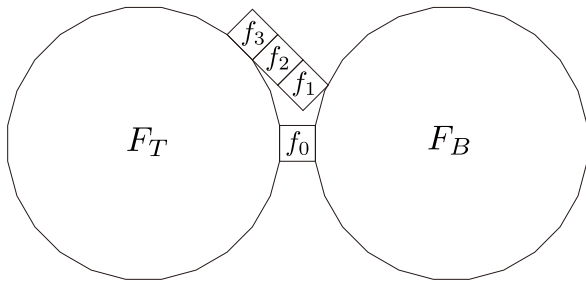


図 5: 図 4 の切り開き方で得られる  $P_R(24)$  の重なりを持つ部分的な辺展開図

は 1 つも重なりを持つ辺展開図を出力しない。このことから、 $P_R(n)$  には重なりを持つ展開図が存在しないことが言え、定理 1 の前半部分が示される。<sup>1</sup>

$n = 24$  のとき、重なりを持つ辺展開図が存在する。これは、 $P_R(n)$  を図 4 に示す太線に沿って切ることによって得られる面の集合  $\{F_B, f_0, F_T, f_3, f_2, f_1\}$  で構成される辺展開図の一部から確認できる (図 5)。  $n = 25, 26, 27, 28$  とする場合も同様に、同じ面の集合から構成される部分的な辺展開図は重なりを持つ (図 6)。そして  $n \geq 29$  とするとき、 $P_R(n)$  を図 7 に示す太線に沿って切ることによって得られる  $\{F_B, f_0, F_T, f_2, f_1\}$  から構成される部分的な辺展開図は重なりを持つ (図 8)。

**補題 3.**  $n \geq 29$  のとき、 $P_R(n)$  の面の集合  $\{F_B, f_0, F_T, f_2, f_1\}$  から構成される重なりを持つ部分的な辺展開図が存在する。

<sup>1</sup>回転展開により、重なりを持つ辺展開図が存在しないと判定した結果は、<https://shiotatakumi.github.io/MyPage/achievements.html#2022> に掲載している。

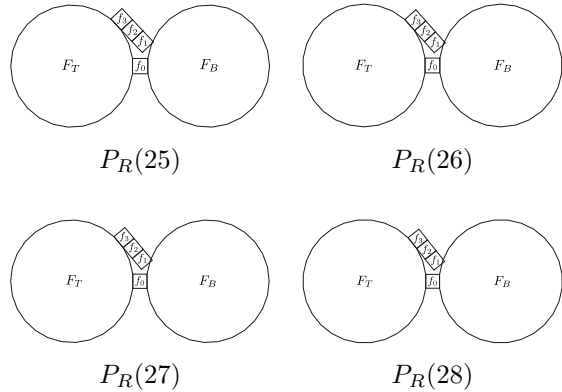


図 6: 図 4 の切り開き方で得られる  $P_R(25) \sim P_R(28)$  の重なりを持つ部分的な辺展開図

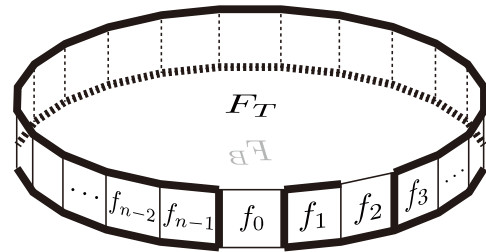


図 7:  $P_R(29)$  で重なりを持つ辺展開図の切り開き方の例

**証明.** 面の集合  $\{F_B, f_0, F_T, f_2, f_1\}$  から構成されるある辺展開図の一部を拡大したものを図 9 に示し、図 9 を更に拡大したものを図 10 に示す。面  $f_1$  の頂点のうち  $P_R(n)$  において  $f_0$  と  $F_B$  と頂点を共有していた点を原点  $O(0, 0)$ 、面  $f_1$  の頂点のうち  $P_R(n)$  において  $f_2$  と  $F_B$  と頂点を共有していた点を点  $A(0, 1)$  とする。正  $n$  角形の外角を  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ 、点  $B$  を面  $f_1$  の頂点のうち  $P_R(n)$  において  $f_2$  と  $F_T$  と頂点を共有していた点、点  $C$  を面  $f_0$  の頂点のうち  $P_R(n)$  において  $f_1$  と  $F_T$  と頂点を共有していた点、点  $D$  を面  $f_0$  の頂点のうち  $P_R(n)$  において  $f_1$  と  $F_B$  と頂点を共有していた点、点  $E$  を面  $F_B$  上の点で時計回りで点  $D$  の次に現れる点とする。また、点  $B$  から  $x$  軸への垂線 (点線) と点  $C$  から  $y$  軸への垂線の交点を点  $G$ 、点  $C$  から  $y$  軸への垂線と点  $D$  から  $x$  軸への垂線の交点を点  $H$ 、点  $D$  から  $y$  軸への垂線と  $y$  軸

