アルキメデスの (反) 角柱の重なりを持つ辺展開図

◎ 塩田 拓海　　斎藤 寿樹

九州工業大学

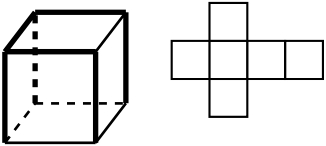
February 01, 2022

辺展開図

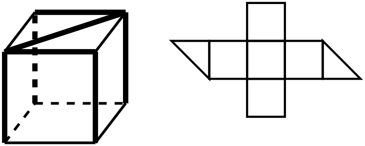
[上原, 2018, 定義 1.0.1]

凸多面体の辺に切れ込みを入れて平坦に開いた多角形を辺展開図という

(a) の切り方は辺展開図であるが (b) は辺展開図ではない



(a)



(b)

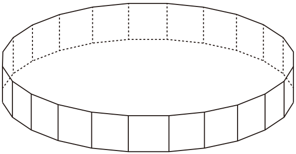
アルキメデスの n (反) 角柱

アルキメデスの n 角柱

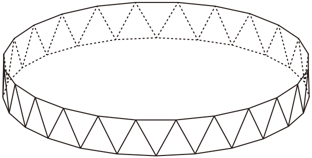
1. 上下の底面が正 n 角形のもの
2. 側面が全て正方形であるもの

アルキメデスの n 反角柱

1. 上下の底面が正 n 角形のもの
2. 側面が全て正三角形であるもの



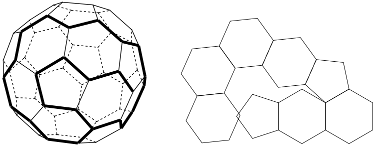
アルキメデスの角柱



アルキメデスの反角柱

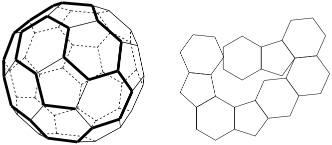
凸多面体における重なりを持つ辺展開図

いくつかの凸多面体には，重なりを持つ辺展開図が存在する



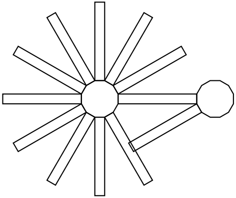
切頂 20 面体

[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



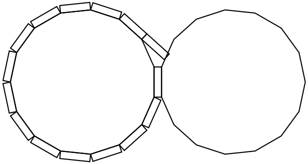
切頂 20 面体

[T. Shiota and T. Saitoh, 2021]



正 12 角柱

[Schlickenrieder, 1997]



正 15 角柱

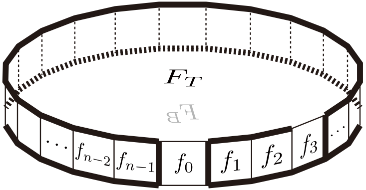
[Schlickenrieder, 1997]

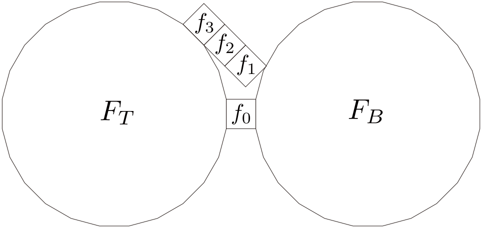
研究成果

定理 1（アルキメデスの角柱）

1. $3 \leq n \leq 23$ のときアルキメデスの n 角柱には重なりを持つ辺展開図が存在しない．
2. $n \geq 24$ のときアルキメデスの n 角柱には重なりを持つ辺展開図が存在する．

アルキメデスの 24 角柱の辺展開図の一部



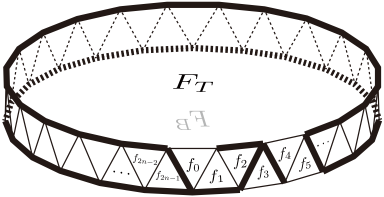


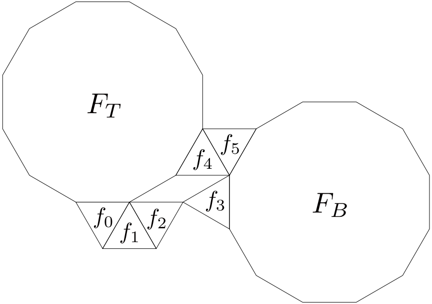
研究成果

定理 2（アルキメデスの反角柱）

1. $3 \le n \le 11$ のときアルキメデスの n 反角柱には重なりを持つ辺展開図が存在しない．
2. $n \ge 12$ のときアルキメデスの n 反角柱には重なりを持つ辺展開図が存在する．

