第３回 AFSA B01班セミナー SSSS

凸多面体の重なりを持たない辺展開図の列挙

塩田 拓海（Takumi SHIOTA）

九州工業大学 情報工学府

shiota.takumi779@mail.kyutech.jp

2022年 7月 31日（日）9:30 - 10:30

会場： TKPガーデンシティPREMIUM札幌大通り

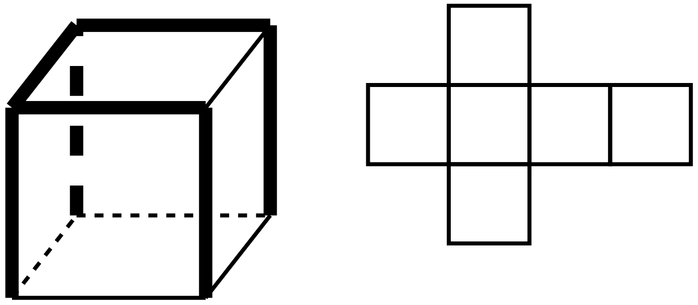
辺展開図とは？

定義 1（辺展開図）[上原, 2018, 定義 1.0.1]

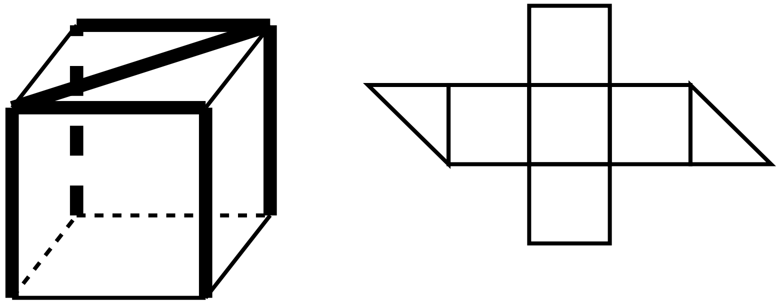
多面体の辺に切れ込みを入れて平坦に開いた多角形を辺展開図という.

(a) の切り方は辺展開図であるが，(b) の切り方は辺展開図ではない

本研究では (a) の辺展開図のみを扱う



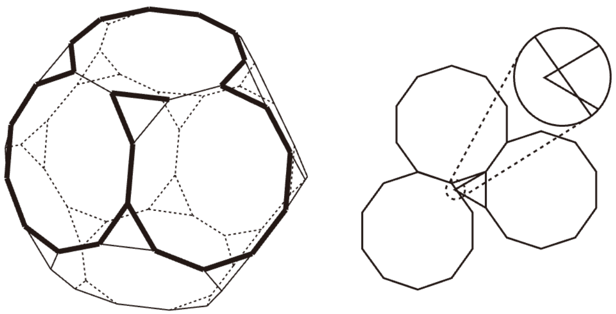
(a)



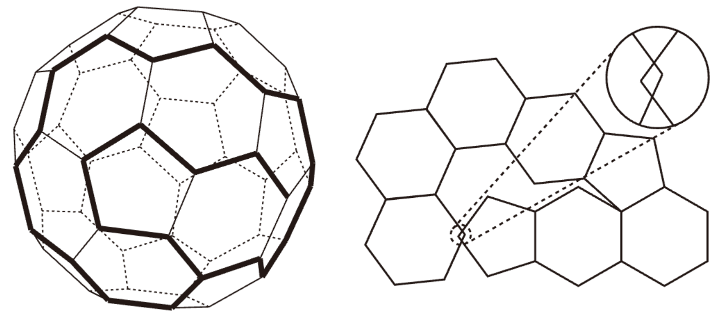
(b)

凸多面体における重なりを持つ辺展開図の例

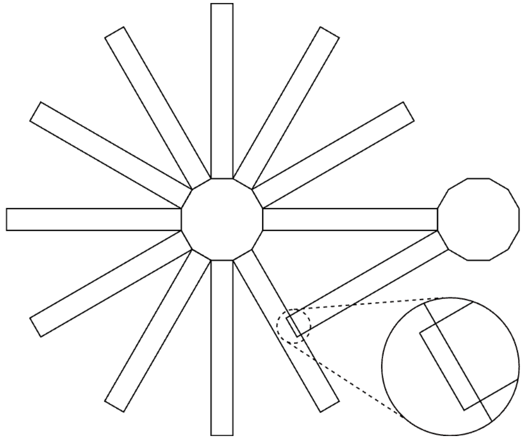
いくつかの凸多面体には，重なりを持つ辺展開図が存在する



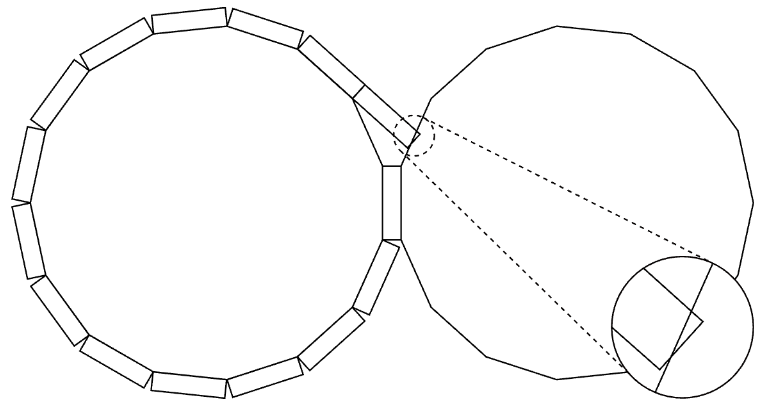
切頂 12 面体
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



切頂 20 面体
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



正 12 角柱 [Schlickenrieder, 1997]



正 15 角柱 [Schlickenrieder, 1997]

先行研究と主結果

整凸面多面体（全ての面が正 n 角形から構成される凸多面体）を対象とした

整凸面多面体	重なりを持つ辺展開図が存在するか？
正多面体 (全5種類)	無し [T. Horiyama and W. Shoji, 2011]
半正多面体 (全13種類)	5種類に有り [T. Horiyama and W. Shoji, 2011] 5種類に無し [廣瀬, 2015] 3種類は未解決
アルキメデスの n 角柱 (無限個)	未解決
アルキメデスの n 反角柱 (無限個)	未解決
ジョンソンの立体 (全92種類)	未解決

先行研究と主結果

整凸面多面体（全ての面が正 n 角形から構成される凸多面体）を対象とした

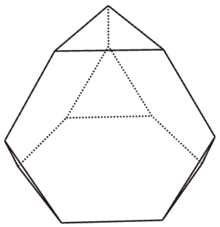
整凸面多面体	重なりを持つ辺展開図が存在するか？
正多面体 (全5種類)	無し [T. Horiyama and W. Shoji, 2011]
半正多面体 (全13種類)	5種類に有り [T. Horiyama and W. Shoji, 2011] 5種類に無し [廣瀬, 2015] 1種類に有り・2種類に無し
アルキメデスの n 角柱 (無限個)	$3 \leq n \leq 23$ のとき存在しない $n \geq 24$ のとき存在する
アルキメデスの n 反角柱 (無限個)	$3 \leq n \leq 11$ のとき存在しない $n \geq 12$ のとき存在する
ジョンソンの立体 (全92種類)	未解決

これまでの研究成果（半正多面体）

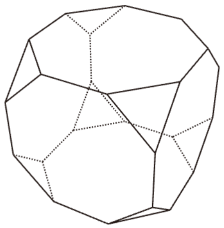
定理 1

1. 二十・十二面体，斜方切頂立方八面体には重なりを持つ辺展開図が存在しない
2. 変形立方体は，特定の切り開き方をすると重なりを持つ

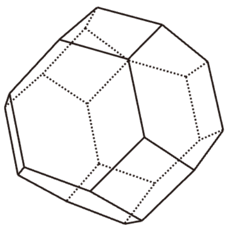
重なりを持たない辺展開図



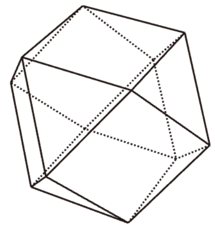
切頂四面体



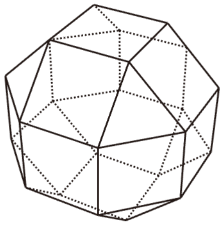
切頂六面体



切頂八面体

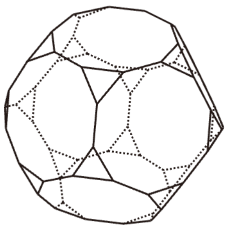


立方八面体

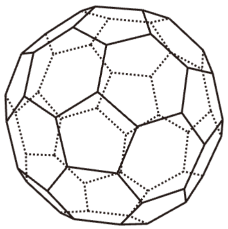


斜方立方八面体

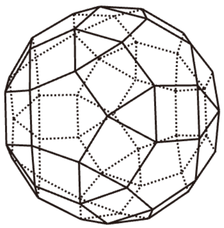
重なりを持つ辺展開図



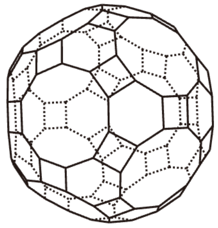
切頂十二面体



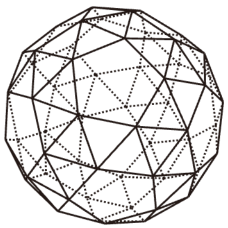
切頂二十面体



切頂
二十・十二面体

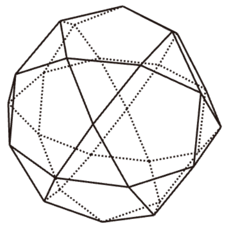


斜方切頂
二十・十二面体

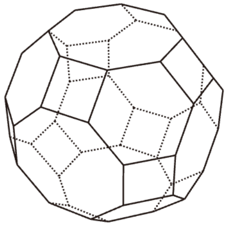


変形十二面体

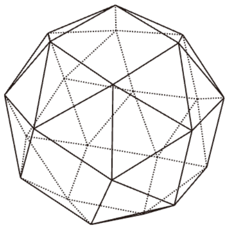
未解決



二十・十二面体



斜方切頂
立方八面体



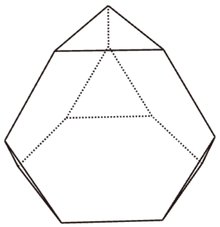
変形立方体

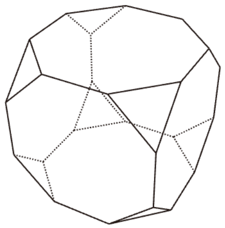
これまでの研究成果（半正多面体）

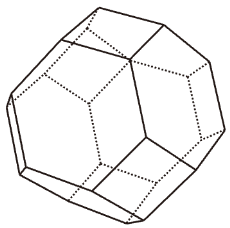
定理 1

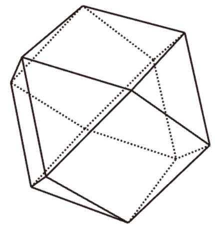
1. 二十・十二面体，斜方切頂立方八面体には重なりを持つ辺展開図が存在しない
2. 変形立方体は，特定の切り開き方をすると重なりを持つ

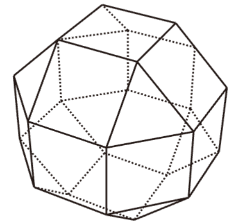
重なりを持たない辺展開図

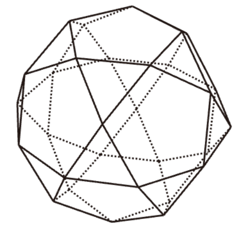

切頂四面体

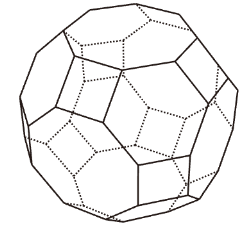

切頂六面体


切頂八面体

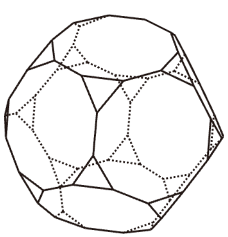

立方八面体

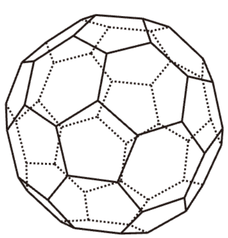

斜方立方八面体

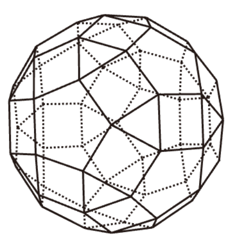

二十・十二面体

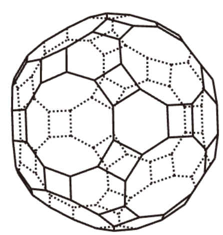

斜方切頂
立方八面体

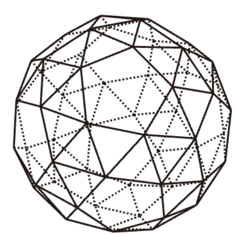
重なりを持つ辺展開図

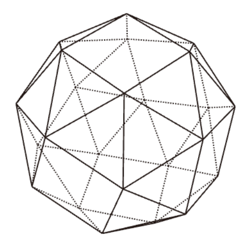

切頂十二面体


切頂二十面体


切頂
二十・十二面体


斜方切頂
二十・十二面体


変形十二面体

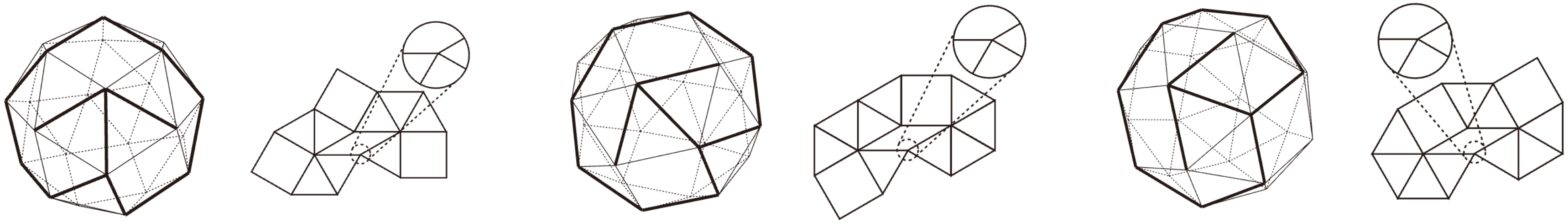

変形立方体

これまでの研究成果（半正多面体）

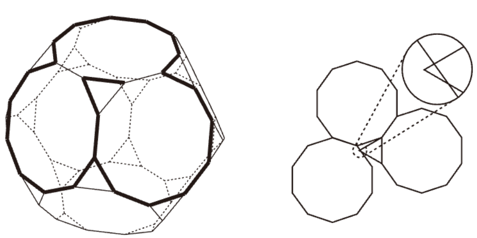
定理 2

1. 変形立方体の重なりを持つ部分的な辺展開図は3種類である
2. 切頂十二面体の重なりを持つ部分的な辺展開図は1種類である
3. 切頂二十面体の重なりを持つ部分的な辺展開図は2種類である

