一般セッション３ [9]

直方体の格子展開図における重なり

2022年度 冬のLAシンポジウム

お配りしている
サンプルの
組み立て方はこちら
↓

◎ 塩田 拓海（九州工業大学）

鎌田 斗南（北陸先端科学技術大学院大学）

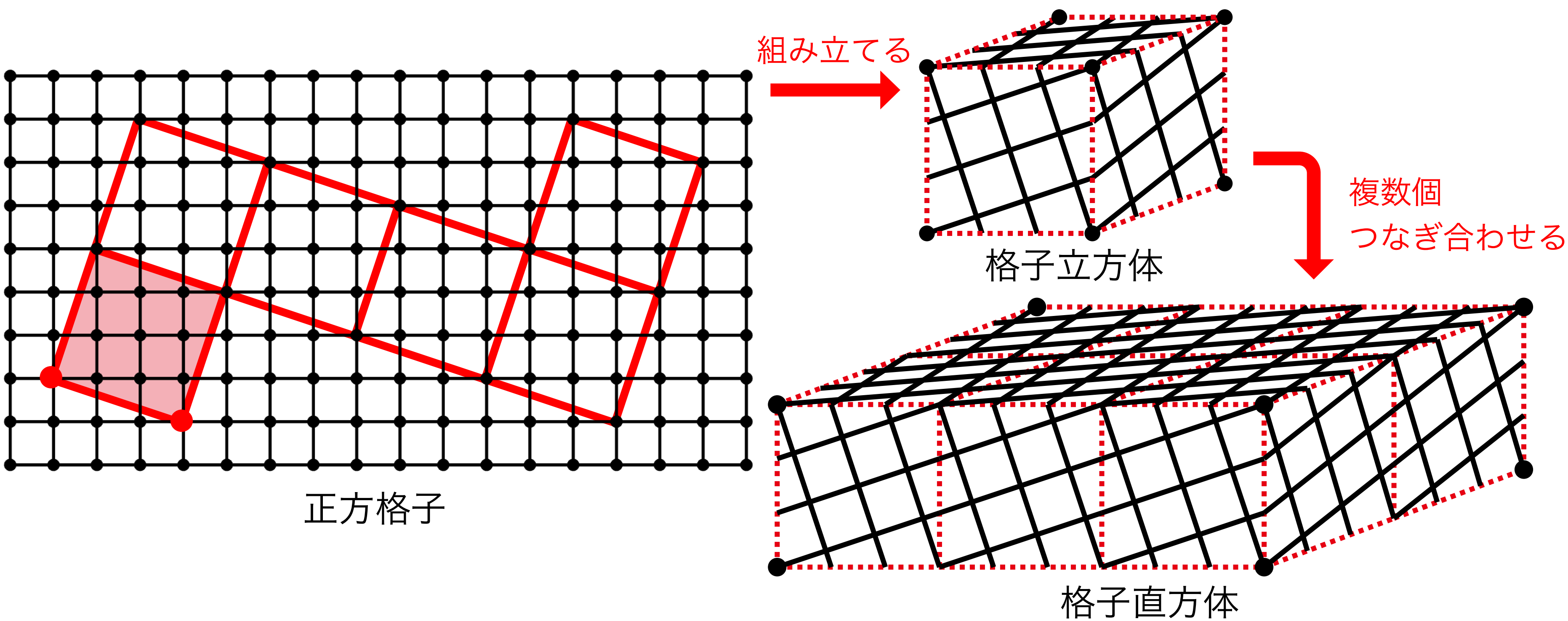
上原 隆平（北陸先端科学技術大学院大学）

2023年 1月 31日 (土) 13:00〜13:25

直方体における格子展開図とは？

定義 1（格子立方体・格子直方体）

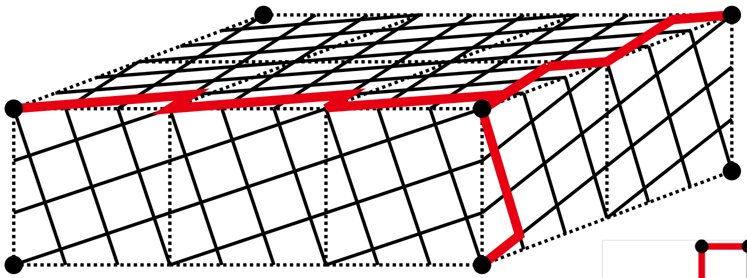
正方格子上に2点を選び，その2点を1辺とする正方形を作る．この正方形を1面にして組み立てた立方体を格子立方体という．格子立方体を複数個つなぎ合わせることでできる直方体を格子直方体という．（注：格子立方体 ⊂ 格子直方体）