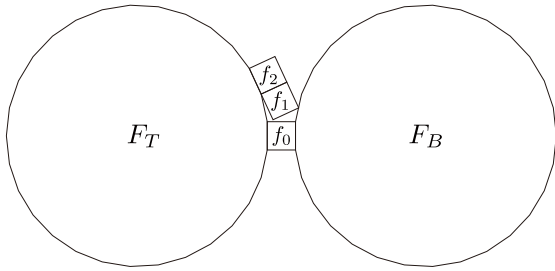


図 8: 図 7 の切り開き方で得られる  $P_R(29)$  の重なりを持つ部分的な辺展開図

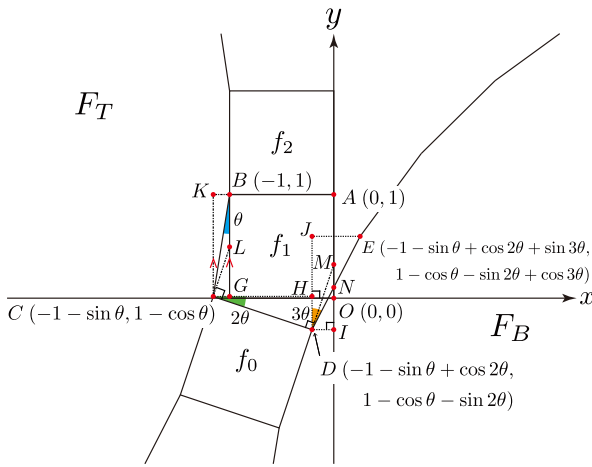


図 9:  $P_R(n)$  における重なっている箇所の拡大図

の交点を点  $I$ , 点  $D$  から  $x$  軸への垂線と点  $E$  から  $y$  軸への垂線の交点を点  $J$  とする. そして, 点  $C$  に対して  $y$  軸と平行となるように引いた正の方向への補助線 (1 点鎖線) と, 線分  $AB$  を  $B$  の方向に延長した補助線の交点を点  $K$ , 点  $C$  に対して線分  $CD$  に対して垂直となるように引いた補助線と線分  $BG$  の交点を点  $L$ , 点  $D$  に対して線分  $CD$  に対して垂直となるように引いた補助線と  $y$  軸との交点を点  $M$  とする.

各角度の計算をする.  $\angle KCB$  は,  $CK \parallel GB$  であるため  $\theta$  となる.  $\angle LCB$  は面  $F_T$  の外角であるため  $\theta$  となる.  $\angle LCG$  は  $\angle KCG$  が直角であるため  $\frac{\pi}{2} - 2\theta$  となる.  $\angle HCD$  は  $\angle LCD$  が直角であるため  $2\theta$  となる.  $\angle MDE$  は面  $F_B$  の外角であるため  $\theta$  となる.  $\angle HDC$  は  $\triangle DHC$  が直角三角形であるため  $\frac{\pi}{2} - 2\theta$

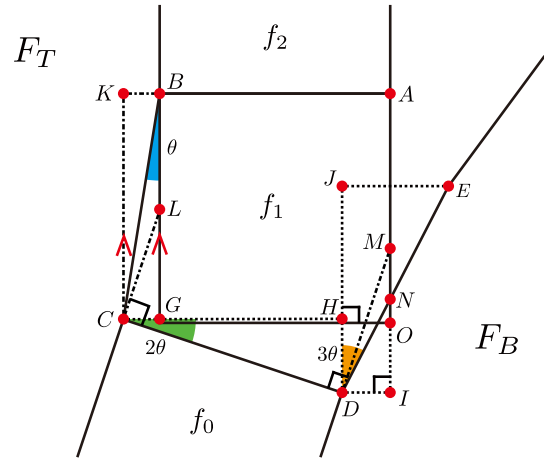


図 10: 図 9 の拡大図

となる.  $\angle MDH$  は  $\angle MDC$  が直角であるため  $2\theta$  となる.  $\angle HDE$  は  $\angle MDE$  と  $\angle MDH$  を足すことで  $3\theta$  となる. このことから, 点  $D$  と  $E$  を通る直線と  $y$  軸は交わるということが言え, この交点を点  $N$  とする.