変形立方体（3 種類）

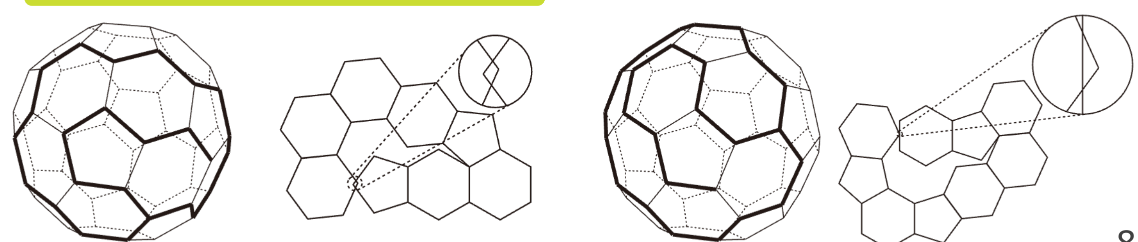


切頂十二面体（1 種類）



[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

切頂二十面体（2 種類）



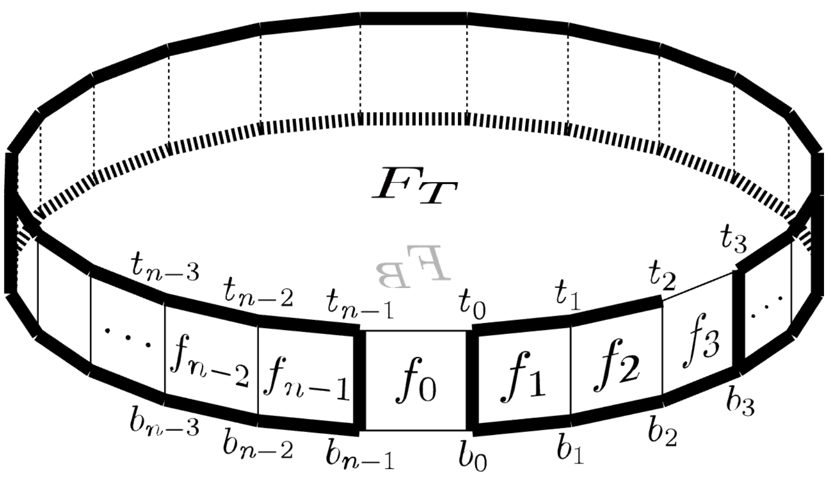
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

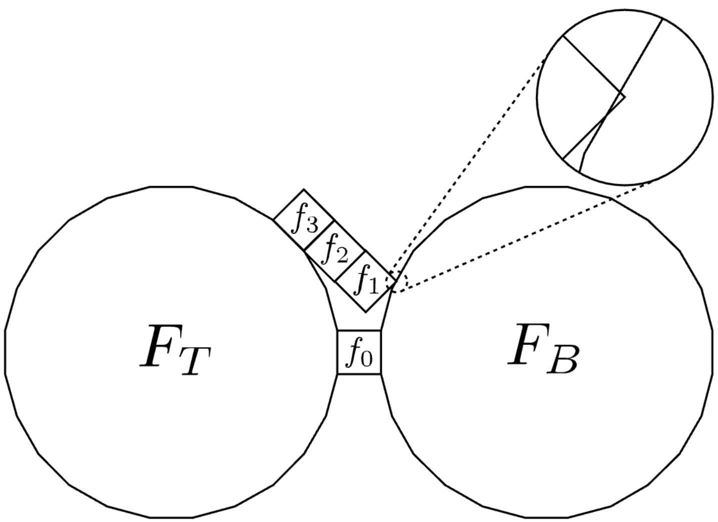
これまでの研究成果（アルキメデスの n 角柱）

定理 3

① $3 \leq n \leq 23$ のとき，アルキメデスの n 角柱には重なりを持つ辺展開図が存在しない

② $n \geq 24$ のとき，アルキメデスの n 角柱には重なりを持つ辺展開図が存在する





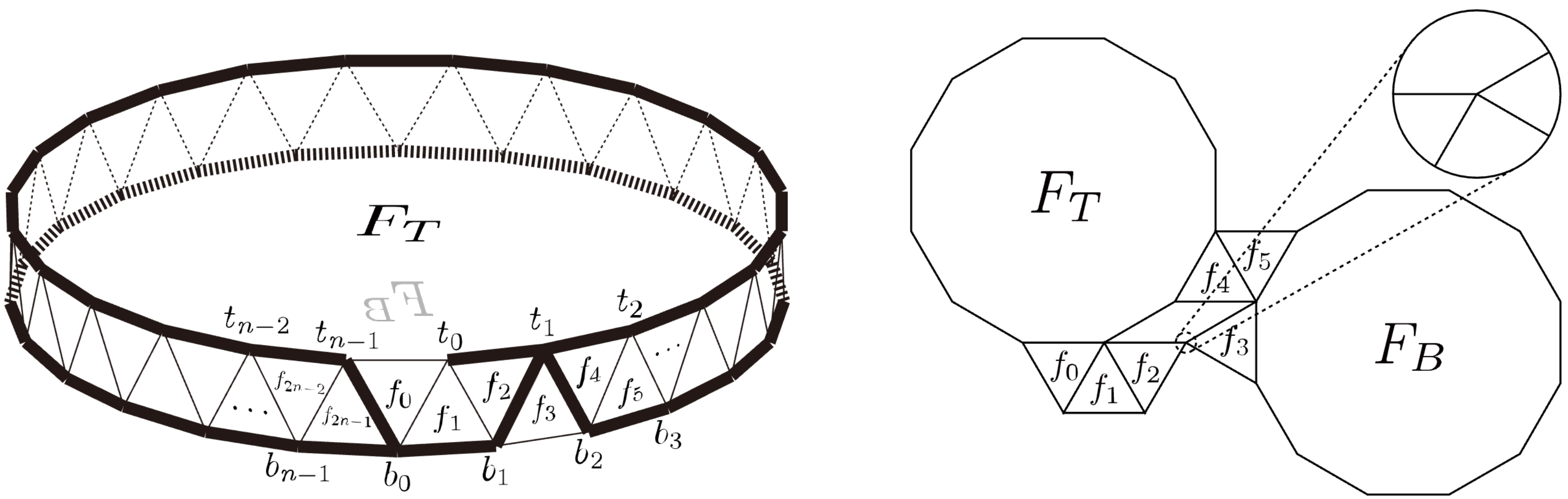
アルキメデスの24角柱の部分的な辺展開図

これまでの研究成果（アルキメデスの n 反角柱）

定理 4

① $3 \leq n \leq 11$ のとき，アルキメデスの n 反角柱には重なりを持つ辺展開図が存在しない

② $n \geq 12$ のとき，アルキメデスの n 反角柱には重なりを持つ辺展開図が存在する



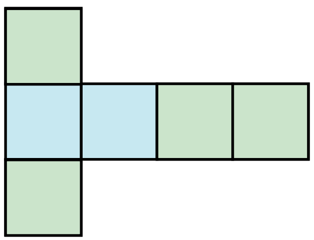
アルキメデスの12反角柱の部分的な辺展開図

既存研究におけるアルゴリズム

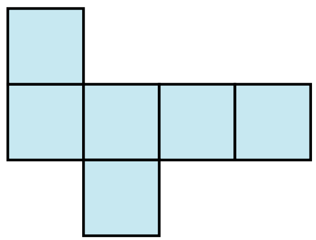
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

全ての辺展開図に対して，それぞれの面どうしに重なりが無いかを判定

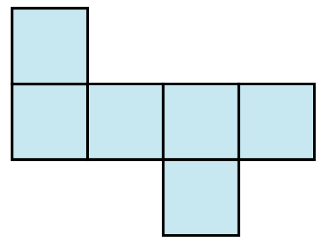
（例）正六面体（辺展開図：11通り）



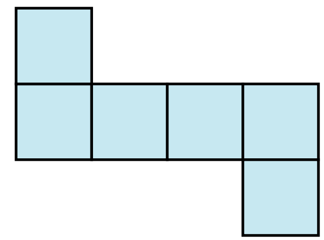
(1)



(2)

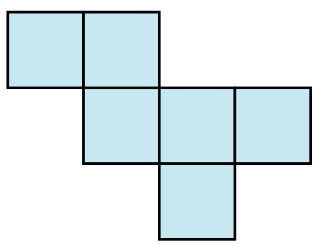


(3)

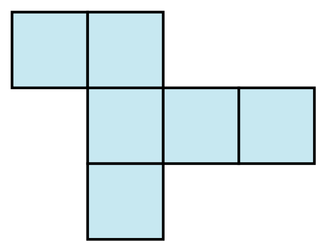


(4)

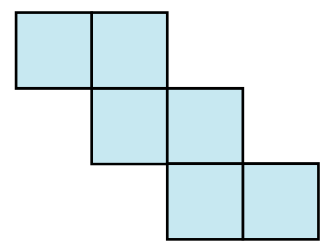
…



(9)



(10)



(11)

既存研究におけるアルゴリズム

[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

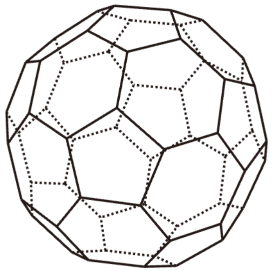
全ての辺展開図に対して，それぞれの面どうしに重なりが無いかを判定

【既存研究のアルゴリズムの問題点】

1. 辺展開図の個数が多くなると現実的な時間で判定できない

   （例）切頂二十面体の辺展開図の個数は約317京個

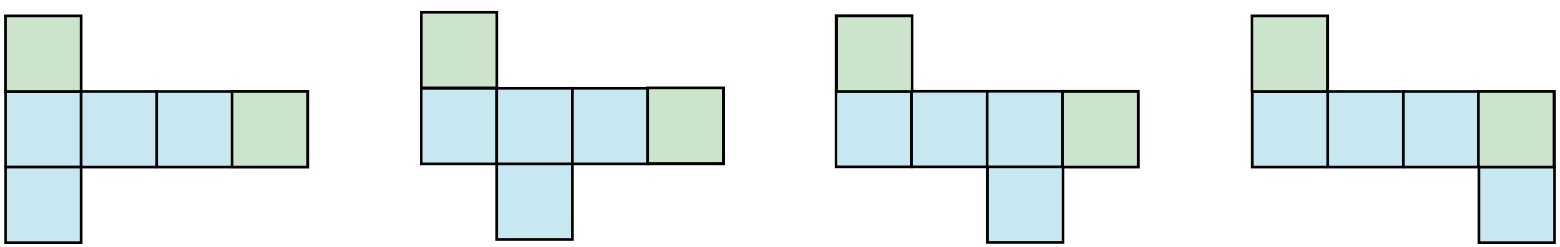
   ➡ 1秒間に10億回計算が出来る計算機でも約100年かかる！



切頂二十面体

2. 何回も同じ計算をしているため非常に効率が悪い

   （例）緑色の面の組み合わせを，毎回も判定をする必要が無い

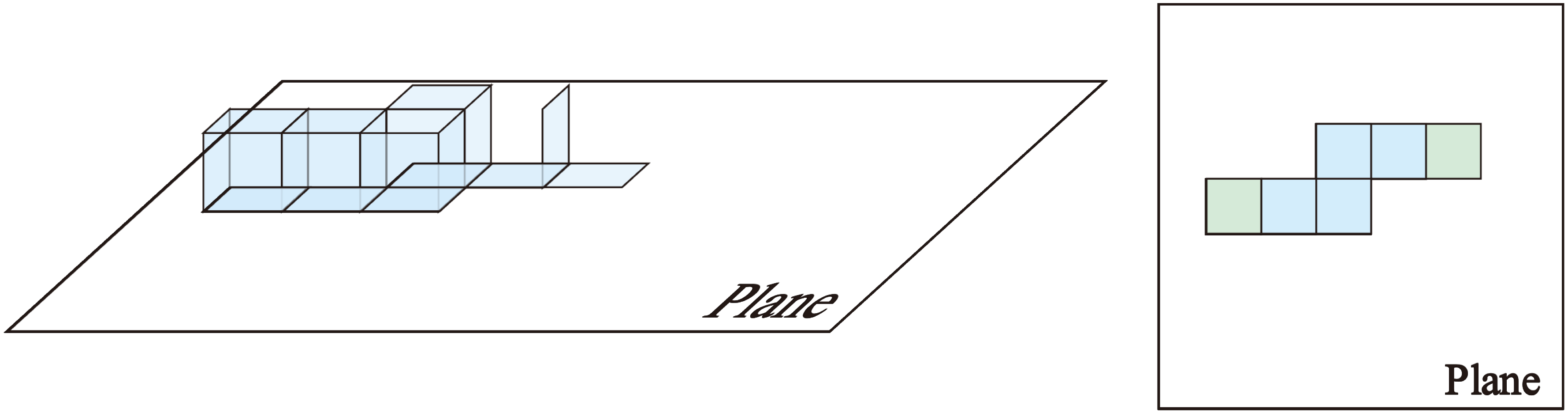


(1) (2) (3) (4)

