2022 年度冬の LA シンポジウム [9]

直方体の格子展開図における重なり

塩田 拓海 * 　　鎌田 斗南 † 　　上原 隆平 †

1 はじめに

多面体の展開図の研究は，1525 年に Albrecht Dürer が著した “Underweysung der messung mit dem zirckel un richt scheyt” [3] が起源であるとされている [4]．彼はこの本の中で，いくつかの多面体を，辺に沿うように切り開くことで得られる平坦な多角形（辺展開図）で表現している．この本の中に現れる凸多面体の辺展開図は全て「どの 2 つの面も重なりや接触を持たない」という条件を満たすように描画されている．しかし，多面体の辺展開図が常にこの条件を満たすわけではない（図 1，並木と福田による重なりをもつ辺展開図の例 [10]）．重なりを持たない辺展開図について，次の問題が未解決問題として知られている．

未解決問題 1 ([4], Open Problem 21.1)**.** 全ての凸多面体は，重ならないよう辺展開できるか？

重なりを持つ展開図については，異なる条件設定の下で研究が行われている．1998 年に Biedl らが，2003 年に Grünbaum が，全ての辺展開図が重なる凹多面体を発見した [1, 6]．また，全ての面が正多角形から構成される凸多面体である整面凸多面体についての，重なりを持つ辺展開図の有無が完全に決定されている（表 1）.

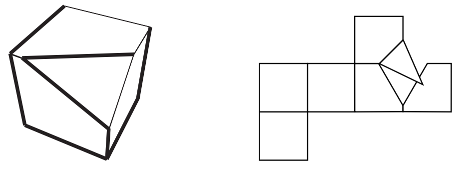


図 1: 角が切り落とされた立方体と重なりを持つ辺展開図 [10]．左側の多面体の太線に沿って切り開くことで，右側の辺展開図が得られる．

表 1: 整面凸多面体の辺展開図における重なり

整面凸多面体	重なりを持つ辺展開図が存在するか？	
正多面体（全 5 種類）	No [8]	
半正多面体（全 13 種類）	7 種類は No [17, 14] 6 種類は Yes [2, 8, 14]	
アルキメデスの n 角柱 ($n \geq 3$)	$3 \leq n \leq 23$ のとき No $n \geq 24$ のとき Yes	[14]
アルキメデスの n 反角柱 ($n \geq 3$)	$3 \leq n \leq 11$ のとき No $n \geq 12$ のとき Yes	[14]
ジョンソンの立体（全 92 種類）	48 種類は No 44 種類は Yes	[13]

凸多面体に対して, 辺に沿ってのみでなく面も切っても良いとした展開（「一般展開」と言う）の研究もある．Sharir と Schorr は，いかなる凸多面体も，面を切っても良いとしたとき，重なりを持たなよう展開できることを示した [12].

辺長が $1 \times 1 \times 1$ の立方体を複数つなぎ合わせることでできる直方体を対象とし，単位正方形の辺に沿って切り開くというものがある．2008 年に宇野は $1 \times 1 \times 3$ の直方体に対して, 単位正方形の辺に沿って切り開くことで図 2 に示すような重なりを持つ展開図が存在することを示した．また，上原は $1 \times 2 \times 3$ の直方体に対して, 単位正方形の辺に沿って切り開くことで図 3 に示すような重なりを持つ展開図が存在することを示した．これらの直方体が重なりを持つように展開できることから，以下の定理が示された.

定理 1 ([16])**.** $1 \times 1 \times z$ ($z \in \mathbb{N}, z \geq 3$) の直方体は，単位正方形の辺に沿って切り開くことで，面どうしが重なる展開図が存在する.

*九州工業大学
†北陸先端科学技術大学院大学

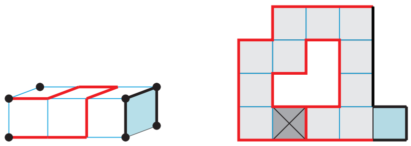


図 2: $1\times1\times3$ の直方体に対して，単位正方形の辺に沿って切り開くことで得られる展開図．左図の太線に沿って切り開くことで右図の重なりを持つ展開図が得られる（注：水色の線は太線ではない）．灰色にバツ印の箇所が面どうしの重なりを表す．

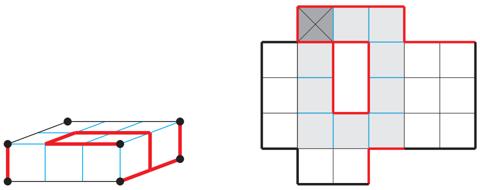


図 3: $1\times2\times3$ の直方体に対して，単位正方形の辺に沿って切り開くことで得られる展開図．左図の太線に沿って切り開くことで右図の重なりを持つ展開図が得られる（注：水色の線は太線ではない）．濃い灰色にバツ印の箇所が面どうしが重なっていることを表す．

定理 2 ([9])**.** $1\times y\times z$ $(y,z\in\mathbb{N}, y\geq2, z\geq3)$ の直方体は，単位正方形の辺に沿って切り開くことで，面どうしが重なる展開図が存在する．

定理 1 は，図 4 の左における切る線（赤線）／切らない線（水色の線）と，図 2 における切る線／切らない線を一致させることで，図 4 の右の灰色で示す展開図の一部が必ず含まれることから示すことができる．また，定理 2 も同様にして，図 3 の左における切る線（赤線）／切らない線（水色の線）と，図 5

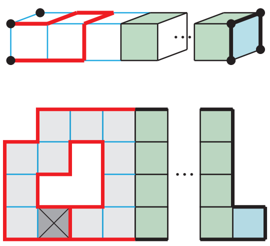


図 4: $1\times1\times z$ の直方体に対して，単位正方形の辺に沿って切り開くことで得られる展開図．上図の太線に沿って切り開くことで下図が得られる．濃い灰色にバツ印の箇所が面どうしの重なりを表す．