点  $B, C, D, E$  の座標を計算する. 面  $f_1$  が一辺の長さが 1 の正方形であるため, 点  $B$  の座標は  $(-1, 1)$  となる.  $\triangle BGC$  が斜辺の長さが 1 の直角三角形であるため点  $C$  の座標は  $(-1 - \sin\theta, 1 - \cos\theta)$  となる.  $\triangle HCD$  が斜辺の長さが 1 の直角三角形であるため点  $D$  の座標は  $(-1 - \sin\theta + \cos 2\theta, 1 - \cos\theta - \sin 2\theta)$  となる.  $\triangle DJE$  が斜辺の長さが 1 の直角三角形であるため点  $E$  の座標は  $(-1 - \sin\theta + \cos 2\theta + \sin 3\theta, 1 - \cos\theta - \sin 2\theta + \cos 3\theta)$  となる.

いま,  $\theta$  の定義域  $0 < \theta \leq \frac{2\pi}{29}$  において, 以下の 3 つの条件を満たすとき, 面  $F_B$  と面  $f_1$  は重なりを持つ.

- (i) 点  $D$  が第 3 象限に存在する
- (ii) 点  $E$  の  $y$  座標が正である
- (iii) 点  $N$  の  $y$  座標が正である

(i) については, 点  $D$  の  $(x, y)$  座標をそれぞれ  $(D_x, D_y)$  とする.  $D_x$  については,  $-\sin\theta <$

$-\sin 0, \cos 2\theta < \cos 0$  であるため、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} D_x &= -1 - \sin \theta + \cos 2\theta \\ &< -1 - \sin 0 + \cos 0 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$D_y$  については、次の不等式が成り立つことを解析的に示すことで、 $D$  の  $y$  座標が負であることが言える（詳細は付録 A を参照）。

$$D_y = 1 - \cos \theta - \sin 2\theta < 0 \quad (2)$$

ゆえに、 $\theta$  の定義域において、点  $D$  は第 3 象限に存在していることが言える。

(ii) については、点  $E$  の  $y$  座標を  $E_y$  とすると、 $-\cos \theta > -\cos 0, -\sin 2\theta \geq -\sin \frac{4\pi}{29}, \cos 3\theta \geq \cos \frac{6\pi}{29}$  であるため、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} E_y &= 1 - \cos \theta - \sin 2\theta + \cos 3\theta \\ &> 1 - \cos 0 - \sin \frac{4\pi}{29} + \cos \frac{6\pi}{29} > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ゆえに、 $\theta$  の定義域において、点  $E$  の  $y$  座標は正であることが言える。

(iii) については、線分  $IO$  の長さより線分  $IN$  の長さの方が長いことを用いて示す。つまり

$$\frac{IO}{DI} < \frac{IN}{DI} \quad (4)$$

が成り立つことを解析的に示すことで、点  $N$  の  $y$  座標が正であることが言える（詳細は付録 B を参照）。

以上より (i)~(iii) の条件が  $\theta$  の定義域において成り立つため、補題 3 が示せた。□

$n$  を 24 から 28 とするとき、重なりを持つ辺展開図が存在すること（図 5, 6）および補題 3 により、任意の  $n \geq 24$  に対して  $P_R(n)$  には重なりを持つ辺展開図が存在することが言え、定理 1 の後半部分が示される。

## 4 アルキメデスの反角柱

ここでは、定理 2 を証明する。アルキメデスの  $n$  反角柱を  $P_A(n)$  とし、 $P_A(n)$  の上面と底面をそれぞれ

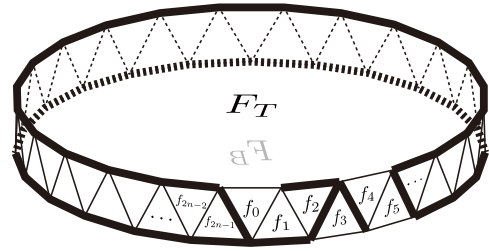


図 11:  $P_A(12)$  で重なりを持つ辺展開図の切り開き方の例

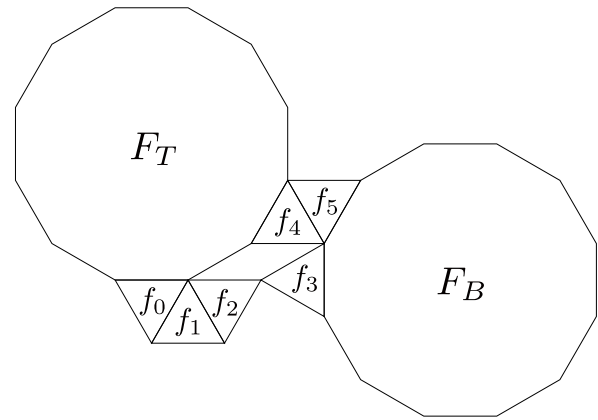


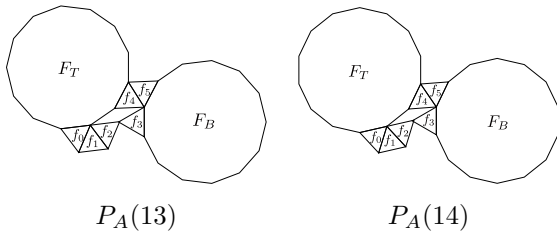
図 12: 図 11 の切り開き方で得られる  $P_R(12)$  の重なりを持つ部分的な辺展開図