アルキメデスの 12 反角柱の辺展開図の一部





本研究の位置付け

アルキメデスの (反) 角柱は整凸面多面体に分類される．

整凸面多面体	重なりを持つ辺展開図の有無
正多面体 (全 5 種類)	無し [T. Horiyama et al. 2011]
半正多面体 (全 13 種類)	7 種類に無し・6 種類に有り [T. Horiyama et al. 2011, T. Shiota et al. 2021]
アルキメデスの n 角柱 (無限個)	$3 \leq n \leq 23$ のとき存在しない $n \geq 24$ のとき存在する
アルキメデスの n 反角柱 (無限個)	$3 \leq n \leq 11$ のとき存在しない $n \geq 12$ のとき存在する
ジョンソンの立体 (全 92 種類)	未解決

定理 1 の証明

定理 1（アルキメデスの角柱）

1. $3 \leq n \leq 23$ のときアルキメデスの n 角柱には重なりを持つ辺展開図が存在しない．
2. $n \geq 24$ のときアルキメデスの n 角柱には重なりを持つ辺展開図が存在する．

【証明】

アルキメデスの n 角柱（$3 \leq n \leq 23$）に対して回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2021] という列挙アルゴリズムを適用すると，重なりを持つ辺展開図を 1 つも出力しない [1]．

詳細はこちら

[1] https://shiotatakumi.github.io/MyPage/achievements.html#2022

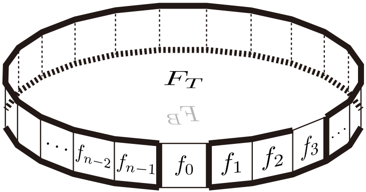
定理 1 の証明

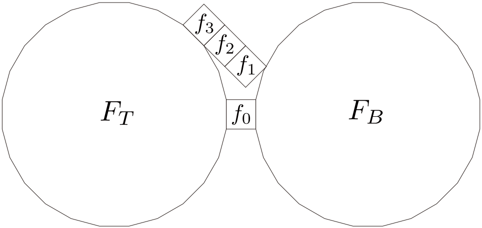
【証明のつづき（2）】

$n = 24$ のとき，重なりを持つ辺展開図が存在する．

アルキメデスの角柱を左下の図の太線に沿って切ることで得られる面の集合 $\{F_B, f_0, F_T, f_3, f_2, f_1\}$ で構成される辺展開図の一部から確認できる．

アルキメデスの 24 角柱の辺展開図の一部（再掲）



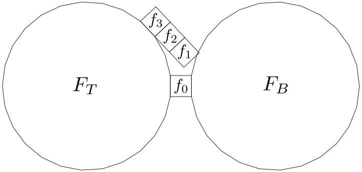


定理 1 の証明

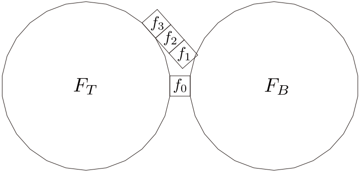
【証明のつづき（3）】

$n = 25 \sim 28$ とする場合も，同様に重なりを持つ辺展開図が存在する．

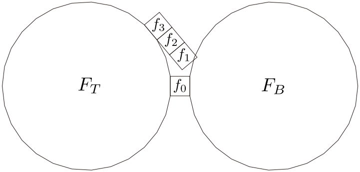
アルキメデスの 25 ~ 28 角柱の辺展開図の一部



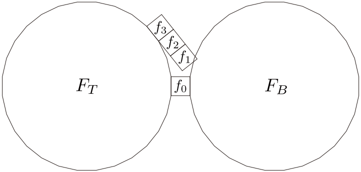
アルキメデスの 25 角柱



アルキメデスの 26 角柱



アルキメデスの 27 角柱



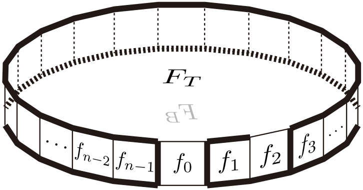
アルキメデスの 28 角柱

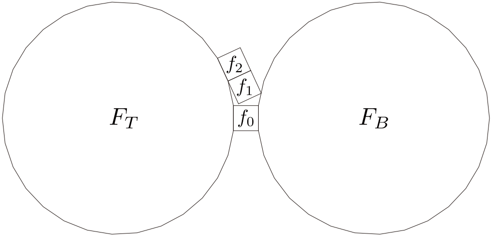
定理 1 の証明

【証明のつづき（4）】

$n = 29$ のとき $\{F_B, f_0, F_T, f_2, f_1\}$ で構成される辺展開図の一部から重なりを持つ辺展開図が存在することが確認できる．

アルキメデスの 29 角柱の辺展開図の一部





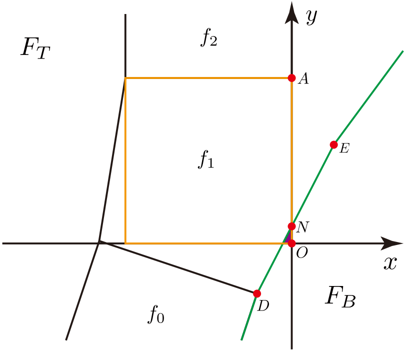
補題 1

$n \geq 29$ のとき，アルキメデスの n 角柱の面の集合 $\{F_B, f_0, F_T, f_2, f_1\}$ から構成される重なりを持つ部分的な辺展開図が存在する．