考案したアルゴリズム

回転展開（Rotational Unfolding）

多面体をコロコロと転がすことで道を作り，任意の二面間の道を列挙する手法



【回転展開がどうして高速に動くのか？】

1. 全ての辺展開図を見ていかなくてもよい
2. 全ての面の組み合わせではなく，道の両端の面のみの重なりを調べばよい

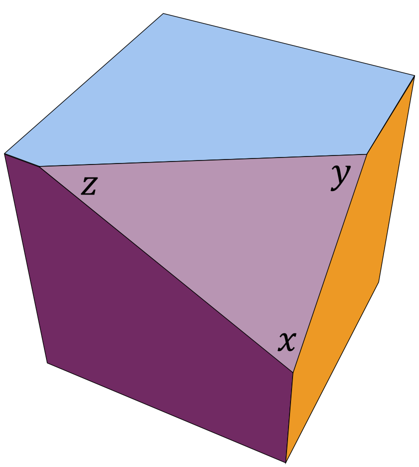
凸多面体における重要な未解決問題

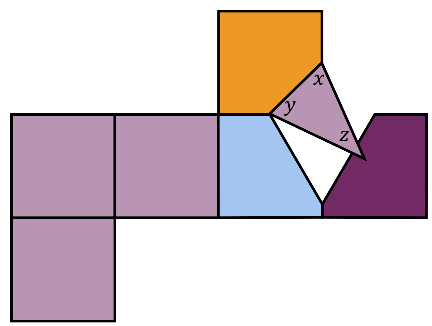
Dürerの問題 [Erik D. Demaine et al., 2007]

全ての凸多面体は，重なりを持たないように辺展開できるか？

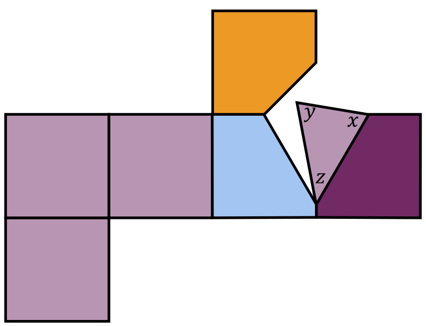
（例）角が切り落とされた立方体 [Namiki and Fukuda, 1993]

(a) の辺展開図から面 xyz を移動させると，(b) のように重なりを持たなくなる





(a) 重なりを持つ辺展開図



(b) 重なりを持たない辺展開図

凸多面体における重要な未解決問題

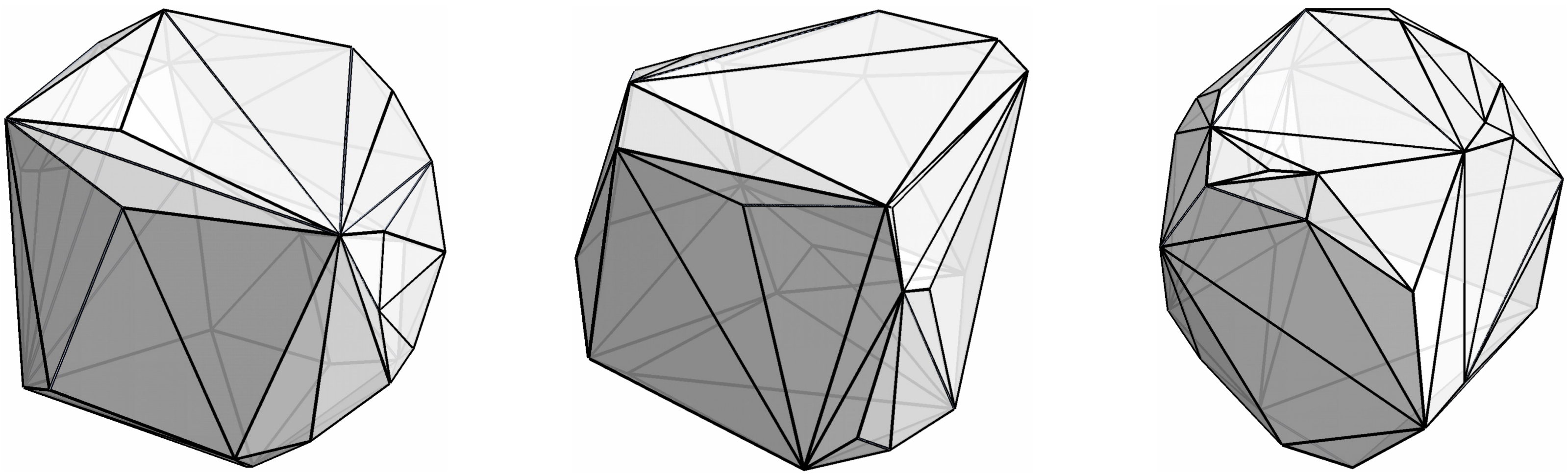
Dürerの問題 [Erik D. Demaine et al., 2007]

全ての凸多面体は，重なりを持たないように辺展開できるか？

（例）ランダムに頂点をばらまいて作った凸多面体

重なりを持たないように辺展開することができるか，よく分からない

➡ Dürerの問題は答えが Yesである可能性も No である可能性も残されている

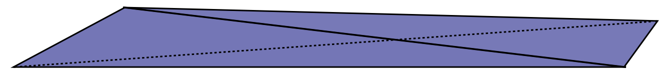


Dürerの問題の答えが Yes となりそうな理由

定理 [Erik D. Demaine et al., 2007]

凸多面体の頂点数を6頂点以下とした場合，重なりを持たないように辺展開できる

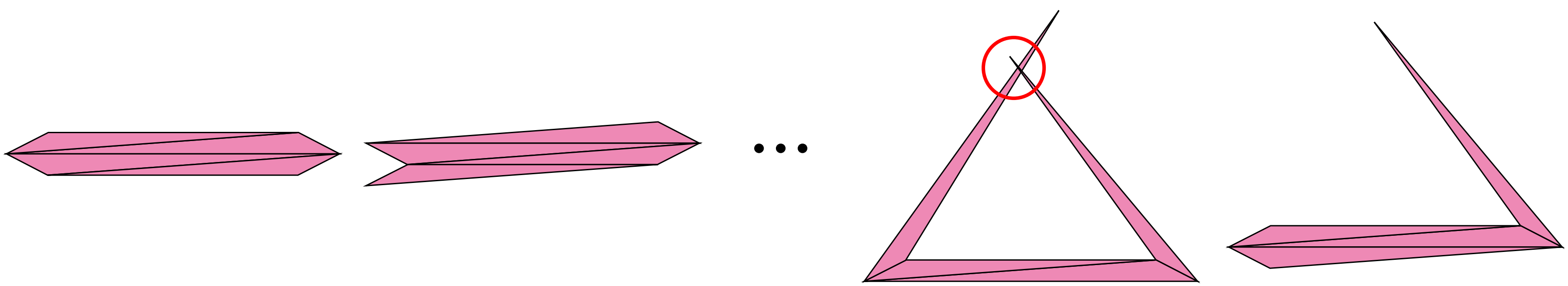
【証明の手順】



細長い四面体

① 凸多面体の辺展開図を列挙

② 各辺展開図に対して重なりを持たないことを実験的に示す



(1) (2) (15) (16)

➢ 凸多面体の頂点の数が多くなると，辺展開図の個数が爆発的に多くなる

➡ 頂点数が7頂点以上の場合，同じ証明方法を用いることができない

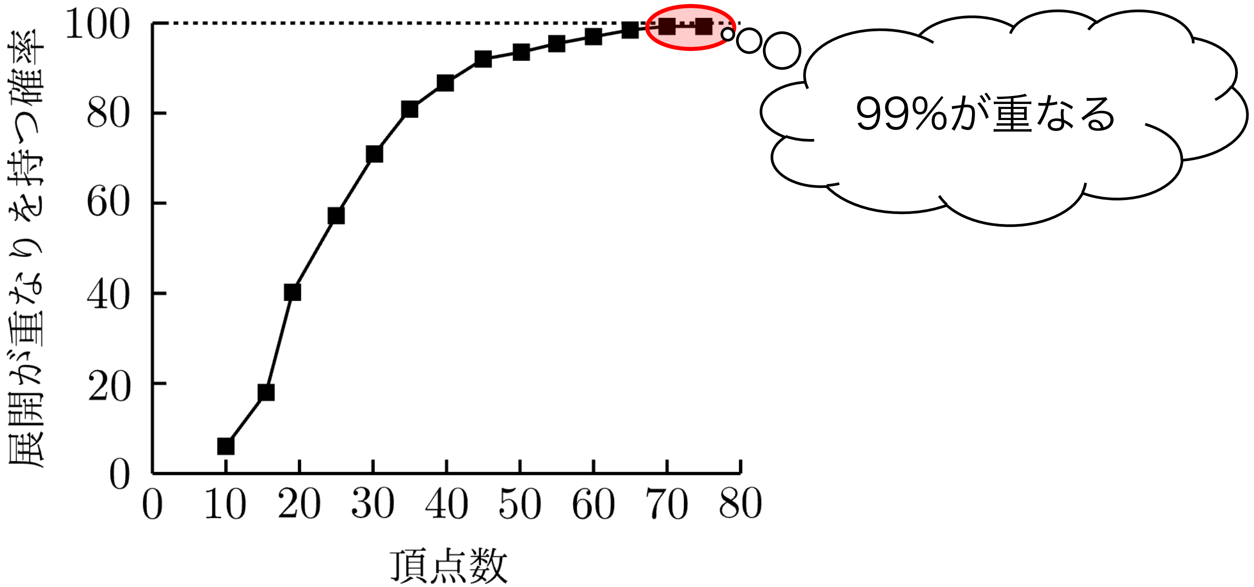
Dürerの問題の答えが No となりそうな理由

観察 [Erik D. Demaine et al., 2007]

頂点数の個数が多くなるほど重なりを持つ辺展開図の割合は大きくなる.

各頂点数におけるランダムに選んだ1000個の辺展開図中の重なりを持つ割合.