れ  $F_T, F_B$ , 上面から見て任意の側面から反時計回りに側面を  $f_0, \dots, f_{2n-1}$  とおく。

$n \geq 3$  とし、各アルキメデスの反角柱  $P_A(n)$  に対して回転展開を適用し、部分的な辺展開図を列挙する。すると、 $3 \leq n \leq 11$  のとき、この列挙アルゴリズムは 1 つも重なりを持つ辺展開図を出力しない。このことから、 $P_A(n)$  には重なりを持つ展開図が存在しないことが言え、定理 2 の前半部分が示される。<sup>1</sup>

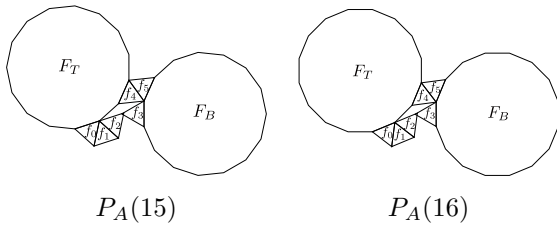
$n = 12$  のとき、重なりを持つ（面  $f_2$  の頂点と面  $f_3$  の頂点が接している）辺展開図が存在する。これは、 $P_A(n)$  を図 11 に示す太線に沿って切ることで得られる面の集合  $\{f_3, F_B, f_5, f_4, F_T, f_0, f_1, f_2\}$  で構成される辺展開図の一部から確認できる（図 12）。

$n = 13, 14, 15, 16$  とした場合も同様に、同じ面の



$P_A(13)$

$P_A(14)$



$P_A(15)$

$P_A(16)$

図 13: 図 11 の切り開き方で得られる  $P_A(13) \sim P_A(16)$  の重なりを持つ部分的な辺展開図

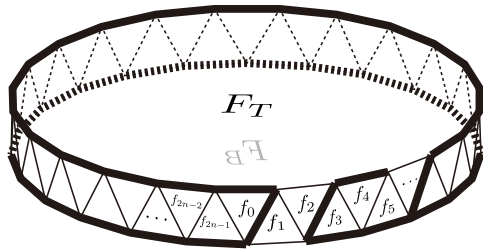
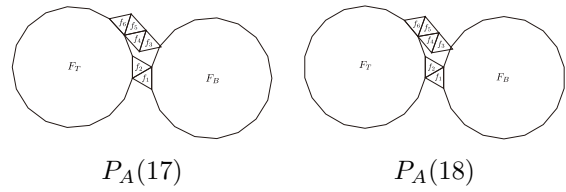


図 14:  $P_A(17)$  で重なりを持つ辺展開図の切り開き方の例

集合から構成される部分的な辺展開図は重なりを持つ (図 13). また  $n = 17, 18$  とするとき,  $P_A(n)$  を図 14 に示す太線に沿って切ることによって得られる面の集合  $\{F_T, f_0, f_1, F_B, f_5, f_4, f_3, f_2\}$  から構成される部分的な辺展開図は重なりを持つ (図 15).  $n \geq 19$  とするとき,  $P_A(n)$  を図 16 に示す太線に沿って切ることによって得られる面の集合  $\{F_B, f_1, f_2, F_T, f_4, f_3\}$  から構成される部分的な辺展開図は重なりを持つ (図 8).