定理 1 の証明

【証明のつづき（5）】

$\{F_B, f_0, F_T, f_2, f_1\}$ から構成される辺展開図の一部を拡大した図



点 O を原点 $(0,0)$
点 A の座標を $(0,1)$

重なりを持つための十分条件

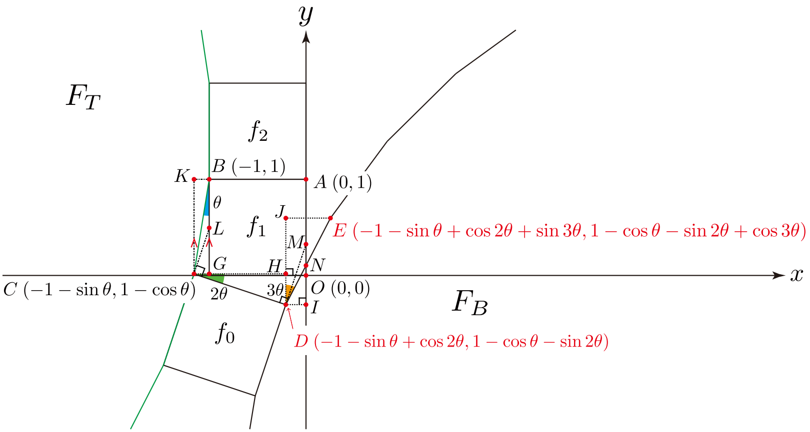
1. 点 D が第 3 象限に存在する
2. 点 E の y 座標が正である
3. 点 N の y 座標が正である

定理 1 の証明

【証明のつづき（6）】

各辺の長さを 1，正 n 角形の外角を $\theta = 2\pi/n$ とする

n の定義域：$n \geq 29 \Rightarrow$ θ の定義域：$0 < n \leq 2\pi/29$



定理 1 の証明

【証明のつづき (7)】

重なりを持つための十分条件

1. 点 D が第 3 象限に存在する

点 D の座標は $(-1-\sin\theta+\cos 2\theta, 1-\cos\theta-\sin 2\theta)$ である．

点 D の (x,y) 座標をそれぞれ (D_x, D_y) とし，$D_x < 0,\ D_y < 0$ を示す．

$\boxed{D_x \text{ について}}$

定義域（$0 < \theta \leq \frac{2\pi}{29}$）において，$-\sin\theta < -\sin 0,\ \cos 2\theta < \cos 0$ であることが言える．
$D_x = -1-\sin\theta+\cos 2\theta < -1-\sin 0+\cos 0 = 0$ が成り立つため $D_x < 0$ と言える．

$\boxed{D_y \text{ について}}$

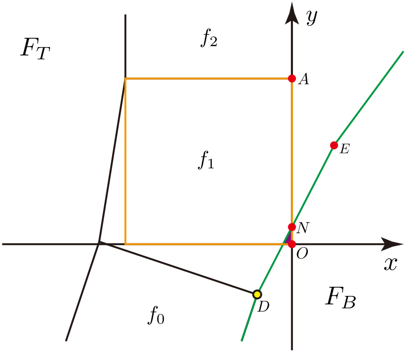
$D_y = 1-\cos\theta-\sin 2\theta$ を微分すると，$D_y' = -2\cos 2\theta + \sin\theta = 4\left(\sin\theta+\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{33}{16}$ となる．

極値における θ を求めるため $D_y' = 0$ を解くと，$\theta = \arcsin\left(\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}\right) + 2n\pi\ (n \in \mathbb{N})$ となる．

θ の定義域（$0 < \theta \leq \frac{2\pi}{29}$）は，$\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{8}\right)$ と $\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)$ の間に含まれている．

$\arcsin\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{8}\right) < 0 < \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{8}\right)$ という関係が成り立っており θ に 0 を代入すると

$D_y' = -2$ であることから，定義域において D_y は単調減少関数であることが言える．
D_y に $\theta = 0$ を代入すると 0 となるため，$D_y < 0$ と言える．



定理 1 の証明

【証明のつづき（8）】

重なりを持つための十分条件

2. 点 E の y 座標が正である

点 E の座標は $(-1-\sin\theta+\cos 2\theta+\sin 3\theta, 1-\cos\theta-\sin 2\theta+\cos 3\theta)$ である．