（各点は5個の多面体に関する平均値）[Erik D. Demaine et al., 2007, Fig. 22.10]



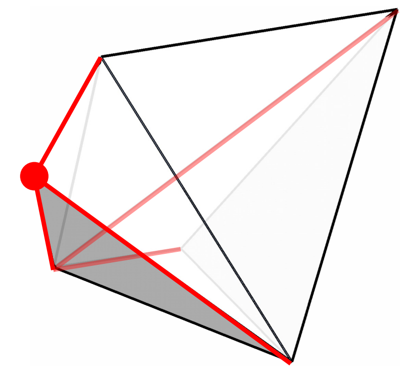
- 100%の辺展開図が重なる凸多面体は発見されていない

Dürerの問題が Yes であることを示すには…

Dürerの問題（再掲） [Erik D. Demaine et al., 2007]

全ての凸多面体は，重なりを持たないように辺展開できるか？

- 全ての凸多面体に対して，重なりを持たないように辺展開できるアルゴリズム（切り開き方）を示せばよい



福田らの予想 [Erik D. Demaine et al., 2007]

「最短路全域木」に沿って切り開くことで，重なりを持たないように辺展開できるのでは？

➡ 反例が示された [Schlickenrieder, 1997]

最短路全域木 [並木, 島, 2003]
ある頂点からすべての点への最短路を表す全域木

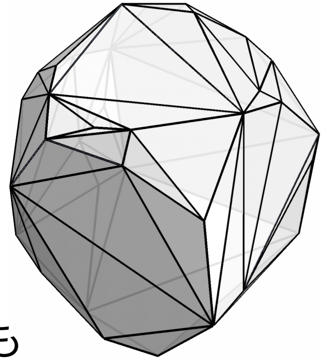
「最短路全域木」以外の辺展開の方法を観察により見つける必要がある

➡ 色々な凸多面体に対して「重なりを持たない辺展開図」を列挙したい

Dürerの問題が No であることを示すには…

Dürerの問題（再掲） [Erik D. Demaine et al., 2007]

全ての凸多面体は，重なりを持たないように辺展開できるか？



- ある凸多面体に対して 「重なりを持たない辺展開図」が1つも存在しないことが言えればよい

⇕

- ある凸多面体に対して「重なりを持たない辺展開図」を列挙しても何も出力されなければよい

本研究で解く問題

凸多面体が与えられたとき，重なりを持たない辺展開図はいくつ存在するか？

今後の研究計画

本研究で解く問題　（再掲）

凸多面体が与えられたとき，重なりを持たない辺展開図はいくつ存在するか？

これまでの研究

回転展開
（整凸面多面体のみ）

辺展開図の列挙
[T. Horiyama and W. Shoji, 2013]

① 回転展開の拡張
（一般的な凸多面体）

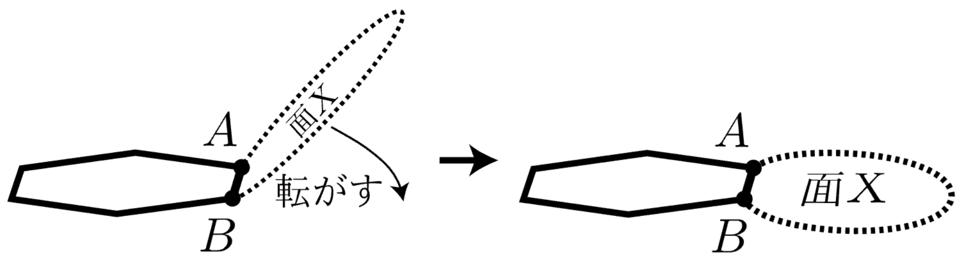
今後の研究計画

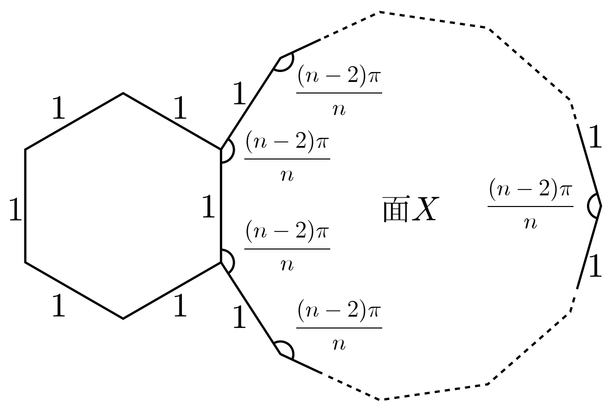
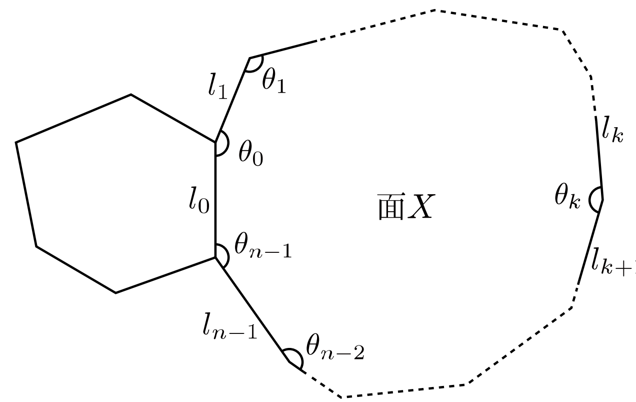
① 回転展開の一般的な凸多面体への拡張

【変更点：各面の座標計算方法】

任意の二面間の道の面を構成する

全ての面の座標が必要

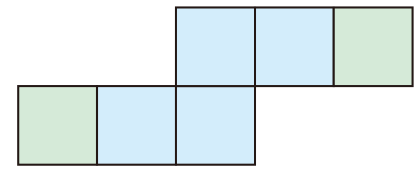


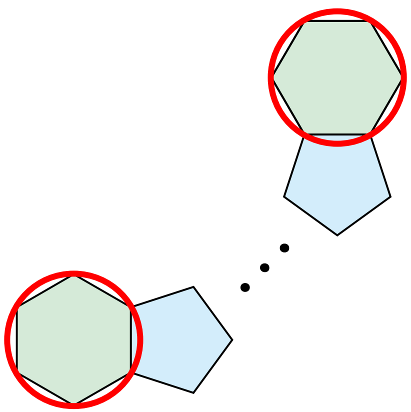
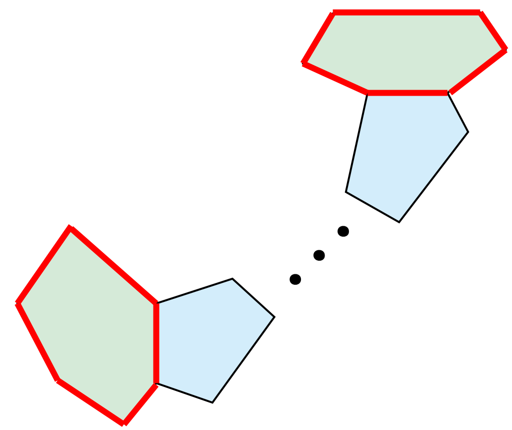
現状の回転展開		拡張した回転展開
		
n	頂点の数	n
$\{1, 1, \dots, 1\}$	各辺の長さ	$\{l_0, l_1, \dots, l_{n-1}\}$
$\{\frac{(n-2)\pi}{n}, \frac{(n-2)\pi}{n}, \dots, \frac{(n-2)\pi}{n}\}$	各頂点の角度	$\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}\}$

① 回転展開の一般的な凸多面体への拡張

【変更点：重なりの確認方法】

任意の二面間の道の両端点に該当する面どうしに
重なりがないかを確認することで判定



現状の回転展開		拡張した回転展開
		
両端の面の外接円どうしに重なりがないかを確認 [T. Horiyama et al., 2011]	判定方法	両端の面の線分どうしに交差がないかを確認

今後の研究計画

本研究で解く問題　（再掲）

凸多面体が与えられたとき，重なりを持たない辺展開図はいくつ存在するか？

これまでの研究

回転展開
（整凸面多面体のみ）

辺展開図の列挙
[T. Horiyama and W. Shoji, 2013]

今後の研究計画

① 回転展開の拡張
（一般的な凸多面体）

② 重なりを持たない辺展開図の列挙

② 重なりを持たない辺展開図の列挙

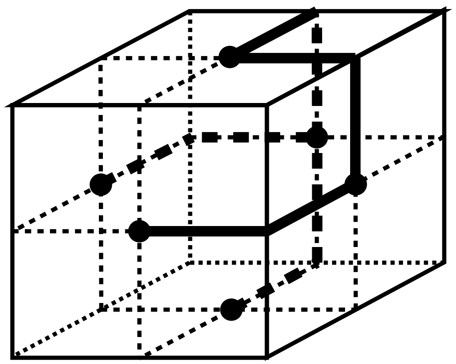
- 多面体は，グラフとして表現することができる

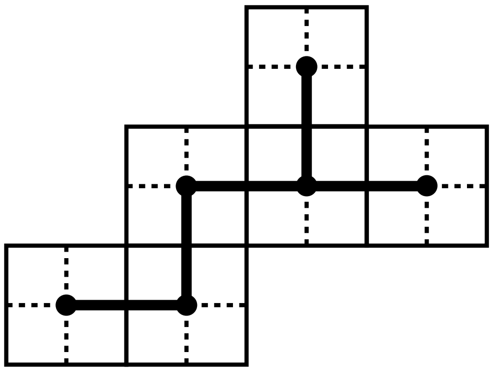
  頂点：多面体の各面

  辺：隣り合う面どうしの頂点を結ぶ線

- 辺展開図は，全域木と対応する

  ➡ 全域木は，各辺を含める/含めないの場合分けをすることで得られる

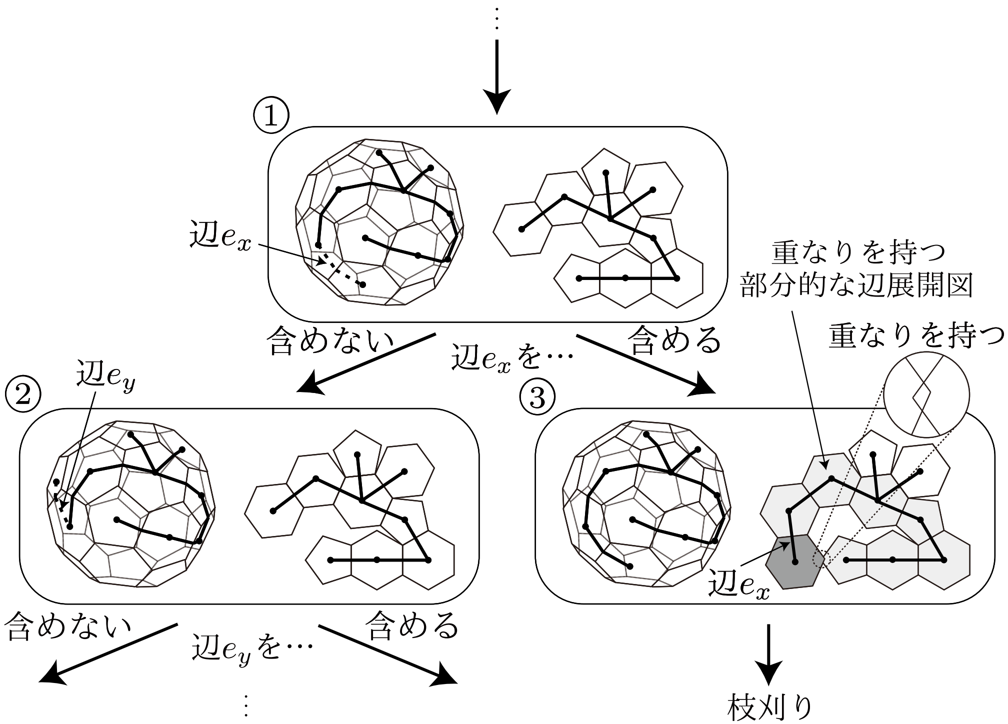


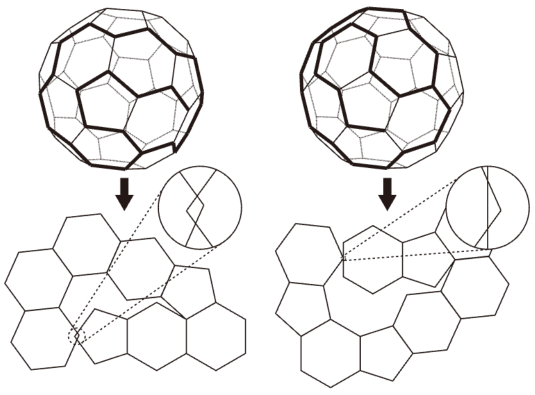


② 重なりを持たない辺展開図の列挙

- 全域木は二分決定木を用いて列挙できる
  - ➡ 全域木を列挙するだけでは「重なりを持つ辺展開図」も含まれる
    - ➡ 回転展開で列挙した「重なりを持つ部分的な辺展開図」を用いて枝刈り

【例】切頂二十面体





重なりを持つ部分的な辺展開図は

2種類のみ [塩田, 斎藤, 2021]

今後の研究計画

本研究で解く問題　（再掲）

凸多面体が与えられたとき，重なりを持たない辺展開図はいくつ存在するか？

これまでの研究

回転展開
（整凸面多面体のみ）

辺展開図の列挙
[T. Horiyama and W. Shoji, 2013]

今後の研究計画

① 回転展開の拡張
（一般的な凸多面体）

② 重なりを持たない辺展開図の列挙

Q. 辺展開図の個数は0個か？

Yes

Dürerの問題の
答えは No

No

重なりを持たない辺展開の考察を
見つけるための手掛りを示す

将来的には「重なりを持たない辺展開」の発見を目指す

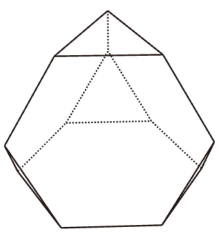
補足資料

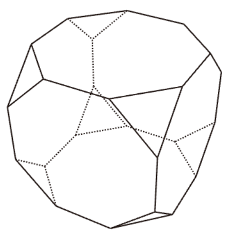
半正多面体とは？

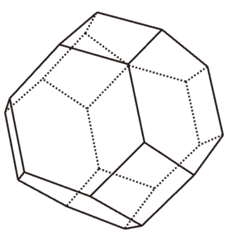
定義 2（半正多面体）

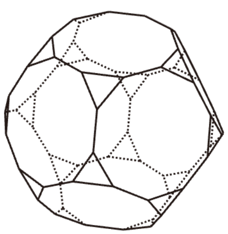
1. 整凸面多面体のうち，各頂点に接続する面の組み合わせが同じもの
2. 1のうち，正多面体，アルキメデスの角柱・反角柱を除くもの