**補題 4.**  $n \geq 19$  のとき,  $P_A(n)$  の面の集合  $\{F_B, f_1, f_2, F_T, f_4, f_3\}$  で構成される重なりを持つ部分的な辺展開図が存在する.

**証明.** 面の集合  $\{F_B, f_1, f_2, F_T, f_4, f_3\}$  から構成され



$P_A(17)$

$P_A(18)$

図 15: 図 14 の切り開き方で得られる  $P_A(17), P_A(18)$  の重なりを持つ部分的な辺展開図

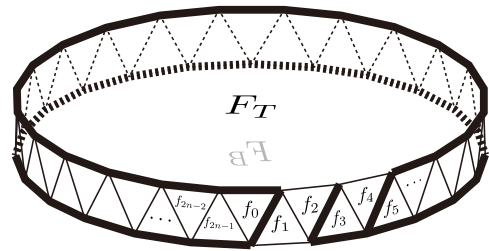


図 16:  $P_A(19)$  で重なりを持つ辺展開図の切り開き方の例

るある辺展開図の一部を拡大したものを図 18 に示す. 面  $f_3$  の頂点のうち面  $f_4$  と頂点を共有しない点を原点  $O(0, 0)$ , 面  $f_2$  の頂点のうち面  $f_1$  と頂点を共有しない点を点  $A(-1, 0)$  とし, 正  $n$  角形の外角を  $\theta = \frac{2\pi}{n}$ , 点  $B$  を面  $f_2$  の頂点うち  $P_A(n)$  において面  $F_B$  と頂点を共有していた点, 点  $C$  を面  $F_B$  上で時計回りで点  $B$  の次に現れる点とする. また, 点  $B$  から  $x$  軸への垂線 (点線) と  $x$  軸との交点を点  $D$ , 点  $C$  から  $y$  軸への垂線と点  $B$  から  $x$  軸への垂線の交点を点  $E$  とする. そして, 点  $G$  を面  $F_T$  上で反対

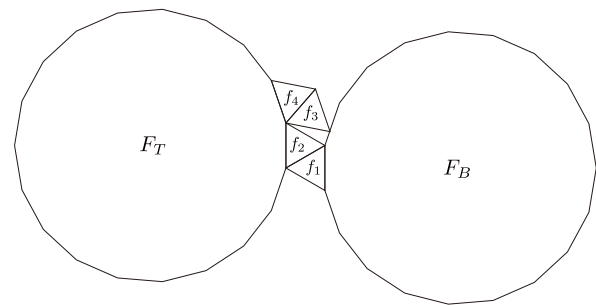
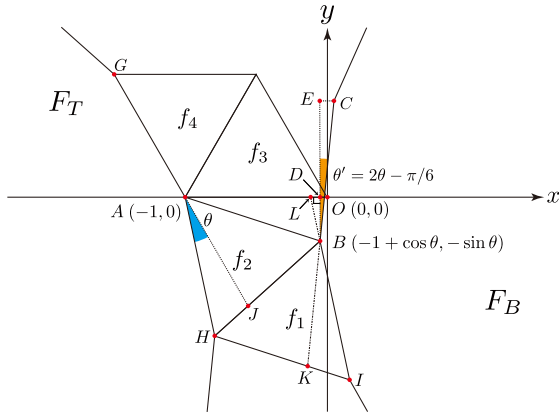
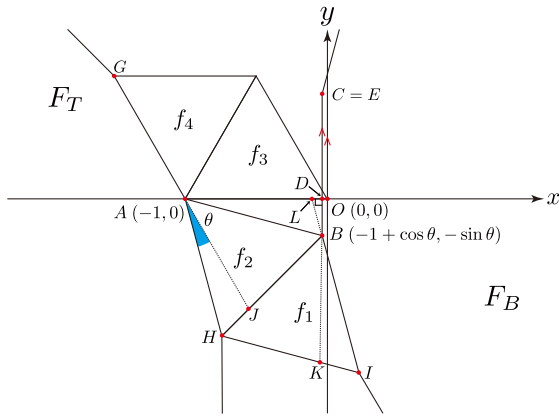


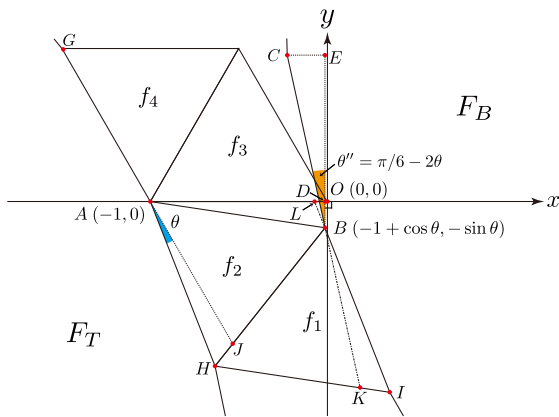
図 17: 図 16 の切り開き方で得られる  $P_R(19)$  の重なりを持つ部分的な辺展開図



(a)  $19 \leq n \leq 23$  の場合



(b)  $n = 24$  の場合



(c)  $n \geq 25$  の場合

計回りで点  $A$  の次に現れる点, 点  $H$  を面  $F_T$  上で時計回りで点  $A$  の次に現れる点, 点  $I$  を面  $F_B$  上で反時計回りで点  $B$  の次に現れる点とする. さらに, 線分  $GA$  を点  $A$  の方向に延ばした補助線 (1 点鎖線) と線分  $BH$  との交点を点  $J$ , 線分  $CB$  を点  $B$  の方向に延ばした補助線と線分  $HI$  との交点を点  $K$ , 線分  $IB$  を点  $B$  の方向に延ばした補助線と  $x$  軸との交点を点  $L$  とする.