点 E の y 座標を E_y とし，$E_y > 0$ を示す．

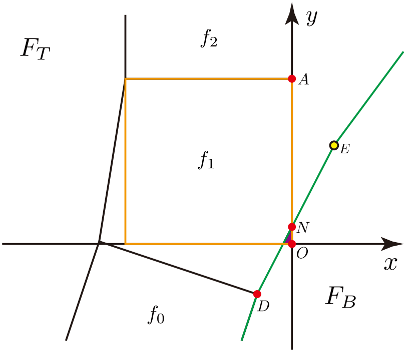
定義域（$0 < \theta \leq \frac{2\pi}{29}$）において，

$$-\cos\theta > -\cos 0, \quad -\sin 2\theta \geq -\sin\frac{4\pi}{29}, \quad \cos 3\theta \geq \cos\frac{6\pi}{29}$$

であることが言える．

$$E_y = 1-\cos\theta-\sin 2\theta+\cos 3\theta > 1-\cos 0-\sin\frac{4\pi}{29}+\cos\frac{6\pi}{29} > 0$$

が成り立つため $E_y > 0$ と言える．



定理 1 の証明

【証明のつづき（9）】

重なりを持つための十分条件

3. 点 N の y 座標が正である

線分 IO の長さより線分 IN の長さの方が長いことを用いて示す．

$\frac{IO}{DI}$ と $\frac{IN}{DI}$ は次のように表すことが出来る．

$$\frac{IO}{DI} = \frac{-1+\cos\theta+\sin 2\theta}{1+\sin\theta-\cos 2\theta},\quad \frac{IN}{DI} = \frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}$$

$\frac{IO}{DI} < \frac{IN}{DI}$ であることを示せばよいので $\frac{-1+\cos\theta+\sin 2\theta}{1+\sin\theta-\cos 2\theta} < \frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}$ となることを示す．

θ の定義域は $0 < \theta \leq \frac{2\pi}{29}$ であるため，$1+\sin\theta-\cos 2\theta > 0$ かつ $\sin 3\theta > 0$ となる．

両辺に $(1+\sin\theta-\cos 2\theta)\sin 3\theta$ をかけ展開すると次の式が得られる．

$$-\sin 3\theta + \sin 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin 2\theta - \cos 3\theta - \cos 3\theta\sin\theta + \cos 3\theta\cos 2\theta < 0$$

左辺を $f(\theta) = -\sin 3\theta - \cos 3\theta + \sin 2\theta + \cos\theta$ とする．

$f(\theta) < 0$ を示すために導関数を考えると次のようになる．

$$f'(\theta) = (\sin\theta+\cos\theta)(6\sin 2\theta + 2\cos\theta - 2\sin\theta - 3) - \sin\theta$$

$f'(\theta) = g(\theta) - \sin\theta$ とし，$g(\theta)$ の導関数を考えると次のようになる．

$$g'(\theta) = 2(\sin\theta+\cos\theta)\,(6\sin(\theta+3\pi/4)-1) > 0$$

よって $g(\theta)$ は単調増加関数である．

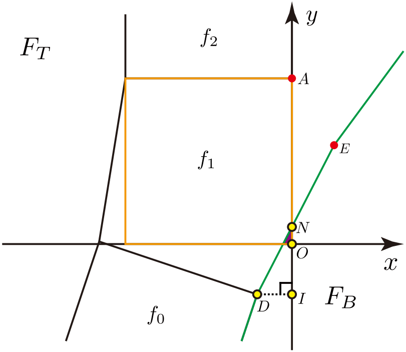
$g(\theta)$ は $g(0) < 0$ かつ $g\left(\frac{2\pi}{29}\right) > 0$ であるので，負から正に遷移する関数である．

より詳しく見ると $n = 62$ と $n = 61$ の間で負から正に遷移することが分かる．

$n \geq 62$ の場合，$f(\theta)$ は単調減少関数かつ $f(0) = 0$ より，$f(\theta) < 0$ であるので，$\frac{IO}{DI} < \frac{IN}{DI}$ である．

$29 \leq n \leq 61$ の場合，数値計算をすることで，$\frac{IO}{DI} < \frac{IN}{DI}$ であることが言える．

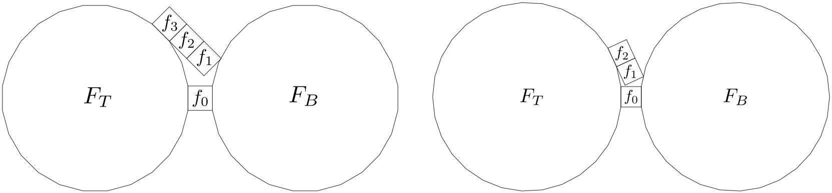
ゆえに，点 N の y 座標が正であることが言える．



定理 1 の証明

【証明のつづき（１１）】

1. n が $24 \sim 28$ の場合は図によって示された．
2. 補題 1 が示された．$\Rightarrow$ $n \geq 29$ の場合で示された．