直方体における格子展開図とは？

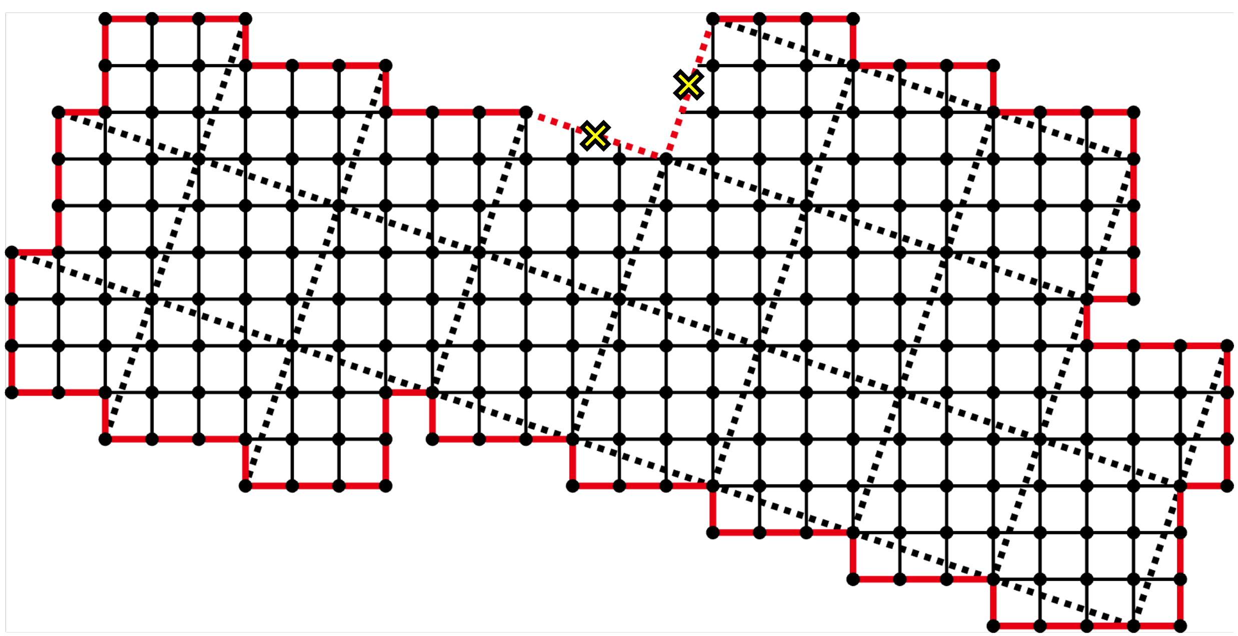
定義 2（格子展開図）

格子直方体の格子に切れ込みを入れて平坦に開いた多角形を格子展開図という.