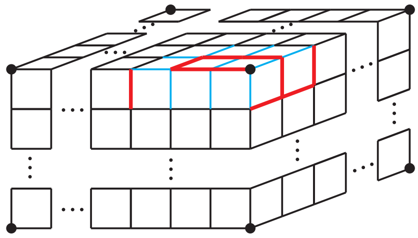


図 5: $1\times y\times z$ $(y\geq2, z\geq3)$ の直方体

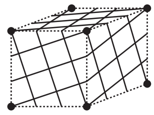
における切る線／切らない線を一致させることで，図 3 の右の灰色で示す展開図の一部が必ず含まれることから示すことができる．また，2018 年に Hearn が $1\times1\times2$ の直方体に対して，杉浦が $2\times2\times2$ の立方体に対して，それぞれ以下の定理をコンピュータで確認することで示した．

定理 3 ([7])**.** $1\times1\times2$ の直方体は，単位正方形の辺に沿って切り開いても，面どうしが重なる展開図が存在しない．

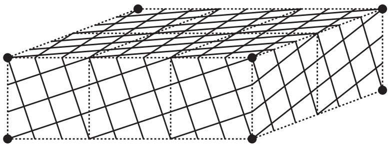
定理 4 ([15])**.** $2\times2\times2$ の立方体は，単位正方形の辺に沿って切り開いても，面どうしが重なる展開図が存在しない．

本研究では，これを更に一般化した，格子立方体・格子直方体の格子展開図というものを提案する．格子立方体とは，正方格子上に選んだ 2 点を 1 辺とする面を組み合わせることでできる立方体であり (図 6(a))，格子直方体とは，格子立方体を複数個つなぎ合わせることでできる直方体のことである（図 6(b)）．格子展開図とは，格子立方体・格子直方体の面上の格子に沿って切れ込みを入れることで得られる展開図である（図 6(c)）．また，上記の「直方体を単位正方形の辺に沿って切り開く」という研究では「面どうしが重なる」展開図のみを「重なるもの」としていた．本研究では，これに加え「辺が接触する」展開図や「頂点が接触する」展開図が存在するかの判定も行った．その結果，下記に示す定理を得た．

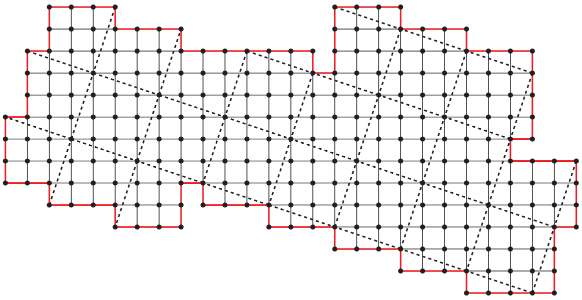
定理 5. *格子立方体の 1 辺の長さ（正方格子上の 2 点を結ぶユークリッド距離）L' および，格子直方体*



(a) 格子立方体



(b) 格子直方体



(c) 格子展開図

図 6: (b) は格子立方体 (a) を 6 個つなぎ合わせることでできる格子直方体．(c) は，格子直方体 (b) を格子展開することで得られる格子展開図（点線は折り線であるため，切り開いてはいけない）．

の 3 辺の長さ D を次のように定義する．

$$L' = \sqrt{a^2 + b^2} \ (a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^+, a \geq b, \gcd(a, b) = 1)$$

$$D = xL' \times yL' \times zL' \ (x \leq y \leq z, x, y, z \in \mathbb{N})$$

このとき以下のことが成り立つ．

- $D = 1\times1\times1$ $(a = 1, b = 0, x = y = z = 1)$ および $D = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ $(a = b = x = y = z = 1)$ の格子直方体には，重なりを持つ格子展開図が存在しない．
- $D = 1 \times 1 \times 2$ $(a = 1, b = 0, x = y = 1, z = 2)$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図，辺が接触する格子展開図は存在しないが，頂点が接触する格子展開図は存在する．
- $D = 1\times2\times2$ $(a = 1, b = 0, x = 1, y = z = 2)$ および $D = 2\times2\times2$ $(a = 1, b = 0, x = y = z = 2)$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図は存在しないが，辺および頂点が接触する格子展開図が存在する．
- 上記以外の格子直方体 D には，面どうしが重なる格子展開図，辺および頂点が接触する格子展開図が必ず存在する．

この定理において「存在しない」ことを示すために，展開図が重なりを持ちうるパターンを列挙するアルゴリズムである回転展開 [14] を用いた．また「存在する」ことを示すために，特定の展開図の一部が重なりを持つことを示し，それを埋め込むという手法を用いた．

2 準備

2.1 グラフ

$G = (V, E)$ をグラフとし，V を頂点の集合，$E \subseteq V \times V$ を辺の集合とする．頂点の列 $(v_1, \ldots, v_k)$ で，全ての頂点が異なり，かつ連続する 2 つの頂点が隣接しているものを**パス**という．グラフの任意の 2 頂点の間にパスが存在するとき，グラフは**連結**であるという．パスのうち，起点と終点が一致するものを**閉路**という．$T = (V_T, E_T)$ が連結かつ閉路を持たないならば，そのグラフは**木**という．木 $T = (V_T, E_T)$ が $V_T = V$ かつ $E_T \subseteq E$ ならば，$G = (V, E)$ の **全域木**である．

2.2 凸多面体の辺展開図

多面体とは，少なくとも 4 つの多角形 (面) を辺でつないだ 3 次元の物体である．P を多面体とするとき，P はグラフ $G_P = (V_P, E_P)$ として見ることができる．ここで V_P は P の頂点の集合，E_P は辺の集合である．P の**辺展開図**とは，P の辺のみを切断してできる展開図である．P の辺展開図について，以下の補題がある．

補題 1 (例えば [4], Lemma 22.1.1 を参照)**.** P の辺展開の切り口は，G_P の全域木を形成する．

この補題は，G_P の全域木が P の辺展開図に対応することを意味する．P の 2 つの面は，共通の辺を含むとき**隣接する**という．P の**双対グラフ**とは，多

面体の面に各頂点が対応し，対応する 2 つの面が隣接するときのみ 2 つの頂点が連結するグラフのことである．P の双対グラフの全域木は，辺展開図と考えることができる [11].