各角度の計算をする.  $\angle JAB$  は  $\angle HAB$  が  $\frac{\pi}{3}$  であるため,  $\frac{\pi}{3} - \theta$  となる.  $\angle DAB$  は  $\angle JAD$  が  $\frac{\pi}{3}$  であるため,  $\theta$  となる.  $\angle DBA$  は  $\triangle BDA$  が直角三角形であるため,  $\frac{\pi}{2} - \theta$  となる.  $\angle KBI$  および  $\angle LBC$  は面  $F_B$  の外角であるため  $\theta$  となる.  $\angle HBK$  は  $\angle HBI$  が  $\frac{\pi}{3}$  であるため,  $\frac{\pi}{3} - \theta$  となる.

点  $B$  の座標を計算する. 点  $B$  は,  $\triangle ADB$  が斜辺の長さが 1 の直角三角形であるため  $(-1 + \cos \theta, -\sin \theta)$  となる.

$\angle DBC$  および, 点  $C$  の座標は  $n$  によって 3 つの場合分けが生じる.  $19 \leq n \leq 23$  の場合 (図 18 (a))  $\angle DBC$  は  $\angle KBC = \pi$  から  $\angle HBK, \angle ABH, \angle DBA$  を引くことで,  $\angle DBC = 2\theta - \frac{\pi}{6}$  となる (これを  $\theta'$  とする). 点  $C$  の座標は,  $\triangle CEB$  が斜辺の長さが 1 の直角三角形であるため  $(-1 + \cos \theta + \sin \theta', -\sin \theta + \cos \theta')$  となる.  $n = 24$  の場合 (図 18 (b))  $\angle DBC = 2 \cdot \frac{2\pi}{24} - \frac{\pi}{6} = 0$  となる. 点  $C$  の座標は, 線分  $CB$  は長さが 1 の  $y$  軸と平行な直線であるため  $(-1 + \cos \theta, -\sin \theta + 1)$  となる.  $n \geq 25$  の場合 (図 18 (c))  $\angle ABC$  は  $\angle ABL$  が  $\frac{\pi}{3}$  であり,  $\angle ABL$  と  $\angle LBD$  を足すことで  $\frac{\pi}{3} + \theta$  となる.  $\angle DBC$  は,  $\angle DBA$  から  $\angle ABC$  を引くことで  $\angle DBC = \frac{\pi}{6} - 2\theta$  となる (これを  $\theta''$  とする).  $\triangle CEB$  が斜辺の長さが 1 の直角三角形であるため  $(-1 + \cos \theta - \sin \theta'', -\sin \theta + \cos \theta'')$  となる.

いま,  $\theta$  の定義域  $0 < \theta \leq \frac{2\pi}{24}$  において, 以下の 3 つの条件を満たすとき, 面  $F_B$  と面  $f_3$  は重なりを持つ.

(i) 点  $B$  が第 3 象限に存在する

(ii) 点  $C$  の  $y$  座標が正

図 18:  $P_A(n)$  における重なっている箇所拡大図



$$(iii) \begin{cases} \angle DBC < \angle DBO & (19 \leq n \leq 23) \\ \text{点 } C \text{ の } x \text{ 座標が負である} & (n \geq 24) \end{cases}$$

(i) については、点  $B$  の  $(x, y)$  座標をそれぞれ  $(B_x, B_y)$  とすると、 $\cos \theta < \cos 0$ 、 $-\sin \theta < -\sin 0$  であるため、次の不等式が成り立つ。

$$B_x = -1 + \cos \theta < -1 + \cos 0 = 0 \quad (5)$$

$$B_y = -\sin \theta < -\sin 0 = 0 \quad (6)$$

ゆえに、 $\theta$  の定義域において、点  $B$  は第3象限に存在していることが言える。

(ii) については、点  $C$  の  $y$  座標を  $C_y$  として3つの場合を考える。  $19 \leq n \leq 23$  (図 18 (a)) の場合、 $-\sin \theta \geq -\sin \frac{2\pi}{19}$ 、 $\cos 2\theta \geq \cos \frac{4\pi}{19}$ 、 $\sin 2\theta \geq \sin \frac{4\pi}{23}$  であるため、 $C_y$  について以下の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} C_y &= -\sin \theta + \cos \left( 2\theta - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= -\sin \theta + \cos 2\theta \cos \frac{\pi}{6} + \sin 2\theta \sin \frac{\pi}{6} \quad (7) \\ &\geq -\sin \frac{2\pi}{19} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{4\pi}{19} + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{23} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに  $C$  の  $y$  座標が正であることが言える。  $n = 24$  (図 18 (b)) の場合、 $C_y = -\frac{2\pi}{24} + 1 > 0$  である。ゆえに  $C$  の  $y$  座標が正であることが言える。  $n \geq 25$  (図 18 (c)) の場合、 $-\sin \theta \geq -\sin \frac{2\pi}{25}$ 、 $\cos 2\theta \geq \cos \frac{4\pi}{25}$ 、 $\sin 2\theta > \sin 0$  であるため、 $C_y$  について以下の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} C_y &= -\sin \theta + \cos \left( \frac{\pi}{6} - 2\theta \right) \\ &= -\sin \theta + \cos \frac{\pi}{6} \cos 2\theta + \sin \frac{\pi}{6} \sin 2\theta \quad (8) \\ &> -\sin \frac{2\pi}{25} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{4\pi}{25} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに  $C$  の  $y$  座標が正であることが言える。