格子直方体

格子に切れ込みを
入れて平坦に開く



(注意)
点線 -------- は折り線
（点線は切らない）

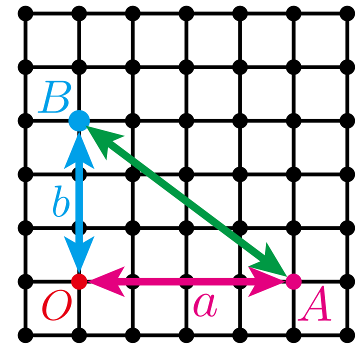
格子立方体の1辺の長さの決め方

立方格子の1辺の長さを 1 とする

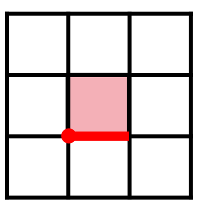
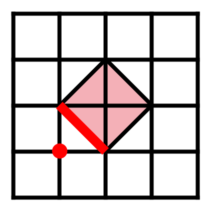
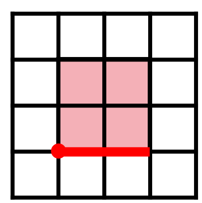
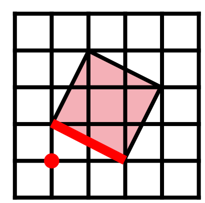
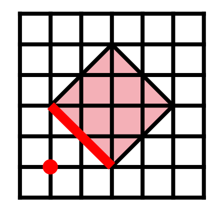
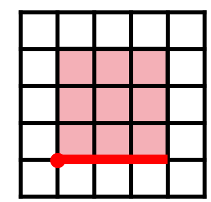
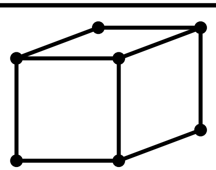
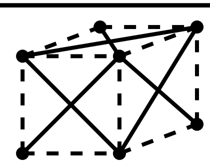
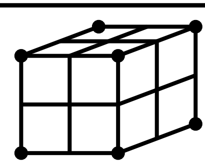
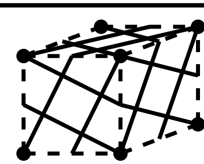
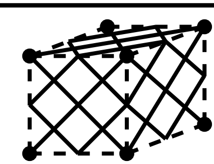
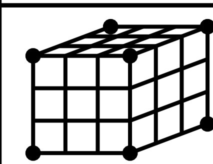
① 正方格子上に原点 $O(0,0)$ を決める

② 点 A を $(a,0)$ 点 B を $(0,b)$ とする $(a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N}^{+}, a \geq b)$

③ 線分 $AB = \sqrt{a^2+b^2}$ を，格子立方体の1辺の長さとする



格子立方体の一覧

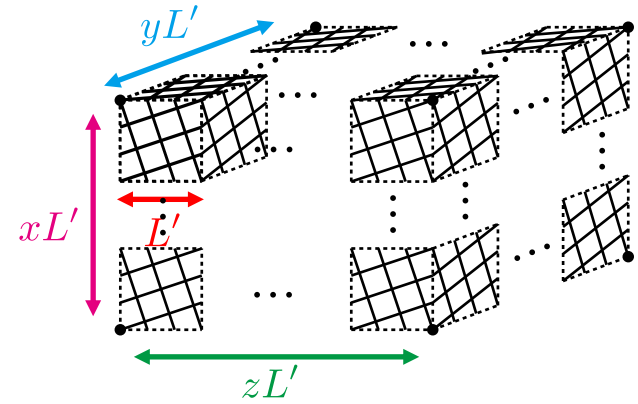
$\boldsymbol{a}$ の値	1	1	2	2	2	3	⋯
$\boldsymbol{b}$ の値	0	1	0	1	2	0	⋯
線分 $\boldsymbol{AB}$ の長さ $\boldsymbol{L}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	3	⋯
$\boldsymbol{L \times L}$ の正方形							⋯
$\boldsymbol{L \times L \times L}$ の格子立方体							⋯

格子直方体の3辺の長さの決め方

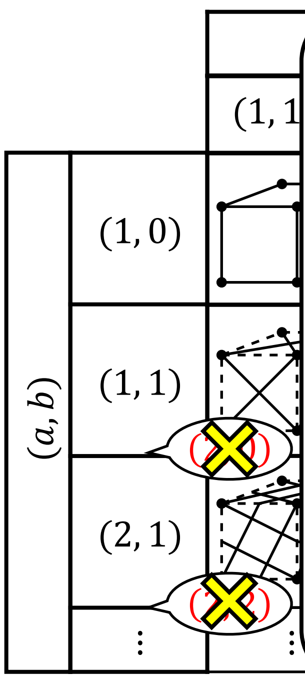
格子立方体の1辺の長さを L' とする

$$L' = \sqrt{a^2 + b^2}\ (a \in \mathbb{N}^+, b \in \mathbb{N}, a \geq b, \gcd(a,b) = 1)$$

格子直方体を $xL' \times yL' \times zL'$ $(x, y, z \in \mathbb{N}, x \leq y \leq z)$ で表記



格子直方体の一覧

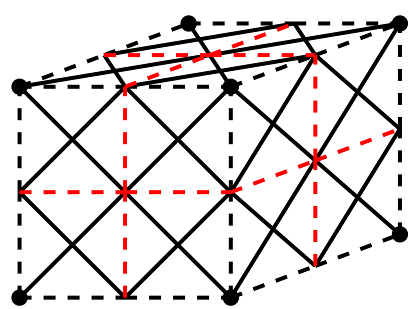


$(a,b) = (2,2)$, $\gcd(a,b) = 2$

$\rightarrow L' = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$(x,y,z) = (1,1,1)$