$24 \leq n \leq 28$ の時　　$n \geq 29$ の時

$n \geq 24$ のとき，アルキメデスの n 角柱には重なりを持つ辺展開図が存在することが言える． □

定理 2 の証明

定理 2（アルキメデスの反角柱）

1. $3 \le n \le 11$ のときアルキメデスの n 反角柱には重なりを持つ辺展開図が存在しない．
2. $n \ge 12$ のときアルキメデスの n 反角柱には重なりを持つ辺展開図が存在する．

【証明】
アルキメデスの n 反角柱（$3 \le n \le 11$）に対して回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2021] という列挙アルゴリズムを適用すると，重なりを持つ辺展開図を 1 つも出力しない [1]．

詳細はこちら

[1] https://shiotatakumi.github.io/MyPage/achievements.html#2022

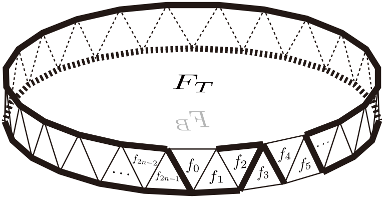
定理 2 の証明

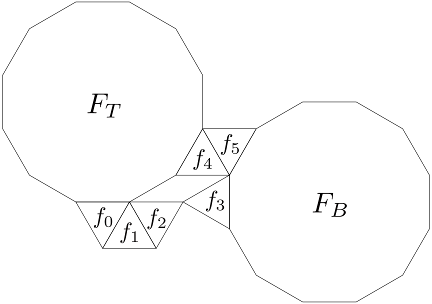
【証明のつづき（2）】

$n = 12$ のとき，重なりを持つ辺展開図が存在する．

アルキメデスの反角柱を左下の図の太線に沿って切ることで得られる面の集合 $\{f_3, F_B, f_5, f_4, F_T, f_0, f_1, f_2\}$ で構成される辺展開図の一部から確認できる．

アルキメデスの 12 反角柱の辺展開図の一部（再掲）



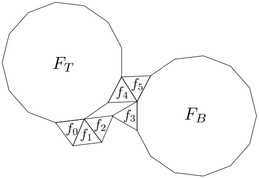


定理 2 の証明

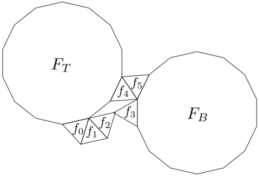
【証明のつづき（3）】

$n = 13 \sim 16$ とする場合も，同様に重なりを持つ辺展開図が存在する．

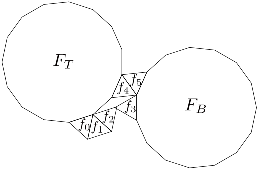
$\boxed{\text{アルキメデスの } 13 \sim 16 \text{ 反角柱の辺展開図の一部}}$



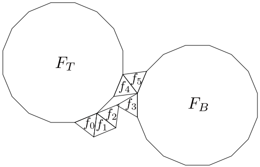
アルキメデスの 13 反角柱



アルキメデスの 14 反角柱



アルキメデスの 15 反角柱



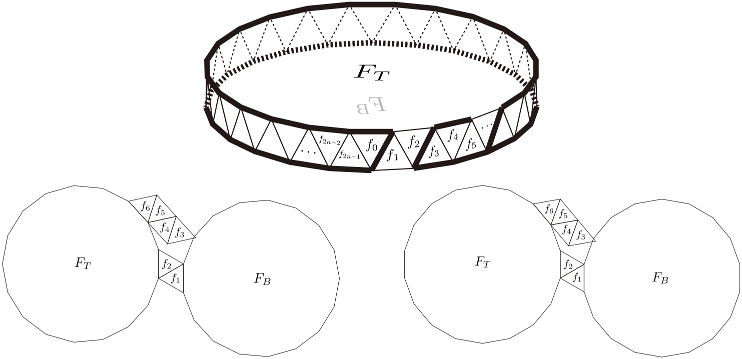
アルキメデスの 16 反角柱

定理 2 の証明

【証明のつづき（4）】

$n = 17, 18$ のとき $\{F_T, f_0, f_1, F_B, f_5, f_4, f_3, f_2\}$ で構成される辺展開図の一部から重なりを持つ辺展開図が存在することが確認できる．

$\boxed{\text{アルキメデスの } 17, 18 \text{ 反角柱の辺展開図の一部}}$



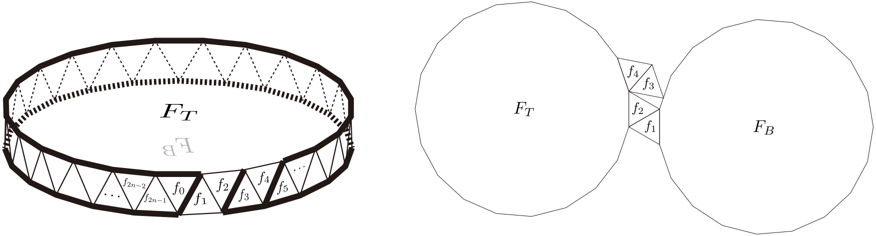
アルキメデスの 17 反角柱　　アルキメデスの 18 反角柱

定理 2 の証明

【証明のつづき（5）】

$n = 19$ のとき $\{F_B, f_1, f_2, F_T, f_4, f_3\}$ で構成される辺展開図の一部から重なりを持つ辺展開図が存在することが確認できる．