(iii) については、2つの場合を考える。  $19 \leq n \leq 23$  (図 18 (a)) の場合、 $\triangle OAB$  が二等辺三角形であるため、 $\angle OBA = \frac{\pi - \theta}{2}$  となり、 $\angle OBA$  から  $\angle DBA$  を引くことで、 $\angle DBO = \frac{\theta}{2}$  となる。ここで  $\angle DBO < \angle DBC$  を解くと、 $n > 8$  と求まる。ゆえに、 $\angle DBO$  より  $\angle DBC$  の方が大きいことが言える。  $n \geq 24$

(図 18 (b),(c)) の場合、点  $C$  の  $x$  座標を  $C_x$  とすると、 $\cos \theta < \cos 0$ 、 $-\cos 2\theta \leq -\cos \frac{4\pi}{24}$ 、 $-\sin 2\theta < -\sin 0$  であるため、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} C_x &= -1 + \cos \theta - \sin \left( \frac{\pi}{6} - 2\theta \right) \\ &= -1 + \cos \theta - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2\theta - \cos \frac{\pi}{6} \sin 2\theta \quad (9) \\ &< -1 + 1 - \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{24} < 0 \end{aligned}$$

ゆえに、 $C$  の  $x$  座標が負であることが言える。

以上より (i)~(iii) の条件が  $\theta$  の定義域において成り立つため、補題 4 が示せた。  $\square$

$12 \leq n \leq 18$  とするとき、重なりを持つ辺展開図が存在すること (図 12, 13, 15) および補題 4 により、任意の  $n \geq 12$  に対して  $P_A(n)$  には重なりを持つ辺展開図が存在することが言え、定理 2 の後半部分が示される。

## 参考文献

- [1] Therese C. Biedl, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Anna Lubiw, Mark H. Overmars, Joseph O'Rourke, Steve Robbins, and Sue Whitesides. *Unfolding some classes of orthogonal polyhedra*. In *Proceedings of the 10th Canadian Conference on Computational Geometry, McGill University, Montréal, Québec, Canada, August 10-12, 1998*, 1998.
- [2] Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, and Richard K. Guy. *Unsolved Problems in Geometry*. Springer-Verlag, reissue edition, 1991.
- [3] Albrecht Dürer. *Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in linien ebenen unnd gantzen corporen*, 1525.
- [4] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.

- [5] Kristin DeSplinter, Satyan L. Devadoss, Jordan Readyhough, and Bryce Wimberly. Nets of higher-dimensional cubes. In J. Mark Keil and Debajyoti Mondal, editors, *Proceedings of the 32nd Canadian Conference on Computational Geometry, CCCG 2020, August 5-7, 2020, University of Saskatchewan, Saskatoon, Saskatchewan, Canada*, pp. 114–120, 2020.
- [6] Branko Grünbaum. Are your polyhedra the same as my polyhedra? In Boris Aronov, Saugata Basu, János Pach, and Micha Sharir, editors, *Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift*. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [7] Takashi Horiyama and Wataru Shoji. Edge unfoldings of platonic solids never overlap. In *Proceedings of the 23rd Annual Canadian Conference on Computational Geometry, Toronto, Ontario, Canada, August 10-12, 2011*, 2011.
- [8] Dave Mount. On finding shortest paths on convex polyhedra. Technical report, CENTER FOR AUTOMATION RESEARCH, UNIVERSITY OF MARYLAND COLLEGE PARK, 1985.
- [9] Makoto Namiki and Komei Fukuda. Unfolding 3-dimensional convex polytopes. *A package for Mathematica 1.2 or 2.0. Mathematica Notebook*, 1993.
- [10] Wolfram Schlickerieder. *Nets of Polyhedra*. PhD thesis, Berlin: Technische Universität Berlin, 1997.
- [11] Micha Sharir and Amir Schorr. On shortest paths in polyhedral spaces. *SIAM J. Comput.*, Vol. 15, No. 1, pp. 193–215, 1986.
- [12] 塩田 拓海, 斎藤 寿樹. 回転展開法を用いた自己重複を持つ部分的な辺展開図の数え上げ. 2021年度夏のLA シンポジウム, pp. 3.1–3.8, 2021.
- [13] 廣瀬 健汰. 半正多面体の展開図の重なりについて. 埼玉大学工学部情報システム工学科, 2015. 卒業論文, 参考: 指導教員 堀山 貴史.