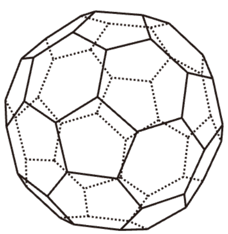
半正多面体（全13種類）

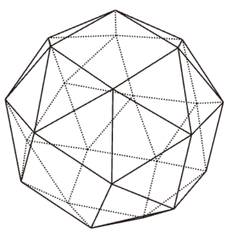

切頂四面体

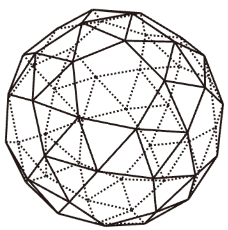

切頂六面体

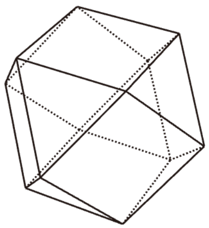

切頂八面体

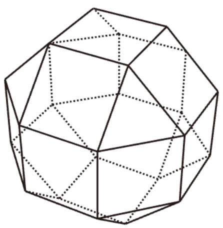

切頂十二面体

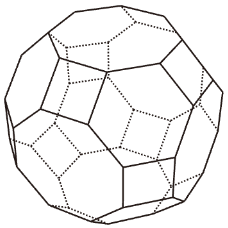

切頂二十面体

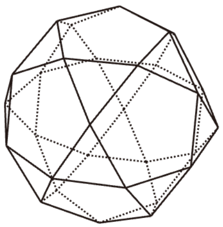

変形立方体

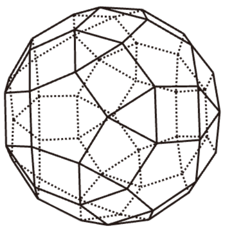

変形十二面体

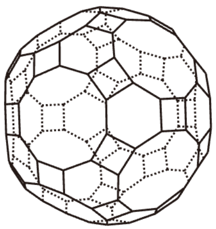

立方八面体


斜方立方八面体


斜方切頂
立方八面体


二十・十二面体


切頂
二十・十二面体


斜方切頂
二十・十二面体

アルキメデスの角柱・反角柱とは？

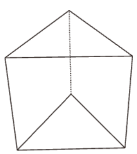
定義 3（アルキメデスの n 角柱）

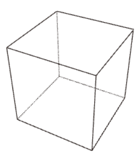
整凸面多面体のうち，上面と底面が正 n 角形かつ側面が全て正方形であるもの

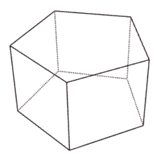
定義 4（アルキメデスの n 反角柱）

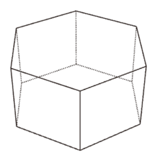
整凸面多面体のうち，上面と底面が正 n 角形かつ側面が全て正三角形であるもの

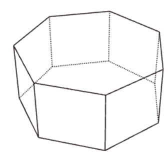
アルキメデスの n 角柱（無限個）

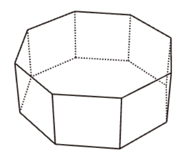

アルキメデスの
3角柱

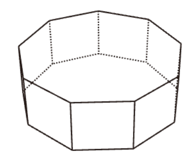

アルキメデスの
4角柱

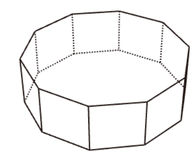

アルキメデスの
5角柱


アルキメデスの
6角柱

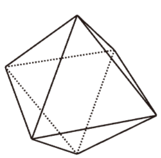

アルキメデスの
7角柱

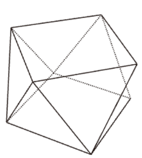

アルキメデスの
8角柱

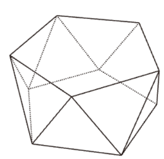

アルキメデスの
9角柱

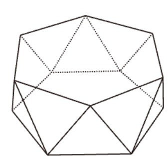

アルキメデスの
10角柱

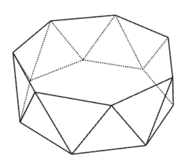
アルキメデスの n 反角柱（無限個）

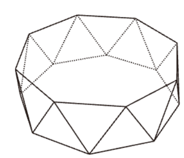

アルキメデスの
3反角柱

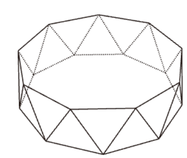

アルキメデスの
4反角柱

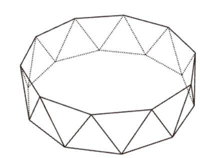

アルキメデスの
5反角柱


アルキメデスの
6反角柱


アルキメデスの
7反角柱

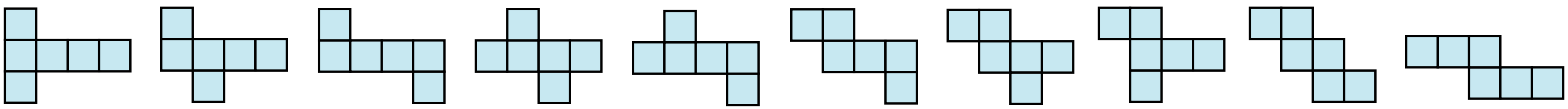

アルキメデスの
8反角柱


アルキメデスの
9反角柱

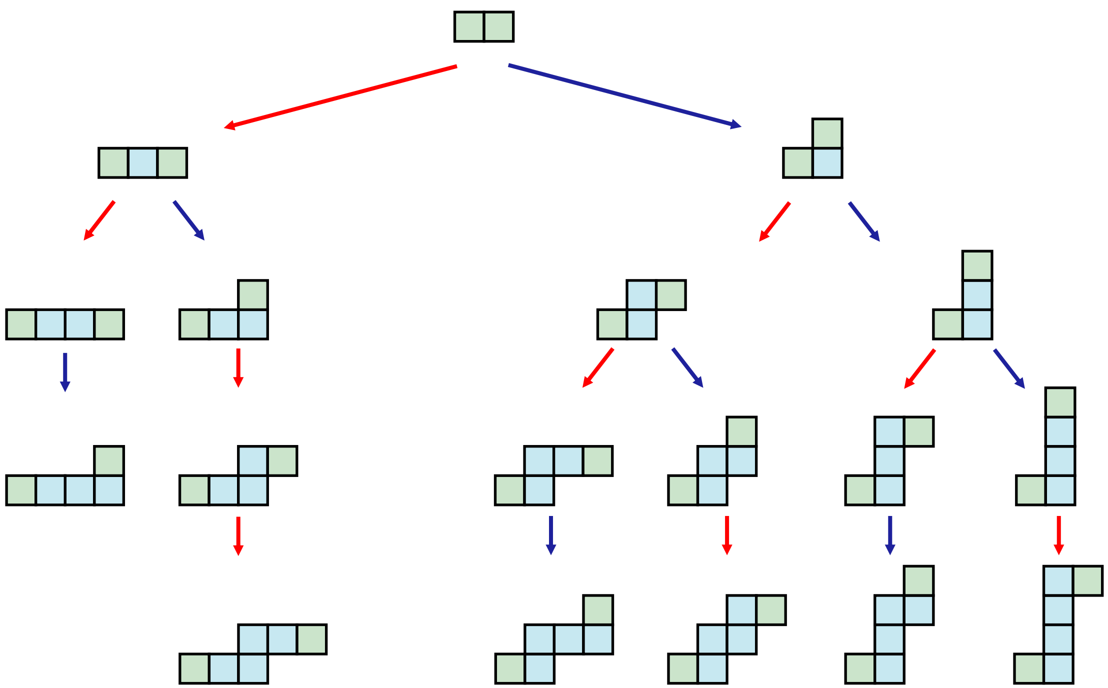

アルキメデスの
10反角柱

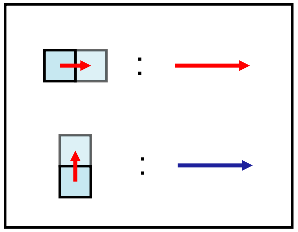
なぜ両端の面の重なりを確認すれば良いのか？

正六面体の辺展開図（確認すべき面の組み：165個 $(= 11\times {}_6C_2)$）



回転展開による部分的な辺展開図の列挙（確認すべき面の組み：18個）



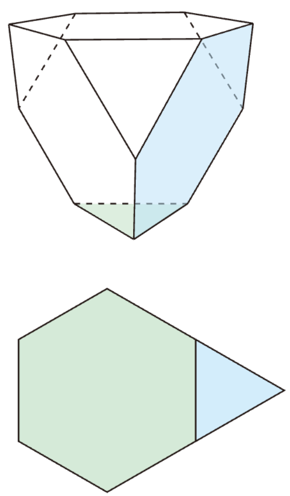


回転展開の高速化