多面体 P の辺展開図が重なっているかどうかを判定するために，次の命題を用いる．

命題 1 ([8]). ある辺展開図における任意の *2* つの面について，その外接円が重なっていなければ，その辺展開図は重なりを持たない．

この命題は，辺展開図が重なるための必要条件である．この命題を用いることで，辺展開図の重なりを効率的に確認することができる．そして，P の 2 つの面の外接円が重なっている場合, 数値計算によって 2 つの面の重なりを確認する．

2.3　回転展開

P の双対グラフ $D(P)$ の全域木 $T(U)$ は, 辺展開図 U を表す．$D(P)$ の全ての全域木を列挙し, 対応する展開図の重なりを確認することで，重なり合う全ての辺展開図を決定することができる．しかし，一般に多面体には多数の全域木が存在する．そこで考案されたのが**回転展開**というアルゴリズムである [14]. このアルゴリズムは，補題 2 を用いることで，全域木ではなくパスを列挙し，重なりを持つ辺展開図をを効率的に探索することができる．

補題 2 ([5, 17]). 多面体 P の重なりを持つ辺展開図を U とし，$T(U)$ を双対グラフ $D(P)$ の U に対応する全域木とする．このとき，$T(U)$ には v と v' の *2* つの頂点が存在し, v から v' を結ぶパスは, U の中で v と v' に対応する面を含む連続する面の列を表す．

回転展開による，多面体 P におけるパスの重複を検出するための手順を説明する．まず P を平面上に置き，P の底面を**開始面** f_s とする．そして，現在の底面を辺展開し，P を回転させる．ここで，現在の底面を f_ℓ とし，これを**終端面**と呼ぶ．なお，P を平面上に置いた時点では，f_ℓ は開始面 f_s である．回転展開では，f_ℓ に隣接する面が P に存在するかどうか

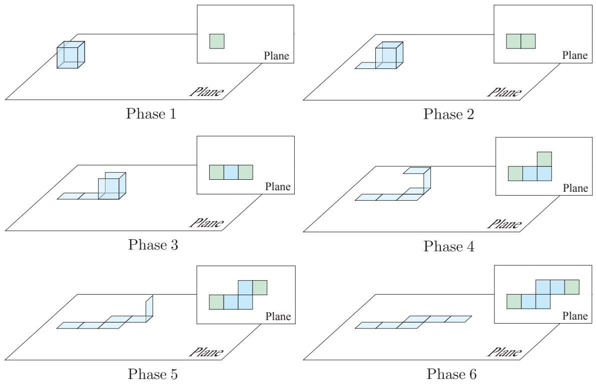


図 7: 回転展開の説明図

を最初にチェックする．その後，隣接する各面 f に対して，以下の 3 つのステップを実行する．

ステップ 1 f_ℓ の辺のうち，f と共有する辺以外を切り，多面体 P を底面の f になるよう転がし，f_s と f の重複を確認する．

ステップ 2 辺展開の重なりを確認するために，f_ℓ から共有している辺の角度を使用して f の外心の座標を計算し，命題 1 または数値計算を使用して f_s と f の重複を確認する．

ステップ 3 f_s と f に対応する頂点を v_{f_s} と v_f とする．f_s と f が重複する場合は，v_{f_s} から v_f へのパスに対応する辺展開図の一部を出力する．重複しない場合は，手順を再帰的に実行する．

回転展開の説明図を図 7 に示す．回転展開には, 種々の高速化手法があるが，その詳細は [14] を参考されたし．

2.4　格子立方体・格子直方体の格子展開図

1 マスの大きさを 1×1 の正方格子上に 2 点を選び，その 2 点を 1 辺とする正方形を作る．この正方形を 1 面にして組み立てた立方体を**格子立方体**といい，これを P_c とする．P_c の 1 辺の長さ L は，下記の 3 ステップで求まる（図 8 に説明図を示す）．

ステップ 1 正方格子上に原点 $O(0,0)$ を決める

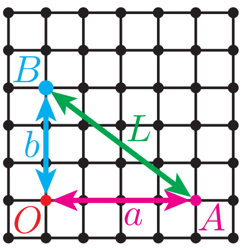


図 **8:** 格子立方体 P_c の 1 辺の長さ L の決め方

ステップ 2 点 A をの座標を $(a, 0)$，点 B の座標を $(0, b)$ とする（$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^+, a \geq b$）

ステップ 3 点 A と点 B のユークリッド距離 $\sqrt{a^2 + b^2}$ を計算し，これを格子立方体の 1 辺の長さ L とする

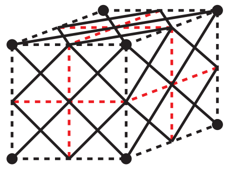
格子立方体を複数個つなぎ合わせてることでできる直方体を**格子直方体**といい，これを P_d とする．格子直方体の 3 辺の長さ D は，下記の 2 ステップで求まる．

ステップ 1 格子立方体の 1 辺の長さを $L' = \sqrt{a^2 + b^2}$ $(a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^+, a \geq b, \gcd(a, b) = 1)$ とする

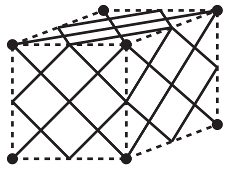
ステップ 2 $D = xL' \times yL' \times zL'(x, y, z \in \mathbb{N}, x \leq y \leq z$ とする（以降，$D =$ を省略して，格子直方体を $xL' \times yL' \times zL'$ で表記する）