アルキメデスの 19 反角柱の辺展開図の一部



補題 2

$n \geq 19$ のとき，アルキメデスの n 角柱の面の集合 $\{F_B, f_1, f_2, F_T, f_4, f_3\}$ から構成される重なりを持つ部分的な辺展開図が存在する．

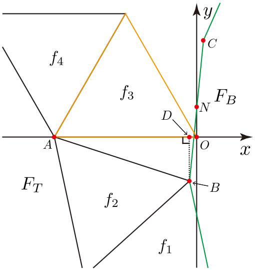
定理 2 の証明

【証明のつづき（６）】

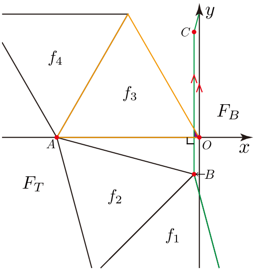
$\{F_B, f_1, f_2, F_T, f_4, f_3\}$ から構成される辺展開図の一部を拡大した図

点 O を原点 $(0,0)$，点 A の座標を $(-1,0)$ とする

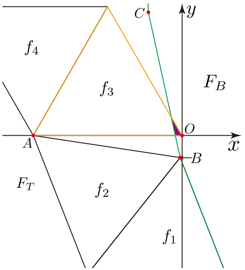
n の値によって線分 BC の傾きが変わる



$19 \leq n \leq 23$ の場合



$n = 24$ の場合



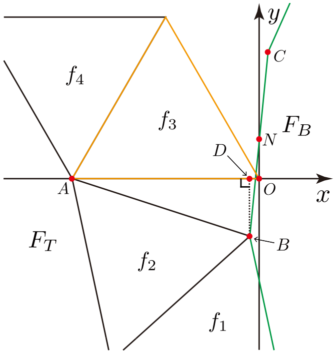
$n \geq 25$ の場合

そこで，(i) $19 \leq n \leq 23$ の場合と (ii) $n \geq 24$ の場合で場合分けをする．

定理 2 の証明

【証明のつづき（7）】

(i) $19 \leq n \leq 23$ の場合



点 O を原点 $(0, 0)$
点 A の座標を $(-1, 0)$

重なりを持つための十分条件

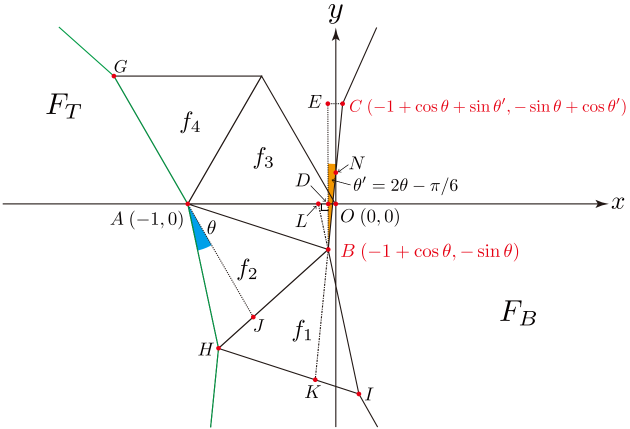
1. 点 B が第 3 象限に存在する
2. 点 C の y 座標が正である
3. 点 N の y 座標が正である

定理 2 の証明

【証明のつづき（8）】

各辺の長さを 1，正 n 角形の外角を $\theta = 2\pi/n$ とする

n の定義域：$19 \leq n \leq 23 \Rightarrow$ θ の定義域：$2\pi/23 \leq n \leq 2\pi/19$



定理 2 の証明

【証明のつづき（９）】

重なりを持つための十分条件

1. 点 B が第 3 象限に存在する

点 B の座標は $(-1+\cos\theta, -\sin\theta)$ である．

点 B の (x,y) 座標をそれぞれ (B_x, B_y) とし，$B_x < 0$, $B_y < 0$ を示す．

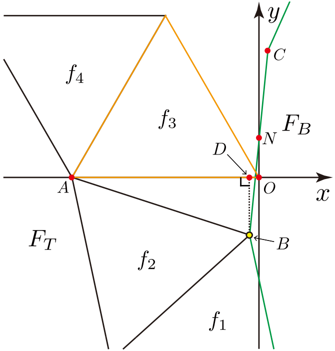
定義域（$\frac{2\pi}{23} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{19}$）において，

$$\cos\theta < \cos\frac{2\pi}{23}, \quad -\sin\theta < \sin\frac{2\pi}{23}$$

であることが言える．

$$B_x = -1+\cos\theta < -1+\cos\frac{2\pi}{23} < 0$$
$$B_y = -\sin\theta < -\sin\frac{2\pi}{23} < 0$$