$\rightarrow 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ で表せる格子直方体



同じ直方体

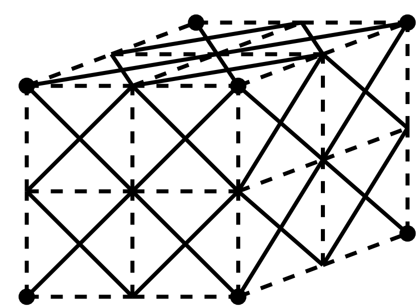
⇔

$(a,b) = (1,1)$, $\gcd(a,b) = 1$

$\rightarrow L' = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$(x,y,z) = (2,2,2)$

$\rightarrow 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ で表せる格子直方体



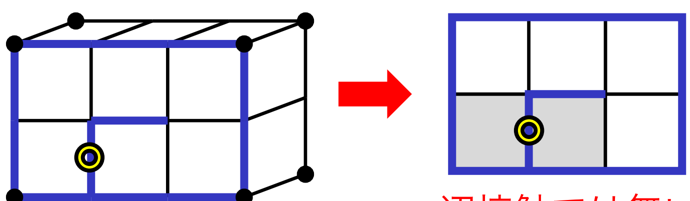
重なりを持つ格子展開図

定理 1 [上原, 2008]

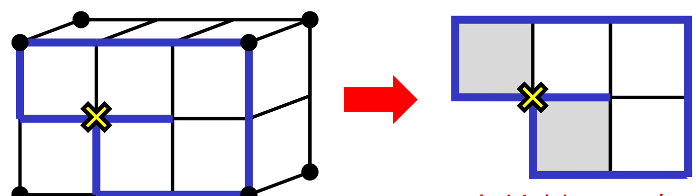
1×2×3 の格子立方体には，面どうしが重なる格子展開図が存在する．また，辺および頂点が接触する格子展開図が存在する．

1×2×3 の格子直方体の赤色の太線に沿って切り開くと…

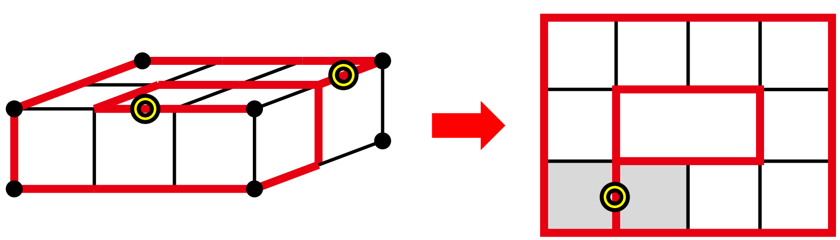
【注意】元の直方体において，辺・頂点が一致している場合は「辺接触」「頂点接触」と言わない



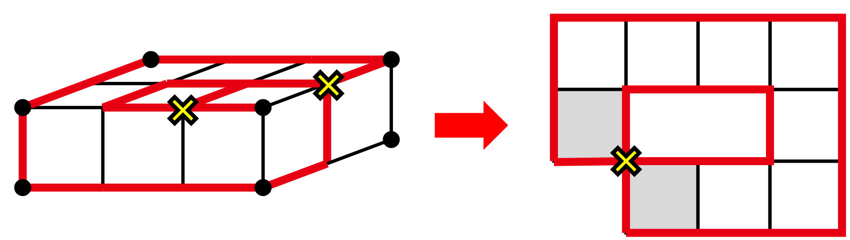
辺接触では無い



頂点接触では無い



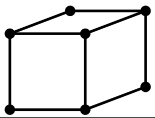
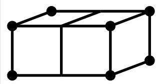
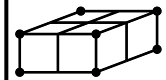
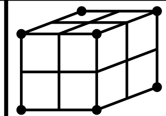
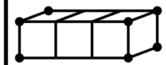
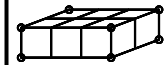
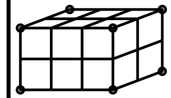
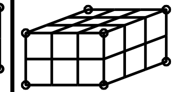
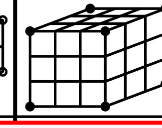
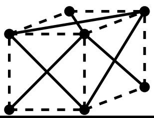
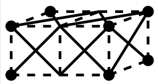
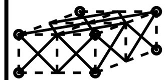
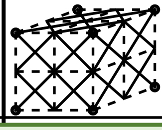
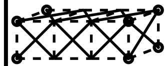
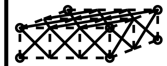
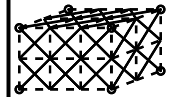
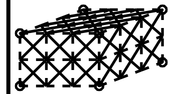
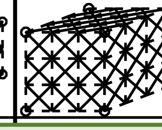
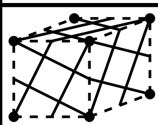
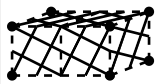
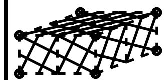
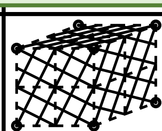
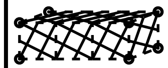
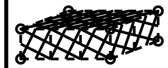
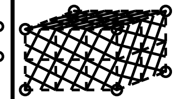
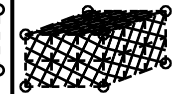
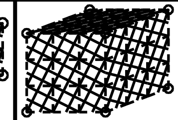
② 辺が接触する格子展開図（辺接触）