ここで，L' には $\gcd(a, b)$ という条件が加わっているという点に注意する．これは，$\gcd(a, b) = c$ とするとき，格子直方体 $c(xL') \times c(yL') \times c(zL')$（格子直方体 $xL' \times yL' \times zL'$ の各辺を c 倍したもの）と $x(cL) \times y(cL) \times z(cL)$)（格子立方体 $cL \times cL \times cL$ の 3 辺をそれぞれ x, y, z 倍したもの）は，同じ格子直方体となるからである（例を図 9 に示す）．また，$P_c \subset P_d$ という関係が成り立つ（以降，格子立方体は格子直方体と表記する）．

P_d の**格子展開図**とは，辺展開図では辺のみ切って良いとしていたものを拡張して，格子に沿ってのみを切断してよいとしたものとする．格子直方体の中には，特定の切り開き方をすることで，面どうしが重なりを持つように展開されるものがある（図 10(a)）．



(a) $a = b = 1, x = y = z = 2$ の格子直方体



(b) $a = b = 2, x = y = z = 1$ の格子直方体

図 **9:** (a) は $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ の格子直方体の 3 辺を 2 倍した格子直方体（$x = y = z = 1$，2 倍の 2 が c に該当）．(b) は $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ の格子直方体（$x = y = z = 1$，$c = \gcd(a, b) = 2$）．(a) と (b) の違いは赤線の部分（折り線）であり同じ形である．

本研究では，この「面どうしが重なる」展開図に加えて，「辺が接触する」展開図（図 10(b)），「頂点が接触する」展開図（図 10(c)）も重なりがある展開図とし，3 つを区別して扱う．

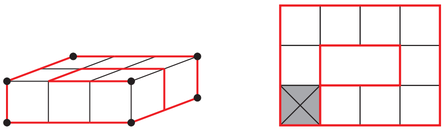
ここで，元の格子直方体において，辺もしくは頂点が一致している場合は「辺が接触する」「頂点が接触する」と言わない点に注意する（図 11）．

3 格子展開への回転展開の拡張

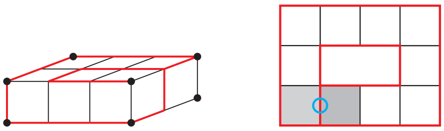
格子直方体 P_d は，グラフ $G_d = (V_d, E_d)$ として見ることができる．ここで V_L は P_d 上の格子の頂点の集合，E_d は P_d 上の格子の辺の集合である．ゆえに，P_d の双対グラフ $D(P_d)$ を考えることで回転展開を使うことができる．しかし，図 12 の例に示すように，格子展開図は $D(P_d)$ の全域木に対応するとは限らない．そのため，格子直方体に対して，単純に回転展開を適用すると，図 13(a) に示すような冗長な部分を含むパスも列挙してしまう．そこで，回転展開に対して「1 ステップ前から見たときの転がす方向」という情報を追加する．これを，下記に示す文字で表す．

R： 1 ステップ前から見て右向きに転がす
C： 1 ステップ前から見て真っ直ぐに転がす
L： 1 ステップ前から見て左向きに転がす

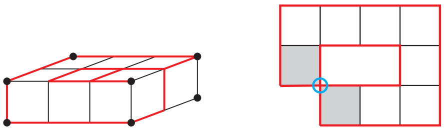
そして，回転展開を用いることで得られるパスを文字列で表す（図 14 に，その例を示す）．回転展開で



(a) 面どうしが重なる展開図



(b) 辺が接触する展開図（水色の円の部分の辺どうしが接触している）



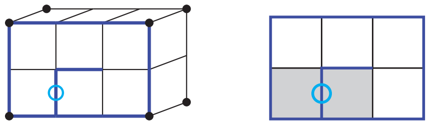
(c) 頂点が接触する展開図（水色の円の部分の頂点どうしが接触している）

図 10: 格子展開図における重なり．（それぞれ，左側の赤線に沿って切ることで，右の格子展開図が得られる．）

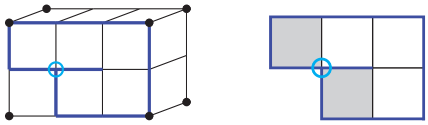
は，第 1 ステップは必ず真っ直ぐの方向に転がすものとする．ゆえに，第 1 ステップで得られるパスは “C” と表すことができる．ここで，下記の補題が言える．

補題 3. 回転展開において転がすことで得られるパスを文字列で表すとき，*“RR”* もしくは *“LL”* が含まれているならば，それは冗長な部分を含むパスである．

Proof. 回転展開における第 2 ステップでは，① 右向きに転がす（このときの文字列は “CR”, 図 15(a)）② 真っ直ぐに転がす（このときの文字列は “CC”, 図 15(b)）③ 左向きに転がす（このときの文字列は “CL”, 図 15(c)）の 3 つに場合分けが起きる．この第 2 ステップの後に “RR”，つまり右向きに転がすという操作を 2 回繰り返すと，それぞれ ① “CRRR”（図 16(a)）② “CCRR”（図 16(b)） ③ “CLRR”（図 16(c)）となる．まず，① の場合，既ににパスを構成する面として使用している面に戻ってきているため，このような状況は起き得ない．また，② の場合と，③ の場合は，それぞれ “CR” で表されるパス（図 15(a)）および，“CC” で表されるパス（図 15(b)）表されるパスで，既に重なるかどうか判定されている（第 2 ステップで，それぞれ判定済み）．ゆえに，“RR” が含まれているならば，そのパスは冗長な部分を含む．“LL” が含まれる場合も，同様にして示すことができる． □