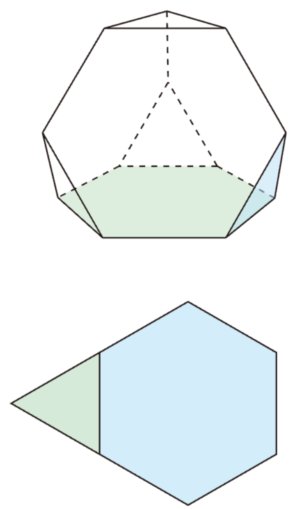
① 開始面と転がす方向

各頂点に接続する面の組み合わせが同じとき，全ての面に対して道を列挙する必要はない

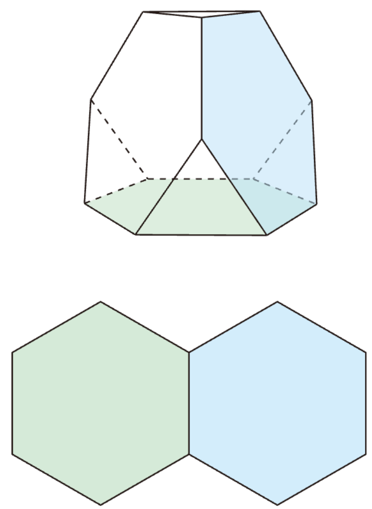
【例】切頂四面体は，以下の3パターンを考えればよい



正6角形, 正3角形



正3角形, 正6角形



正6角形, 正6角形

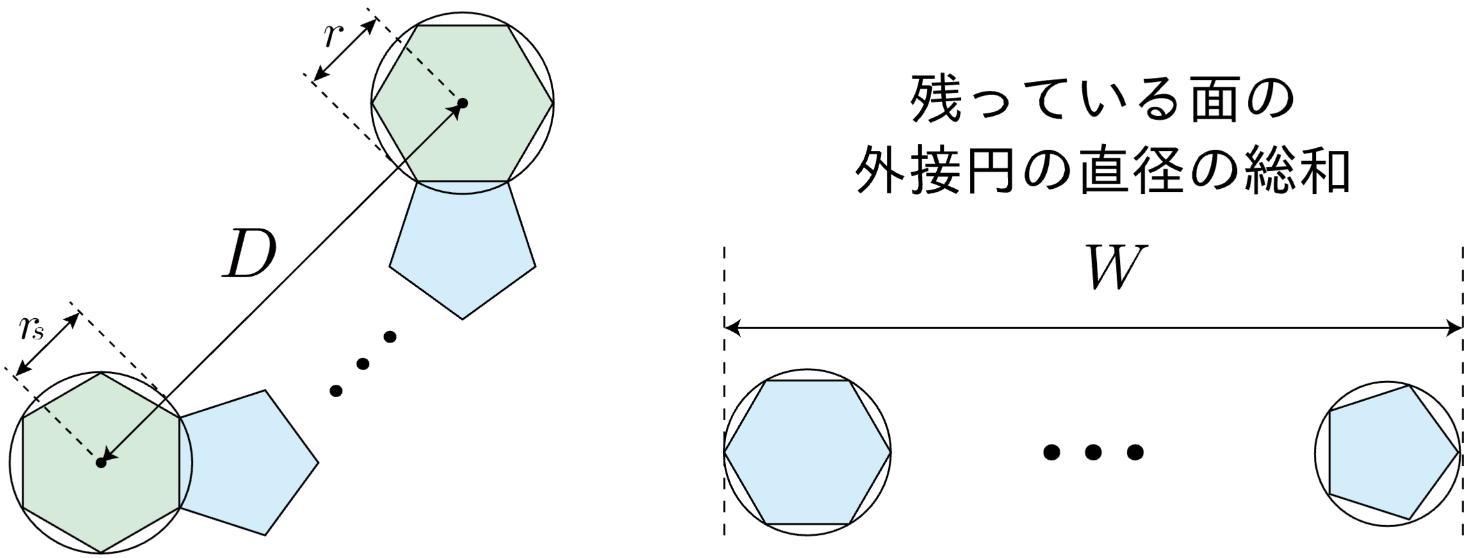
※ジョンソンの立体に対して使うことができない

回転展開の高速化

② 距離を用いた枝刈り

残っている面だけで，どのように繋げても重なりを持たない場合は枝刈りをする

$D - r_s - r > W$ のとき，どのように繋げても重なりを持たない

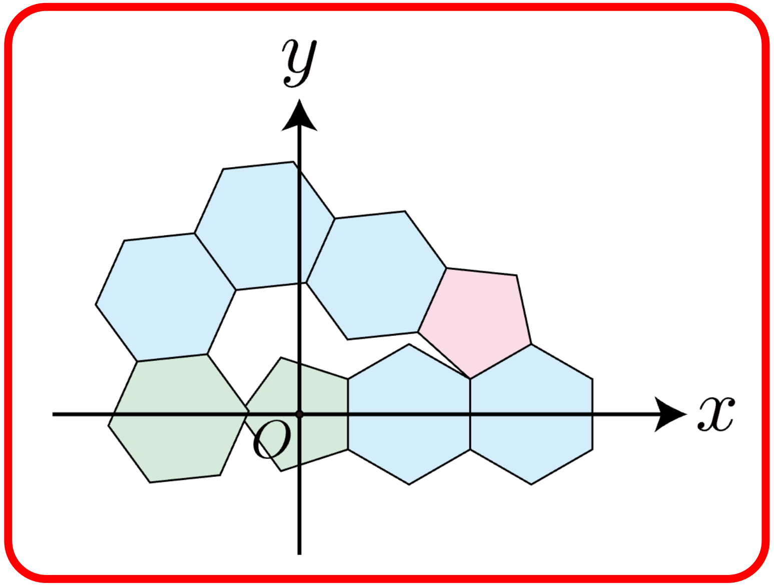


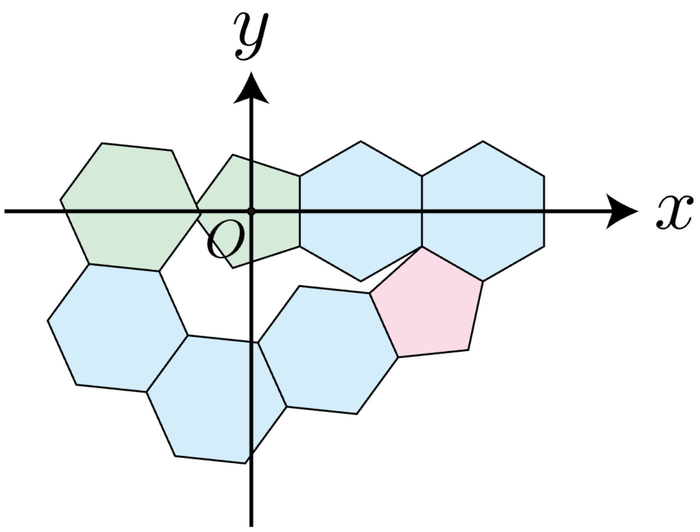
回転展開の高速化

③ 対称性を用いた枝刈り

多面体に対称性があるとき，x 軸に関して対称になる場合は枝刈りをする

面の中心の y 座標が，はじめて $y \neq 0$ となったときに判定する





※ 変形立方体・変形十二面体・ジョンソンの立体に対して使うことができない

定理３・定理４ ① の証明

定理 3

① $3 \leq n \leq 23$ のとき，アルキメデスの n 角柱には重なりを持つ辺展開図が存在しない

定理 4

① $3 \leq n \leq 11$ のとき，アルキメデスの n 反角柱には重なりを持つ辺展開図が存在しない

【証明】

アルキメデスの n 角柱（$3 \leq n \leq 23$），アルキメデスの m 角柱 $(3 \leq m \leq 11)$ に対して回転展開を使うことで示すことができる □

回転展開による列挙の結果※1

※1 https://shiotatakumi.github.io/MyPage/achievements.html#2022

定理３ ② の証明

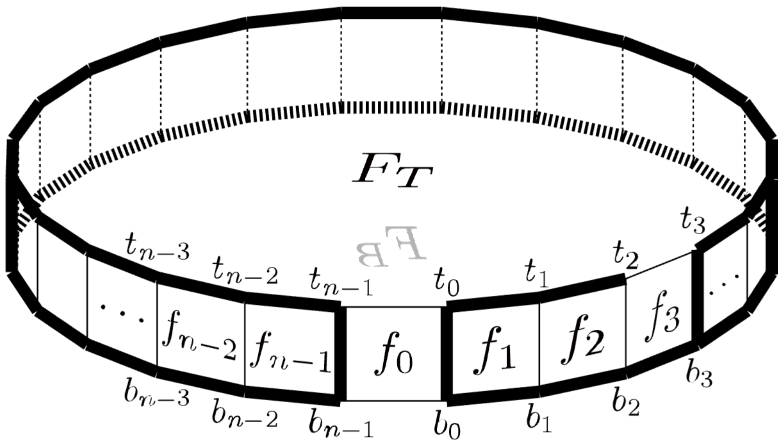
定理 3

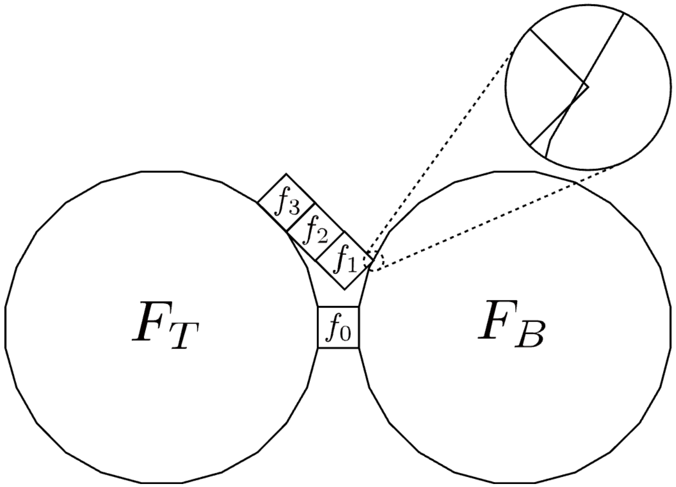
② $n \geq 24$ のとき，アルキメデスの n 角柱には重なりを持つ辺展開図が存在する

【証明】

$n = 24$ のとき，重なりを持つ辺展開図が存在する

面の集合 $\{F_B, f_0, F_T, f_3, f_2, f_1\}$ で構成される部分的な辺展開図から確認できる



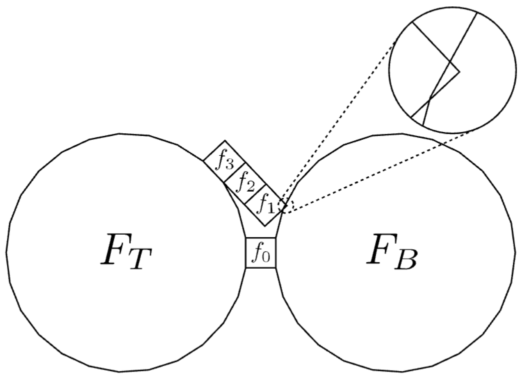


アルキメデスの24角柱の部分的な辺展開図

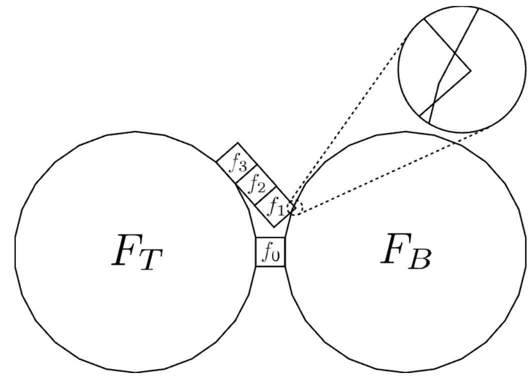
定理３ ② の証明

【証明のつづき(2)】

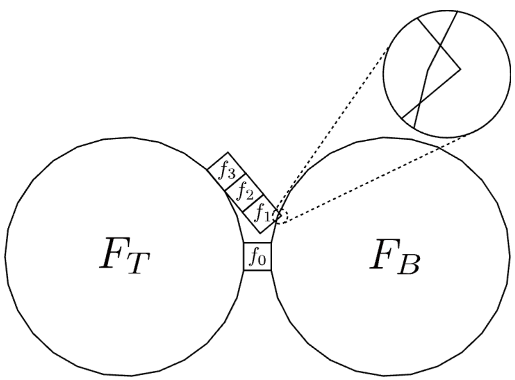
$25 \leq n \leq 28$ のときも， $n = 24$ と同様に重なりを持つ辺展開図が存在する



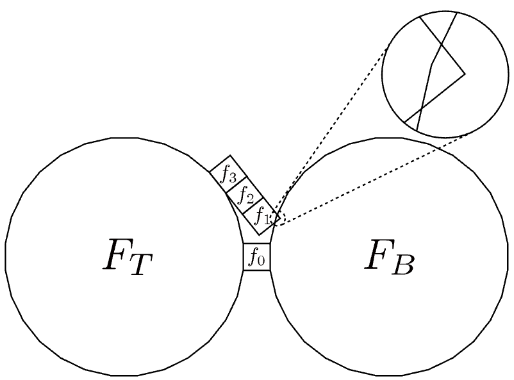
アルキメデスの25角柱



アルキメデスの26角柱



アルキメデスの27角柱



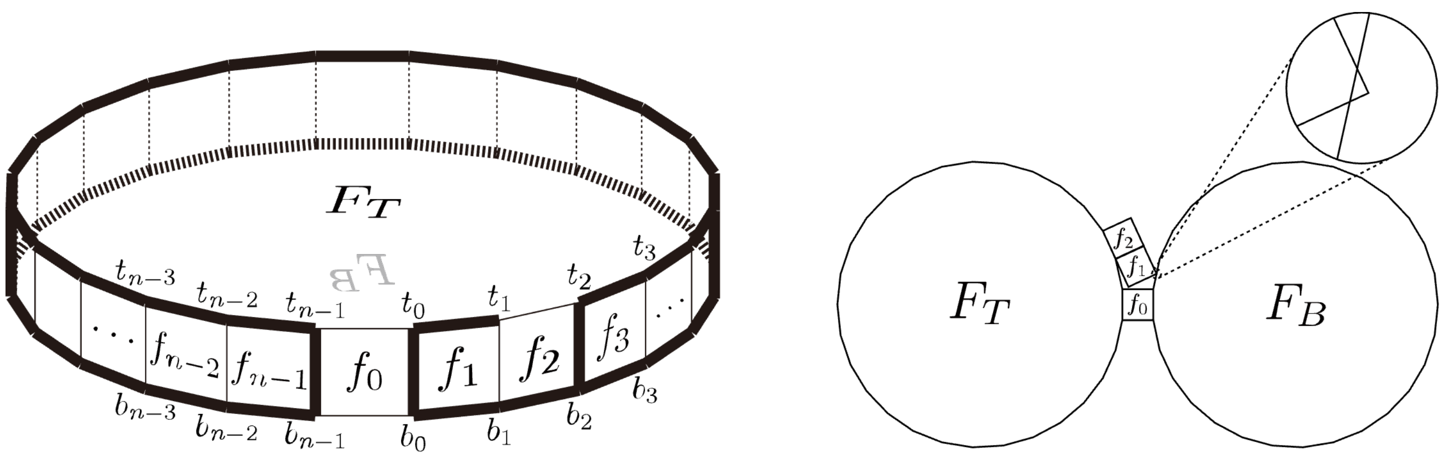
アルキメデスの28角柱

定理３ ② の証明

【証明のつづき(3)】

$n = 29$ のときも重なりを持つ辺展開図が存在する

面の集合 $\{F_B, f_0, F_T, f_2, f_1\}$ で構成される部分的な辺展開図から確認できる



アルキメデスの29角柱の部分的な辺展開図

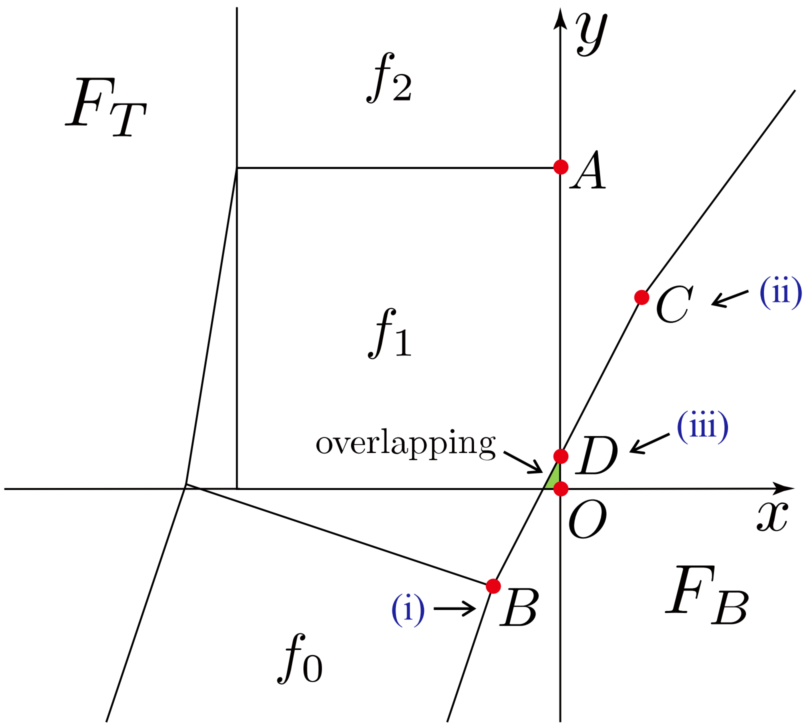
補題 1

$n \geq 29$ のとき， $(t_0, t_1), (t_0, b_0), (b_0, b_1), (b_1, b_2)$ を切り， $(t_{n-1}, t_0), (b_{n-1}, b_0)$, (t_1, t_2) を切らないアルキメデスの n 角柱の辺展開図は重なりを持つ