が成り立つため $B_x < 0$ $B_y < 0$ と言える．



定理 2 の証明

【証明のつづき（１０）】

重なりを持つための十分条件

2. 点 C の y 座標が正である

点 C の座標は $(-1+\cos\theta+\sin\theta', -\sin\theta+\cos\theta')$ である．

点 C の y 座標を $C_y = -\sin\theta + \cos\theta'$ とし，$C_y > 0$ を示す．

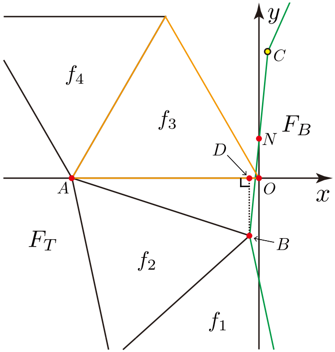
定義域（$\frac{2\pi}{23} \le \theta \le \frac{2\pi}{19}$）において，

$$-\sin\theta \ge -\sin\frac{2\pi}{19},\quad \cos 2\theta \ge \cos\frac{4\pi}{19},$$
$$\sin 2\theta \ge \sin\frac{4\pi}{23}$$

であることが言える．

$$C_y = -\sin\theta + \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) \ge -\sin\frac{2\pi}{19} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{4\pi}{19} + \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{23} > 0$$

が成り立つため $C_y > 0$ と言える．



定理 2 の証明

【証明のつづき（１１）】

重なりを持つための十分条件

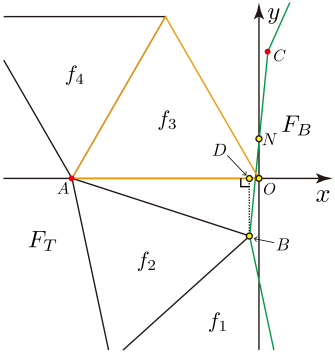
3. 点 N の y 座標が正である

$\angle DBN < \angle DBO$ であることを用いて示す．

$\angle DBN = \dfrac{\theta}{2}$, $\angle DBO = 2\theta - \dfrac{\pi}{6}$ である．

$\angle DBN < \angle DBO$ を解くと $n > 8$ と求まる．

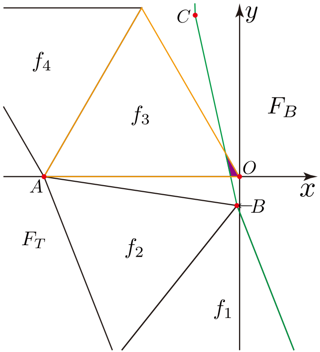
ゆえに $19 \leq n \leq 23$ において条件式が成り立つ．



定理 2 の証明

【証明のつづき（１２）】

(ii) $24 \geq n$ の場合



点 O を原点 $(0,0)$
点 A の座標を $(-1,0)$

重なりを持つための十分条件

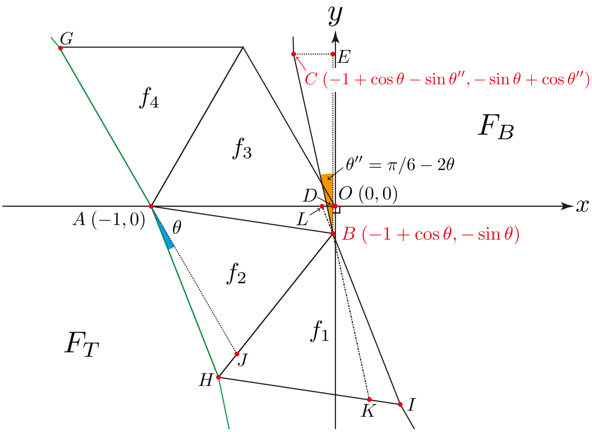
1. 点 B が第 3 象限に存在する
2. 点 C の y 座標が正である
3. 点 C の x 座標が負である

定理 2 の証明

【証明のつづき（１３）】

各辺の長さを 1，正 n 角形の外角を $\theta = 2\pi/n$ とする

n の定義域：$n \geq 24 \Rightarrow$ θ の定義域：$0 < n \leq 2\pi/24$



定理 2 の証明

【証明のつづき（１４）】

重なりを持つための十分条件

1. 点 B が第 3 象限に存在する

点 B の座標は $(-1+\cos\theta, -\sin\theta)$ である．

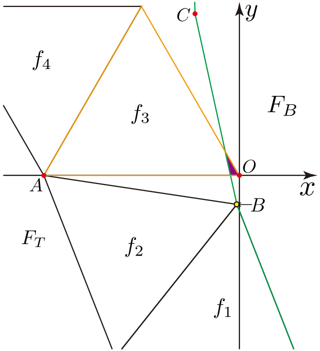
点 B の (x,y) 座標をそれぞれ (B_x, B_y) とし，$B_x < 0$, $B_y < 0$ を示す．
定義域（$0 < n \leq 2\pi/24$）において，