(a) 辺が接触しているとは言わない例（水色の円の部分の辺どうしが接触しているが，展開する前から辺は接触していた）



(b) 頂点が接触しているとは言わない例（水色の円の部分の頂点どうしが接触しているが，展開する前から頂点は接触していた）

図 11: 重なっているとは言わない例（それぞれ，左側の青線に沿って切ることで，右の格子展開図が得られる．）

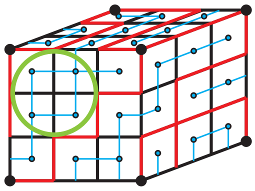
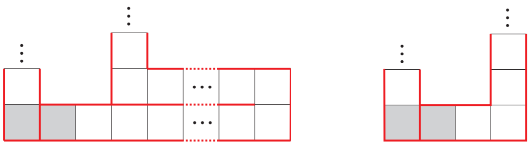


図 12: 格子直方体の双対グラフ（各面の中心を頂点，面どうしがつながっている頂点の間に辺を張っている）．赤線に沿って切り開くことで，この格子直方体は展開することができるが，緑色の丸で囲んだ部分に閉路ができており全域木ではない．

格子直方体 P_d の格子展開図が重なっているかどうか，また，どのように重なっているかの区別も含めた判定するために下記の命題を用いる．

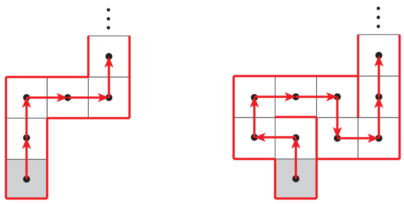
命題 2. 回転展開で得られるパスにおける一方の端点の面の中心座標を $(0,0)$ とする．そして，パスのもう一方の面の中心座標を，転がしながら逐次計算していく（図 *17(a)*）．このとき，以下のことが成り立つ．

- パスにおけるもう一方の端点の面の中心座標が $(0,0)$ であるとき，格子展開図は面どうしが重



(a) 回転展開では不要なパス　**(b)** 求めたいパス

図 13: (a) のパスにおける灰色で塗った 2 面の位置関係は，(b) のパスで探索しているため，(a) のパスは考慮する必要がない．



(a) “CCRCL” で表されるパス　**(b)** “CLRRCRLLC” で表されるパス

図 14: 回転展開で得られるパスの文字列表記

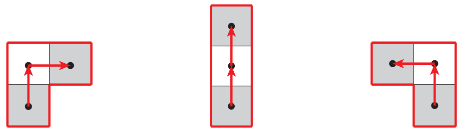
なる（図 *17(b)* 赤色の面）

- パスにおけるもう一方の端点の面の中心座標が $(0,1),(-1,0),(0,-1)$ であるとき，格子展開図は辺が接触する（図 *17(b)* 青色の面）
- パスにおけるもう一方の端点の面の中心座標が $(1,1),(1,-1),(-1,-1),(-1,1)$ であるとき，格子展開図は頂点が接触する（図 *17(b)* 緑色の面）

4　定理 5 の証明

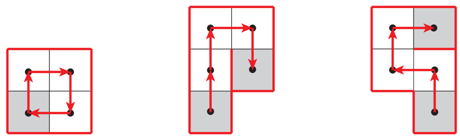
4.1　$L' = 1$ $(a = 1, b = 0)$ の格子直方体

$1\times1\times1$ $(x = y = z = 1)$ の格子直方体には, 面どうしが重なる格子展開図, 辺が接触する格子展開図, 頂点が接触する格子展開図のいずれも存在しないことは自明である．一方で, 定理 3, 定理 4 より, $1\times1\times2$ $(x = y = 1, z = 2)$ および, $2\times2\times2$ $(x = y = z = 2)$ の格子直方体には, 面どうしが重なる格子展開図が存在しないことが分かっているが, 辺が接触する格子展開図および頂点が接触する格子展開図が存在するかは明らかではなかった．また, $1\times2\times2$ $(x = 1, y = z = 2)$



(a) “CR” で表されるパス　**(b)** “CC” で表されるパス　**(c)** “CL” で表されるパス

図 15: 回転展開における第 2 ステップ目



(a) “CRRR” で表されるパス　**(b)** “CCRR” で表されるパス　**(c)** “CLRR” で表されるパス

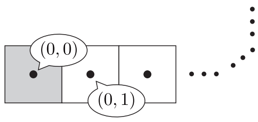
図 16: 回転展開における第 3,4 ステップで “RR” と転がしたときのパス

の格子直方体については，面どうしが重なる格子展開図，辺が接触する格子展開図，頂点が接触する格子展開図のいずれの存在性も確認されていなかった．そこで，拡張した回転展開を用いることで，下記の補題が得られた．

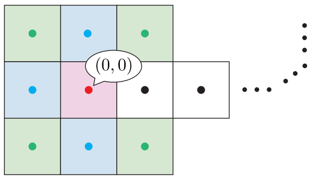
補題 4.

- $1\times1\times2$ の格子直方体には，図 *18* に示すような頂点が接触する格子展開図が存在するが，辺が接触する格子展開図は存在しない．
- $1\times2\times2$ の格子直方体には，図 *19(a)* に示すような辺が接触する格子展開図および，図 *19(b)* に示すような頂点が接触する格子展開図が存在するが，面どうしが重なる格子展開図は存在しない．
- $2\times2\times2$ の格子直方体には，図 *20(a)* に示すような辺が接触する格子展開図および，図 *20(b)* に示すような頂点が接触する格子展開図が存在する．

一方で, 定理 1 および定理 2 より, $x\times y\times z$ $(z \geq 3)$ の格子直方体には, 面どうしが重なる格子展開図, 辺が接触する格子展開図，頂点が接触する格子展開図