定理３ ② の証明

【証明のつづき(4)】

面 f_1 と面 F_B が重なっていることを示せば良い



アルキメデスの n 角柱 ($n \geq 29$) の
部分的な辺展開図の一部の拡大

各頂点を以下のように定義する

- 点 O ： 原点 $(0, 0)$
- 点 A ： $(0, 1)$
- 点 D ： 線分 BC と y 軸の交点

重なりを持つための十分条件

(i)　点 B が第３象限に存在

(ii)　点 C が第１象限に存在

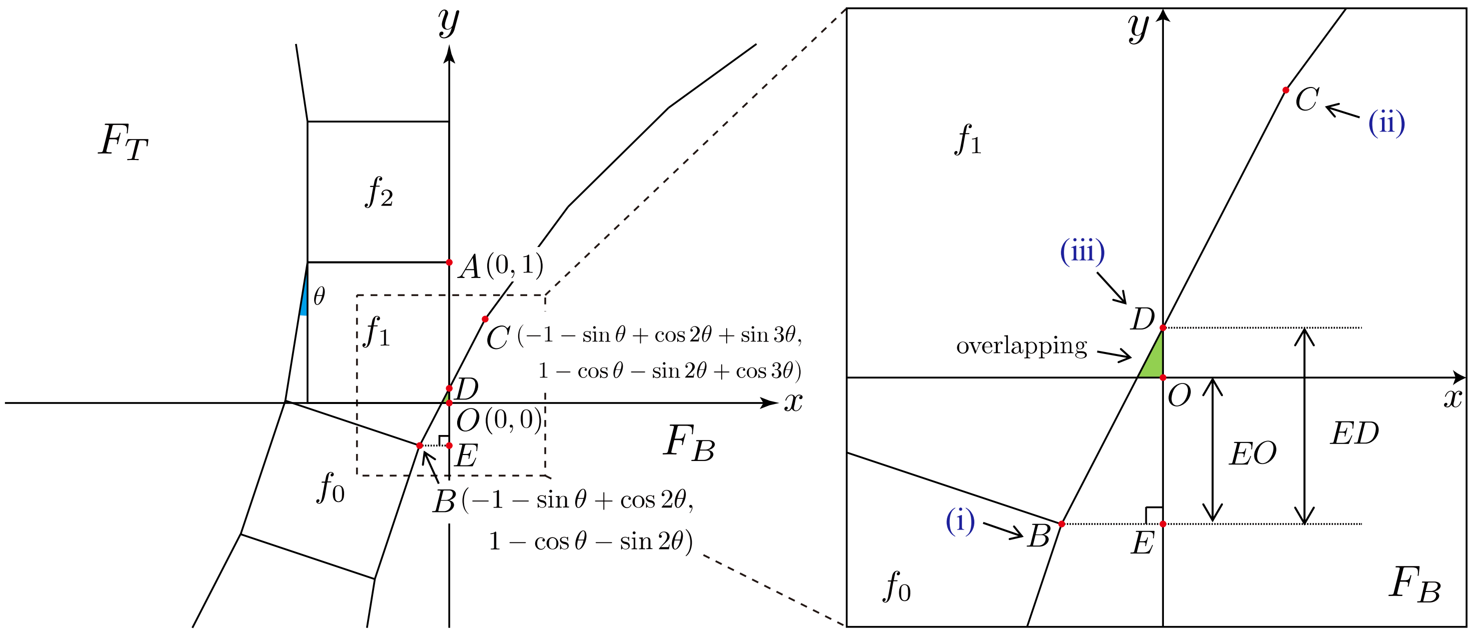
(iii)　点 D の y 座標が正

定理３ ② の証明

【証明のつづき(5)】

正 n 角形の外角を $\theta = 2\pi/n$とする

（n の定義域： $n \geq 29$ ➡ θ の定義域： $0 < \theta \leq \frac{2\pi}{29}$ ）



解析的な計算（詳細は省略）により (i) 〜 (iii) が成立する. □

定理４ ② の証明

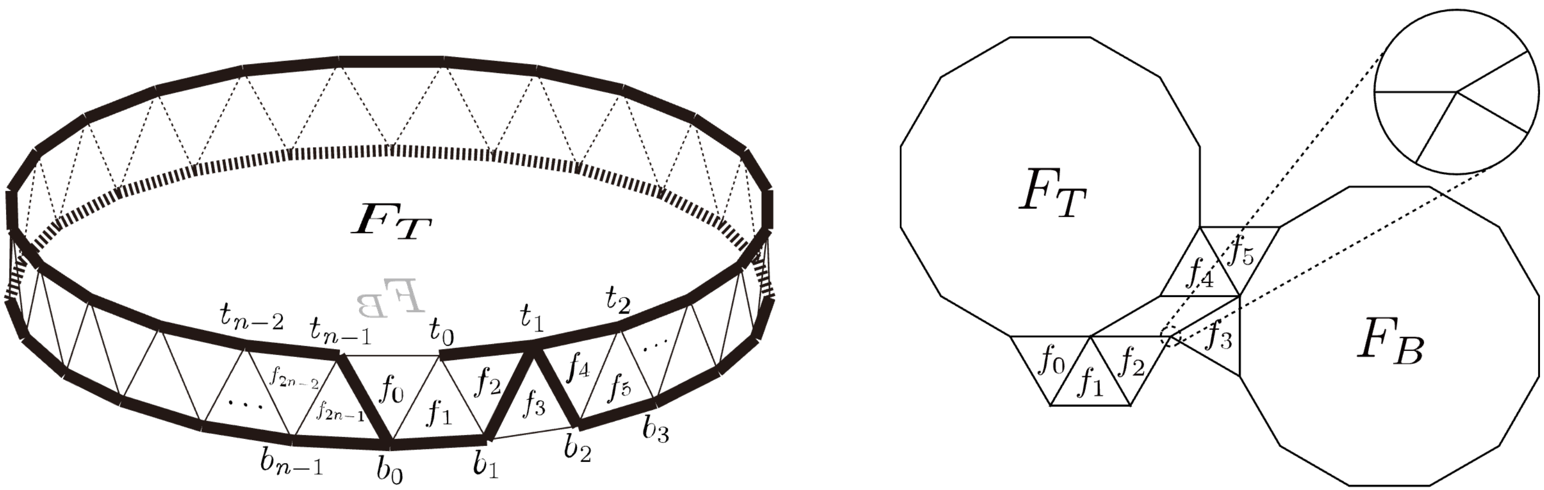
定理 4

② $n \geq 12$ のとき，アルキメデスの n 反角柱には重なりを持つ辺展開図が存在する

【証明】

$n = 12$ のとき，重なりを持つ辺展開図が存在する

面の集合 $\{f_3, F_B, f_5, f_4, F_T, f_0, f_1, f_2\}$ で構成される部分的な辺展開図から確認できる

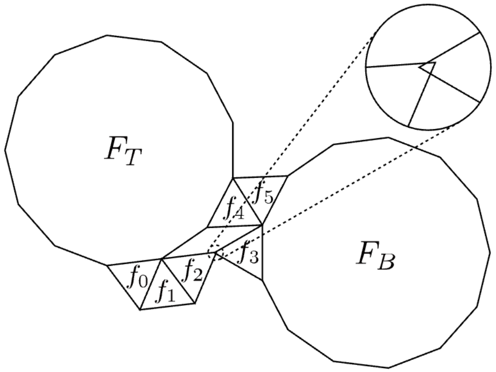


アルキメデスの12反角柱の部分的な辺展開図

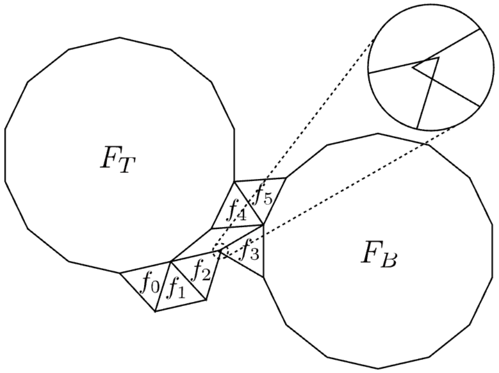
定理４ ② の証明

【証明のつづき(2)】

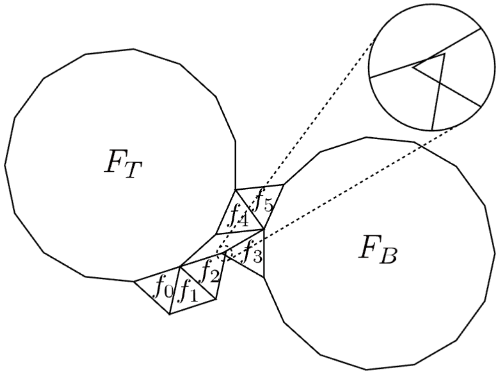
$13 \leq n \leq 16$ のときも， $n = 12$ と同様に重なりを持つ辺展開図が存在する



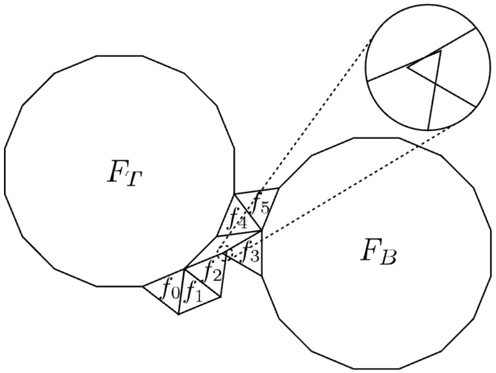
アルキメデスの13反角柱



アルキメデスの14反角柱



アルキメデスの15反角柱



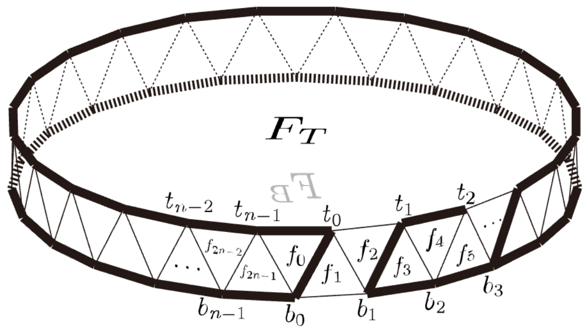
アルキメデスの16反角柱

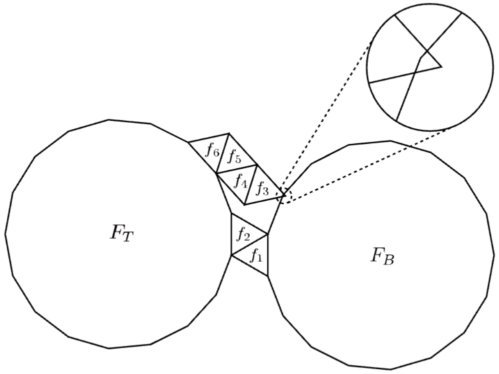
定理４ ② の証明

【証明のつづき(3)】

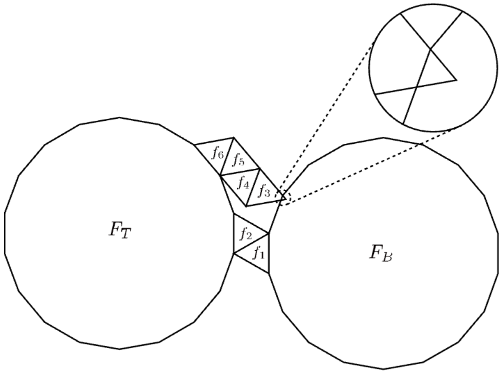
$n=17,18$ のときも重なりを持つ辺展開図が存在する

面の集合 $\{F_B, f_1, f_2, F_T, f_6, f_5, f_4, f_3\}$ で構成される部分的な辺展開図から確認できる





アルキメデスの17反角柱



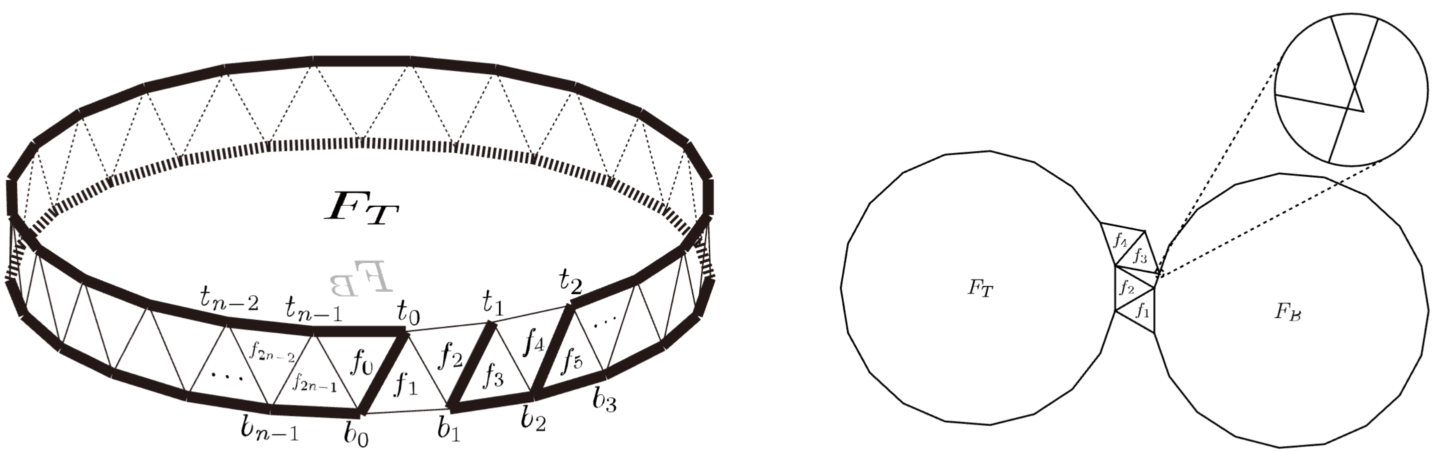
アルキメデスの18反角柱

定理４ ② の証明

【証明のつづき(4)】

$n = 19$ のときも重なりを持つ辺展開図が存在する

面の集合 $\{F_B, f_1, f_2, F_T, f_4, f_3\}$ で構成される部分的な辺展開図から確認できる



アルキメデスの19反角柱の部分的な辺展開図

補題 2

$n \geq 19$ のとき，$(t_1, b_1), (b_1, b_2)$ を切り，$(b_0, b_1), (t_0, t_1), (t_0, b_1), (t_1, t_2), (t_1, b_2)$ を切らないアルキメデスの n 反角柱の辺展開図は重なりを持つ