$$\cos\theta < \cos 0, \quad -\sin\theta < \sin 0$$

であることが言える．

$$B_x = -1 + \cos\theta < -1 + \cos 0 < 0$$
$$B_y = -\sin\theta < -\sin 0 < 0$$

が成り立つため $B_x < 0$ $B_y < 0$ と言える．



定理 2 の証明

【証明のつづき（１５）】

重なりを持つための十分条件

2. 点 C の y 座標が正である

点 C の座標は $(-1+\cos\theta+\sin\theta'', -\sin\theta+\cos\theta'')$ である．

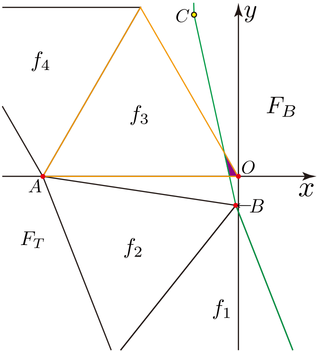
点 C の y 座標を $C_y = -\sin\theta+\cos\theta''$ とし，$C_y > 0$ を示す．
定義域（$0 < n \leq 2\pi/24$）において，

$$-\sin\theta \geq -\sin\tfrac{2\pi}{24},\quad \cos 2\theta \geq \cos\tfrac{4\pi}{24},$$
$$\sin 2\theta \geq \sin 0$$

であることが言える．

$$C_y = -\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{6}-2\theta\right) \geq -\sin\frac{2\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{4\pi}{24} > 0$$

が成り立つため $C_y > 0$ と言える．



定理 2 の証明

【証明のつづき（１６）】

重なりを持つための十分条件

3. 点 C の x 座標が負である

点 C の座標は $(-1+\cos\theta+\sin\theta'', -\sin\theta+\cos\theta'')$ である．

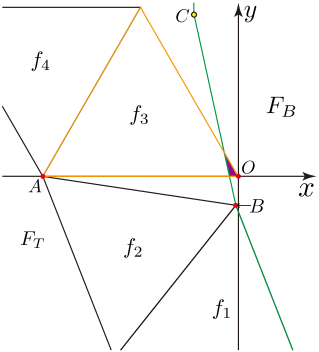
点 C の x 座標を $C_x = -1+\cos\theta+\sin\theta''$ とし，
$C_x < 0$ を示す．
定義域（$0 < n \leq 2\pi/24$）において，

$$\cos\theta < \cos 0, \quad -\cos 2\theta \leq -\cos\tfrac{4\pi}{24},$$
$$-\sin 2\theta < \sin 0$$

であることが言える．

$$C_x = -1+\cos\theta-\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\theta\right) < -1+\cos 0-\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{24} < 0$$

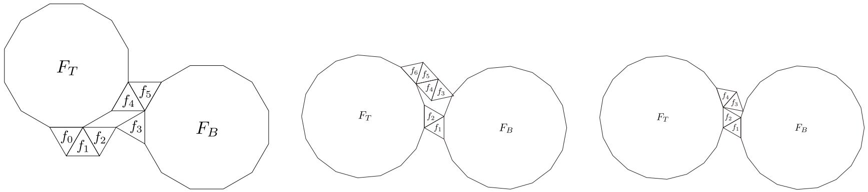
が成り立つため $C_x < 0$ と言える．



定理 2 の証明

【証明のつづき（１７）】

1. n が $12 \sim 18$ の場合は図によって示された．
2. 補題 2 が示された．$\Rightarrow n \geq 19$ の場合で示された．



$12 \leq n \leq 16$ の時　　$n = 17, 18$ の時　　$n \geq 19$ の時

$n \geq 12$ のとき，アルキメデスの n 反角柱には重なりを持つ辺展開図が存在することが言える． □

まとめ

本研究ではアルキメデスの n(反) 角柱の重なりの有無を示した．

整凸面多面体	重なりを持つ辺展開図の有無
正多面体 (全 5 種類)	無し [T. Horiyama et al. 2011]
半正多面体 (全 13 種類)	7 種類に無し・6 種類に有り [T. Horiyama et al. 2011, T. Shiota et al. 2021]
アルキメデスの n 角柱 (無限個)	$3 \leq n \leq 23$ のとき存在しない $n \geq 24$ のとき存在する
アルキメデスの n 反角柱 (無限個)	$3 \leq n \leq 11$ のとき存在しない $n \geq 12$ のとき存在する
ジョンソンの立体 (全 92 種類)	未解決

今後は…

回転展開を高速化し，ジョンソンの立体の箇所を解決へと導きたい．