(a) 各面の中心の座標を逐次計算



(b) パスにおけるもう一方の端点に位置する面が赤色の面の時は「面どうしが重なる」，青色の面の時は「辺が接触する」緑色の面の時は「頂点が接触する」と判定する

図 17: 回転展開における種類も含めた重なりの判定

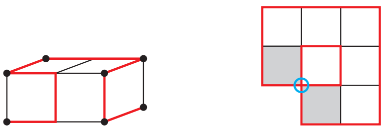


図 18: $1 \times 1 \times 2$ の格子直方体における頂点が接触する格子展開図（左側の赤線に沿って切ることで，右の格子展開図が得られる．水色の円の部分の頂点どうしが接触している）．

の全てが存在する．以上より，格子直方体 $x \times y \times z$ における格子展開図の重なりの有無を示すことができた．

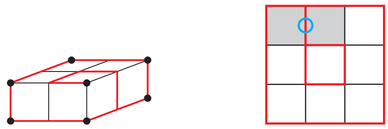
4.2 $L' = \sqrt{2}$ $(a = 1, b = 1)$ の格子直方体

格子直方体 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ に対して，格子展開に拡張した回転展開を用いると，下記の補題が得られる．

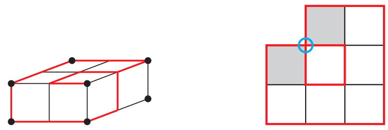
補題 5. $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図，辺が接触する格子展開図，頂点が接触する格子展開図のいずれも存在しない．

一方で，格子直方体 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ に対して，格子展開に拡張した回転展開を用いると，図 21 に示すような面どうしが重なる格子展開図が得られる（付録に実際の立体モデル有り）．この格子展開図を，$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体の手前の 3 面（紙面に見えている側の面）に埋め込むと図 22 に示すようになる．いま，図 22 の桃色・水色・薄緑色の三角形で示す面は埋め込むことができていないが，桃色の面は y 軸の正の方向に，水色の面は x 軸の正の方向に，薄緑色の面も x 軸の正の方向に，折り曲げることで，$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体の表面に埋め込むことができる．一方で，桃色・水色・薄緑色の三角形で示す面の「折り曲げる／折り曲げない」は自由に決めることができるため，図 23 に示すように，x 軸，y 軸，z 軸の，それぞれの方向に大きした格子直方体の手前の 3 面に対して埋め込むことができる．このことから下記の補題が得られる．

補題 6. $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ $(z \geq 2)$ の格子直方体に

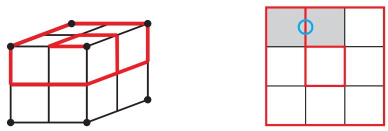


(a) 辺が接触する展開図（水色の円の部分の辺どうしが接触している）

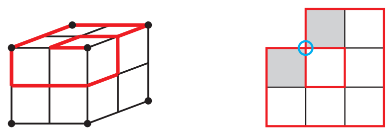


(b) 頂点が接触する展開図（水色の円の部分の頂点どうしが接触している）

図 19: $1 \times 2 \times 2$ の格子直方体における格子展開図（それぞれ，左側の赤線に沿って切ることで，右の格子展開図が得られる．）



(a) 辺が接触する展開図（水色の円の部分の辺どうしが接触している）



(b) 頂点が接触する展開図（水色の円の部分の頂点どうしが接触している）

図 20: $2 \times 2 \times 2$ の格子直方体における格子展開図（それぞれ，左側の赤線に沿って切ることで，右の格子展開図が得られる．）

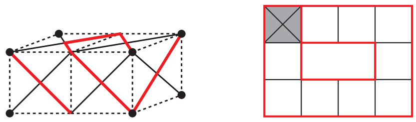


図 21: $\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}$ の格子直方体における面どうしが重なる格子展開図（左側の赤線に沿って切ることで，右の格子展開図が得られる．灰色にバツ印の箇所が面どうしが重なっている）．

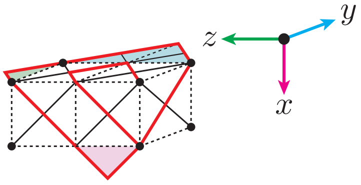


図 22: 図 21 の右の格子展開図を図 21 の左の格子直方体の手前の 3 面に埋め込んだ様子

は，面どうしが重なる格子展開図が存在する．

辺が接触する格子展開図，頂点が接触する格子展開図に対しても，同様のことが言える．以上より，格子直方体 $x\sqrt{2}\times y\sqrt{2}\times z\sqrt{2}$ における格子展開図の重なりの有無を示すことができた．

4.3 $L'=\sqrt{5}$ $(a=2,b=1)$ および $L'=\sqrt{10}$ $(a=3,b=1)$ の格子直方体

格子直方体 $\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$ および $\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}$ に対して，格子展開に拡張した回転展開を用いると，

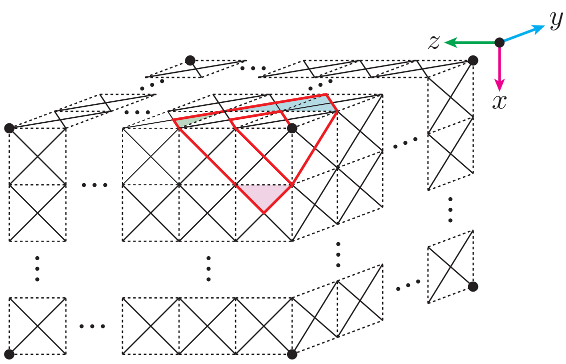


図 23: $x\sqrt{2}\times y\sqrt{2}\times z\sqrt{2}$ $(z\leq 2)$ の格子直方体．赤線に沿って切ることで，図 21 の右の格子展開図が得られる．

s

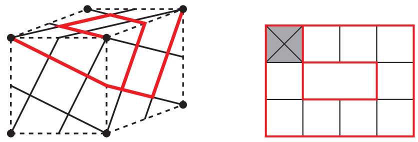


図 24: $\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$ の格子直方体における面どうしが重なる格子展開図（左側の赤線に沿って切ることで，右の格子展開図が得られる．灰色にバツ印の箇所が面どうしが重なっている）．