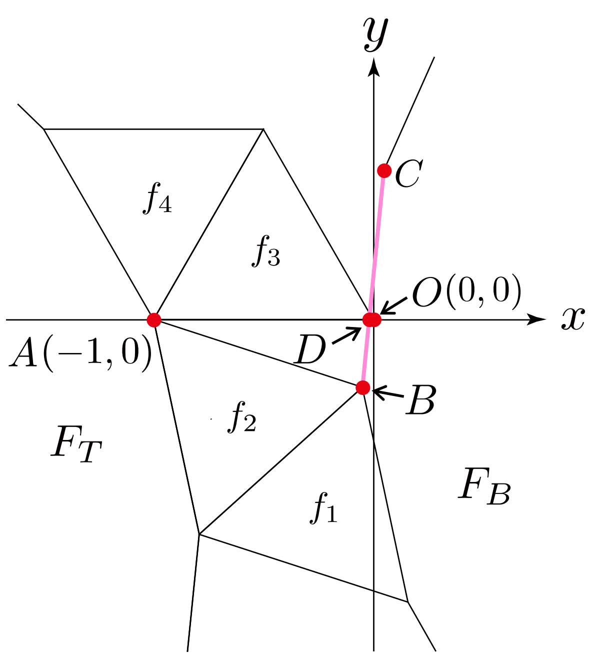
定理４ ② の証明

【証明のつづき(5)】

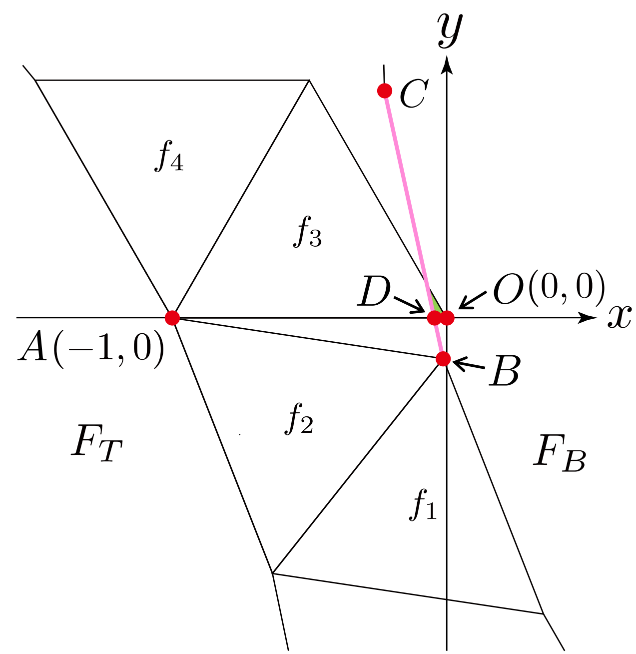
点 O を原点 $(0,0)$，点 A の座標を $(-1,0)$ とする

n の値によって線分 BC の傾きが変わる

➡ (I) $19 \leq n \leq 24$ のとき，(II) $n \geq 25$ のときで場合分け



(I) $19 \leq n \leq 24$ のとき（傾き：正）



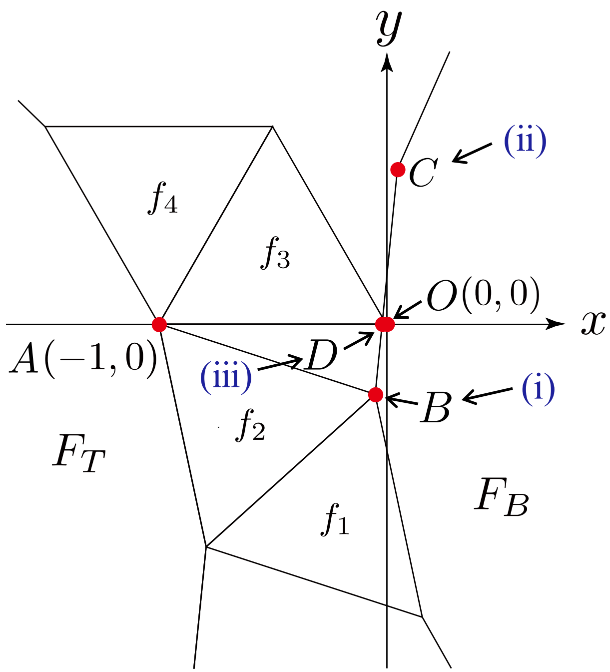
(II) $n \geq 25$ のとき（傾き：負）

定理４ ② の証明

【証明のつづき(6)】

(I) $19 \leq n \leq 24$ のとき

面 f_3 と面 F_B が重なっていることを示せば良い



アルキメデスの n 反角柱 $(19 \leq n \leq 24)$ の

部分的な辺展開図の一部の拡大

各頂点を以下のように定義する

- 点 O ： 原点 $(0,0)$
- 点 A ： $(-1,0)$
- 点 D ： 線分 BC と x 軸の交点

重なりを持つための十分条件

(i) 点 B が第３象限に存在

(ii) 点 C の y 座標が正

(iii) 点 D の y 座標が -1 以上 0 以下

定理４ ② の証明

【証明のつづき(7)】

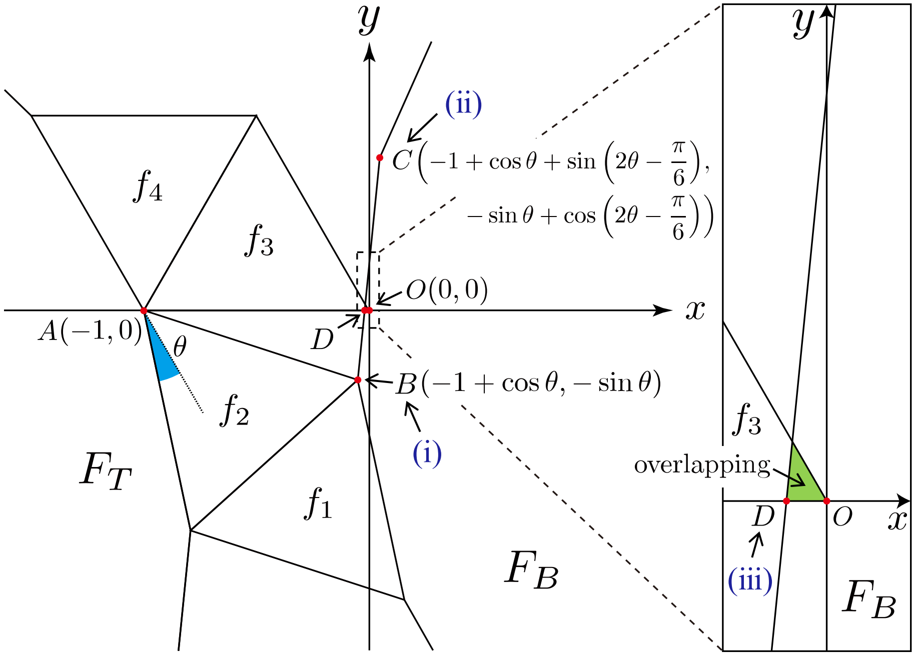
(I) $19 \leq n \leq 24$ のとき

正 n 角形の外角を $\theta = 2\pi/n$とする

n の定義域：$19 \leq n \leq 24$

⬇

θ の定義域：$\dfrac{2\pi}{24} \leq \theta \leq \dfrac{2\pi}{19}$



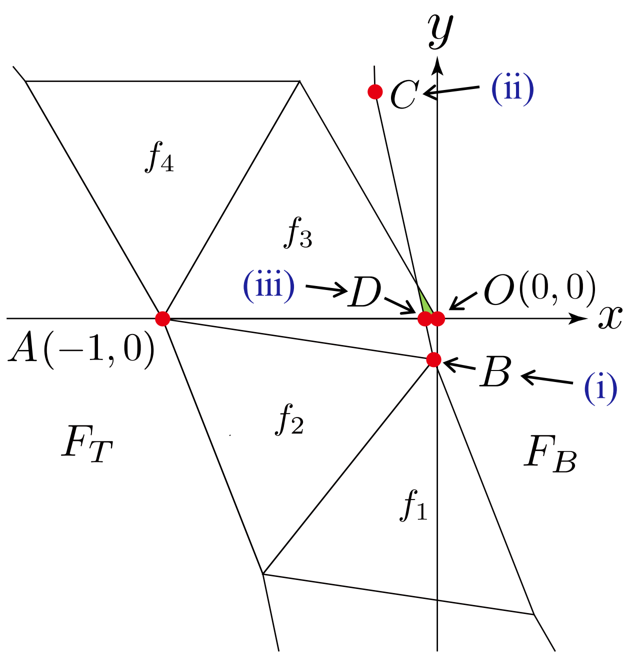
解析的な計算（詳細は省略）により (i) ～ (iii) が成立する.

定理４ ② の証明

【証明のつづき(8)】

(II) $n \geq 25$ のとき

面 f_3 と面 F_B が重なっていることを示せば良い



アルキメデスの n 反角柱 $(n \geq 25)$ の
部分的な辺展開図の一部の拡大

各頂点を以下のように定義する

- 点 O ： 原点 $(0,0)$
- 点 A ： $(-1,0)$
- 点 D ： 線分 BC と x 軸の交点

重なりを持つための十分条件

(i) 点 B が第３象限に存在

(ii) 点 C の y 座標が正

(iii) 点 D の y 座標が -1 以上 0 以下

定理４ ② の証明

【証明のつづき(9)】

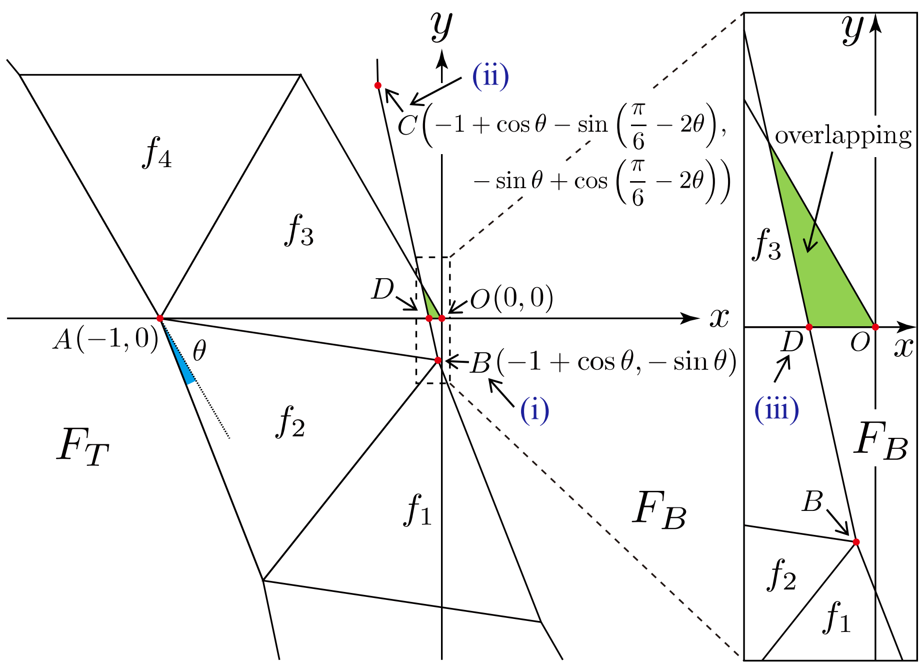
(II) $n \geq 25$ のとき

正 n 角形の外角を $\theta = 2\pi/n$とする

n の定義域：$n \geq 25$

⬇

θ の定義域：$0 < \theta \leq \frac{2\pi}{25}$



解析的な計算（詳細は省略）により (i) 〜 (iii) が成立する. □