## 付録 A 式 (2) の証明

証明.  $D_y(\theta) = 1 - \cos \theta - \sin 2\theta$  を微分すると,  $D'_y(\theta) = -2 \cos 2\theta + \sin \theta = 4 \left( \sin \theta + \frac{1}{8} \right)^2 - \frac{33}{16}$  となる. 極値における  $\theta$  を求めるため  $D'_y(\theta) = 0$  を解くと,

$$\theta = \arcsin \left( \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8} \right) + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (10)$$

となる. いま,  $\theta$  の定義域  $(0 < \theta \leq \frac{2\pi}{29})$  は,  $\arcsin \left( \frac{-1-\sqrt{33}}{8} \right)$  と  $\arcsin \left( \frac{-1+\sqrt{33}}{8} \right)$  の間に含まれている. また,  $\arcsin \left( \frac{-1-\sqrt{33}}{8} \right) < 0 < \arcsin \left( \frac{-1+\sqrt{33}}{8} \right)$  という関係が成り立っており,  $D'_y(0) = -2$  であることから, 定義域において  $D_y(\theta)$  は単調減少関数であることが言える. つまり,  $D_y(0) = 0$  であることを踏まえると  $D_y(\theta) < 0$  であることが言える. よって式 (2) が示せた.  $\square$

## 付録 B 式 (4) の証明

証明.  $\frac{IO}{DI}$  および  $\frac{IN}{DI}$  は, それぞれ次のように書くことができる.

$$\frac{IO}{DI} = \frac{-1 + \cos \theta + \sin 2\theta}{1 + \sin \theta - \cos 2\theta}, \quad \frac{IN}{DI} = \frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta} \quad (11)$$

本証明では,  $\frac{IO}{DI} < \frac{IN}{DI}$  であることを示せばよいので

$$\frac{-1 + \cos \theta + \sin 2\theta}{1 + \sin \theta - \cos 2\theta} < \frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta} \quad (12)$$

となることを示す. いま,  $\theta$  の定義域は  $0 < \theta \leq \frac{2\pi}{29}$  であるため,  $1 + \sin \theta - \cos 2\theta > 0$  かつ  $\sin 3\theta > 0$  となる. そこで両辺に  $(1 + \sin \theta - \cos 2\theta) \sin 3\theta$  をかけ展開すると次の式が得られる.

$$-\sin 3\theta + \sin 3\theta \cos \theta + \sin 3\theta \sin 2\theta - \cos 3\theta - \cos 3\theta \sin \theta + \cos 3\theta \cos 2\theta < 0 \quad (13)$$

ここで, 左辺を  $f(\theta) = -\sin 3\theta - \cos 3\theta + \sin 2\theta + \cos \theta$  とし,  $f(\theta) < 0$  を示すために導関数を考える.

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -3 \cos 3\theta + 3 \sin 3\theta + 2 \cos 2\theta - \sin \theta \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(6 \sin 2\theta + 2 \cos \theta - 2 \sin \theta - 3) - \sin \theta \end{aligned} \quad (14)$$

$f'(\theta) = g(\theta) - \sin \theta$  とし,  $g(\theta)$  の導関数を考えると

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 12 \cos 2\theta - 2 \sin \theta - 2 \cos \theta \\ &= 2(\sin \theta + \cos \theta)(6 \sin(\theta + 3\pi/4) - 1) > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

となる. よって  $g(\theta)$  は単調増加関数である.  $g(0) < 0$  かつ  $g(\frac{2\pi}{29}) > 0$  より  $g(\theta)$  は負から正に遷移する. より詳しく見ると  $n = 62$  と  $n = 61$  の間で負から正に遷移する. よって  $n \geq 62$  の場合,  $f(\theta)$  は単調減少関数かつ  $f(0) = 0$  であるため,  $f(\theta) < 0$  である. ゆえに,  $\frac{IO}{DI} < \frac{IN}{DI}$  であることが言える. 一方で  $29 \leq n \leq 61$  の場合,  $g(\theta)$  が正であるため,  $f(\theta)$  の概形が分からない. そこで,  $29 \leq n \leq 61$  において  $\frac{IO}{DI}$  と  $\frac{IN}{DI}$  を数値計算することで,  $\frac{IO}{DI} < \frac{IN}{DI}$  であることが言える. よって式 (4) が示せた.  $\square$