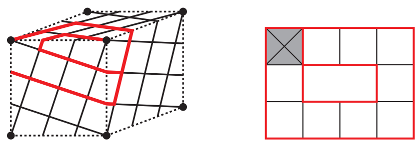
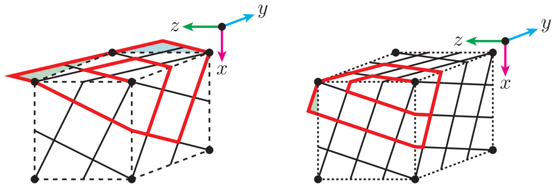


図 25: $\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}$ の格子直方体における面どうしが重なる格子展開図（左側の赤線に沿って切ることで，右の格子展開図が得られる．灰色にバツ印の箇所が面どうしが重なっている）．

それぞれ図 24・図 25 に示す面どうしが重なる格子展開図が得られる． この格子展開図を，それぞれの格子直方体の手前の 3 面に埋め込むと $\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$ の場合は図 26(a) に示すように，$\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}$ の場合は図 26(b) に示すようになる．いま，図 26(a) の水色・薄緑色の三角形で示す面は埋め込むことができていないが，水色および薄緑色の面は x 軸の正の方向に，折り曲げることで，$\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$ の格子直方体の表面に埋め込むことができる．また，図 26(b) の薄緑色の三角形で示す面は埋め込むことができていないが，薄緑色の面は x 軸の正の方向に，折り曲げることで，$\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}$ の格子直方体の表面に埋め込むことができる．一方で水色・薄緑色の三角形で示す面の「折り曲げる／折り曲げない」は自



(a) $\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$ の格子直方体　**(b)** $\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}$ の格子直方体

図 26: 図 24 および図 25 の右の格子展開図をそれぞれの左の格子直方体の手前の 3 面に埋め込んだ様子

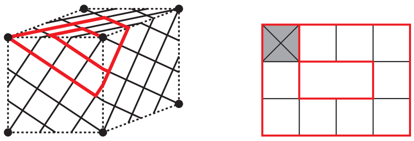


図 27: $\sqrt{13}\times\sqrt{13}\times\sqrt{13}$ の格子直方体における面どうしが重なる格子展開図（左側の赤線に沿って切ることで，右の格子展開図が得られる．灰色にバツ印の箇所が面どうしが重なっている）．

由に決めることができるため，4.2 の議論と同様にして，下記の補題が得られる．

補題 7.

- $x\sqrt{5}\times y\sqrt{5}\times z\sqrt{5}$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図が存在する
- $x\sqrt{10}\times y\sqrt{10}\times z\sqrt{10}$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図が存在する

辺が接触する格子展開図，頂点が接触する格子展開図に対しても，同様のことが言える．以上より，格子直方体 $x\sqrt{5}\times y\sqrt{5}\times z\sqrt{5}$ および $x\sqrt{10}\times y\sqrt{10}\times z\sqrt{10}$ における格子展開図の重なりの有無を示すことができた．

4.4 $L'\geq\sqrt{13}$ の格子直方体

格子直方体 $\sqrt{13}\times\sqrt{13}\times\sqrt{13}$ に対して，格子展開に拡張した回転展開を用いると，図 27 に示す面どうしが重なる格子展開図が得られる．この格子展開図は，格子直方体の手前の 3 面（紙面上に見えている側の面）に埋め込むことができる．格子直方体 $L'\times L'\times L'$ $(L'\geq\sqrt{13})$ に対して，以下の補題が成り立つ．

補題 8. *$L'\times L'\times L'$ $(L'\geq\sqrt{13})$ の手前の 3 面には，面どうしが重なる格子展開図が存在する．*

Proof. この補題を示すには，図 28 に示す格子展開図 Q が，$L'\times L'\times L'$ $(L'\geq\sqrt{13})$ の格子直方体の手前の 3 面に埋め込むことができることを示せばよい．図 29 に示す格子直方体の 1 つの頂点 v の周り

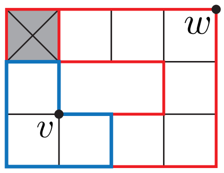


図 28: 格子展開図 Q

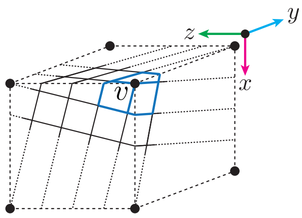


図 29: $L'\times L'\times L'$ $(L'\geq\sqrt{13})$ の格子直方体

には，3 つの単位正方形がある．ゆえに，図 28 の青色で囲む 3 つの単位正方形は，図 29 に示す格子直方体に埋め込むことができる．次に，図 30 に示す母線の長さ $\sqrt{13}$，中心角が 270° の円錐から底面を取り除いたものを考える（以降，単に円錐 C と呼ぶ）．この円錐 C は，中心角が 270° であるため，図 28 の青色で囲む 3 つの単位正方形を，頂点 v が一致するように埋め込むことができる．また，図 31 に示すように青色で囲む 3 つの面以外の面も埋め込むことができる．なぜなら，格子展開図 Q のうち v と v から最も離れている点（図 28 の w）とのユークリッド距離が，$\sqrt{2^2+3^3}=\sqrt{13}$ だからである．そして，この円錐 C は，格子直方体の 1 辺の長さが $L'\geq\sqrt{13}$ であるため，図 32 に示すように，頂点 v が一致するように格子直方体の手前の 3 面に埋め込むことができる．以上，円錐 C の上に，格子展開図 Q は埋め込むことができ，かつ円錐 C は $L'\times L'\times L'$ $(L'\geq\sqrt{13})$ の格子直方体の上に埋め込むことができることから，格子展開図 Q は，$L'\times L'\times L'$ $(L'\geq\sqrt{13})$ の格子直方体の上に埋め込むことができる． □

この補題が成り立つことから，x 軸，y 軸，z 軸の，それぞれの方向に大きした格子直方体の手前の 3 面に対して埋め込むことができる．このことから以下の補題が得られる．

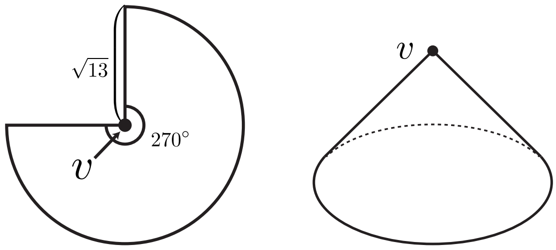


図 30: 母線の長さ $\sqrt{13}$，中心角が 270° の円錐から底面を取り除いた立体．左の扇型を丸めることで，右の立体が得られる．

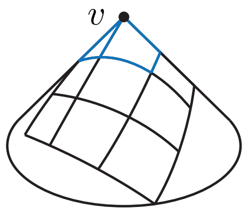


図 31: 円錐 C の上に，格子展開図 Q を埋め込んだ様子

補題 9. $xL' \times yL' \times zL'$ $(L' \geq \sqrt{13})$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図が存在する．

辺が接触する格子展開図，頂点が接触する格子展開図に対しても，同様のことが言える．以上より，格子直方体 $xL' \times yL' \times zL'$ $(L' \geq \sqrt{13})$ における格子展開図の重なりの有無を示すことができた．

5 今後の課題

三角格子上に 2 点を取り，その 2 点を 1 辺とすることで図 33 に示すような三角形を描画することができ

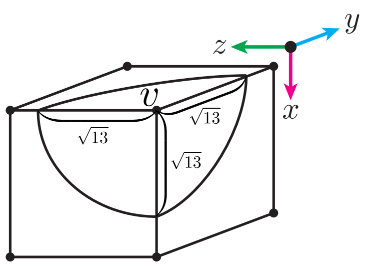


図 32: $L' \times L' \times L'$ $(L' \geq \sqrt{13})$ の格子直方体の上に，円錐 C を埋め込んだ様子

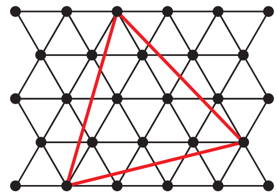


図 33: 三角格子上に描画した三角形

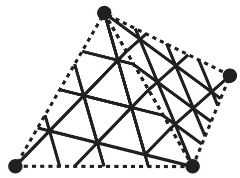


図 34: 図 33 で描画した三角形を 1 面とする四面体

る．そして，この三角形を 1 面とする四面体や八面体を考えることができる（図 34）． 今後は，これらの立体を三角格子上の辺に沿ってのみ切ることで得られる展開図における重なりを確認していきたい．

参考文献

[1] Therese C. Biedl, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Anna Lubiw, Mark H. Overmars, Joseph O'Rourke, Steve Robbins, and Sue Whitesides. Unfolding some classes of orthogonal polyhedra. In *10th Canadian Conference on Computational Geometry*, 1998.

[2] Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, and Richard K. Guy. *Unsolved Problems in Geometry*. Springer-Verlag, reissue edition, 1991.

[3] Albrecht Dürer. Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in linien ebenen unnd gantzen corporen, 1525.

[4] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.

[5] Kristin DeSplinter, Satyan L. Devadoss, Jordan Readyhough, and Bryce Wimberly. Nets of higher-dimensional cubes. In *32nd Canadian Conference on Computational Geometry*, 2020.

[6] Branko Grünbaum. Are your polyhedra the same as my polyhedra? In *Discrete and Computational Geometry*, volume 25, pages 461–488. Springer, 2003.

[7] Robert Hearn. personal communication, 2018.

[8] Takashi Horiyama and Wataru Shoji. Edge unfoldings of platonic solids never overlap. In *23rd Canadian Conference on Computational Geometry*, 2011.

[9] Jun Mitani and Ryuhei Uehara. Polygons folding to plural incongruent orthogonal boxes. In *20th Canadian Conference on Computational Geometry*, 2008.

[10] Makoto Namiki and Komei Fukuda. Unfolding 3-dimensional convex polytopes. *A package for Mathematica 1.2 or 2.0. Mathematica Notebook*, 1993.

[11] Wolfram Schlickenrieder. *Nets of Polyhedra.* PhD thesis, Berlin: Technische Universität Berlin, 1997.

[12] Micha Sharir and Amir Schorr. On shortest paths in polyhedral spaces. *SIAM J. Comput.*, 15(1):193–215, 1986.

[13] Takumi Shiota. Overlapping edge unfoldings for convex regular-faced polyhedrons, 2023. Kyushu Institute of Technology master's thesis. Supervisor : Toshiki Saitoh.

[14] Takumi Shiota and Toshiki Saitoh. Overlapping edge unfoldings for archimedean solids and (anti)prisms. In *Algorithms and Computation - 18th International Conference and Workshops*, 2023.

[15] Hiroshi Sugiura. personal communication, 2018.

[16] Takeaki Uno. personal communication, 2008.

[17] 廣瀬 健汰. 半正多面体の展開図の重なりについて, 2015. 埼玉大学工学部情報システム工学科卒業論文. 指導教員：堀山 貴史.

付録　$\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}$ の格子直方体における重なりの確認

現地参加の方向け

チャック袋の中身を開けて，実際にどのように重なっているかをご確認下さい．発表の後半で，お試し頂く時間を設けています．

オンライン参加の方向け

以下の URL にお試し用の印刷用データと実演の動画を載せています．是非，印刷してお試し下さい．

`https://shiotatakumi.github.io/MyPage/contents/230131-LA-2022-Winter.html`