③ 頂点が接触する格子展開図（頂点接触）

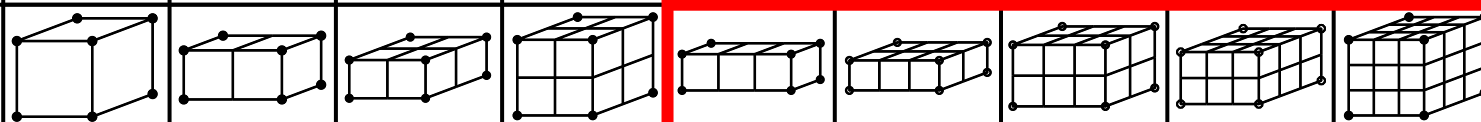
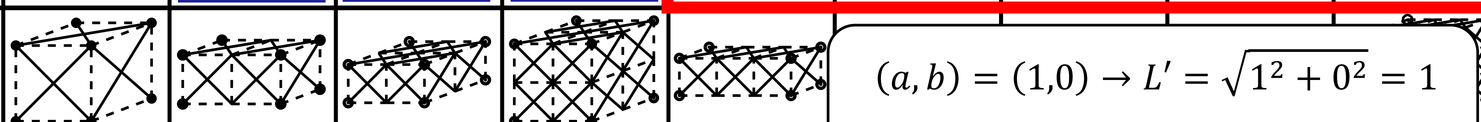
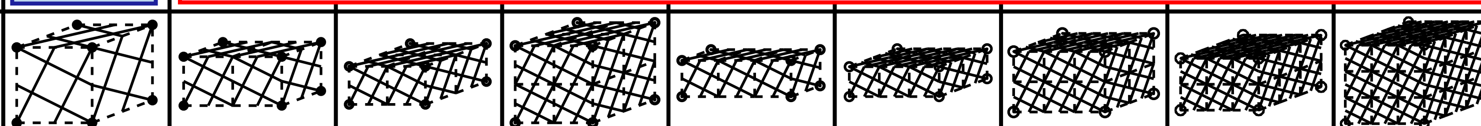
格子直方体における重なりの先行研究と主結果

※1： [R.Hearn,2018]
※2：[杉浦,2018]

		(x,y,z)									
		$(1,1,1)$	$(1,1,2)$	$(1,2,2)$	$(2,2,2)$	$(1,1,3)$	$(1,2,3)$	$(2,2,3)$	$(2,3,3)$	$(3,3,3)$	⋯
(a,b)	$(1,0)$										⋯
	頂点接触	No (自明)	未解決	未解決	未解決	Yes 1×1×z (z≥3)で表せるものは[宇野,2008] それ以外は[上原, 2008]					
	辺接触										
	面が重なる		No※1		No※2						
	$(1,1)$										⋯
	頂点接触	未解決									
	辺接触										
	面が重なる										
	$(2,1)$										⋯
	頂点接触	未解決									
	辺接触										
	面が重なる										
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱
	頂点接触	未解決									
	辺接触										
	面が重なる										

格子直方体における重なりの先行研究と主結果

※1： [R.Hearn,2018]
※2：[杉浦,2018]

(a,b)		(x,y,z)									
		$(1,1,1)$	$(1,1,2)$	$(1,2,2)$	$(2,2,2)$	$(1,1,3)$	$(1,2,3)$	$(2,2,3)$	$(2,3,3)$	$(3,3,3)$	$\cdots$
	$(1,0)$										$\cdots$
	頂点接触	No (自明)	Yes	Yes		Yes 1×1×z (z≥3)で表せるものは[宇野,2008] それ以外は[上原, 2008]					
	辺接触		No								
	面が重なる		No※1	No	No※2						
	$(1,1)$										$\cdots$
	頂点接触	No	Yes								
	辺接触										
	面が重なる										
	$(2,1)$										$\cdots$
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										

$(a,b)=(1,0) \to L' = \sqrt{1^2+0^2} = 1$

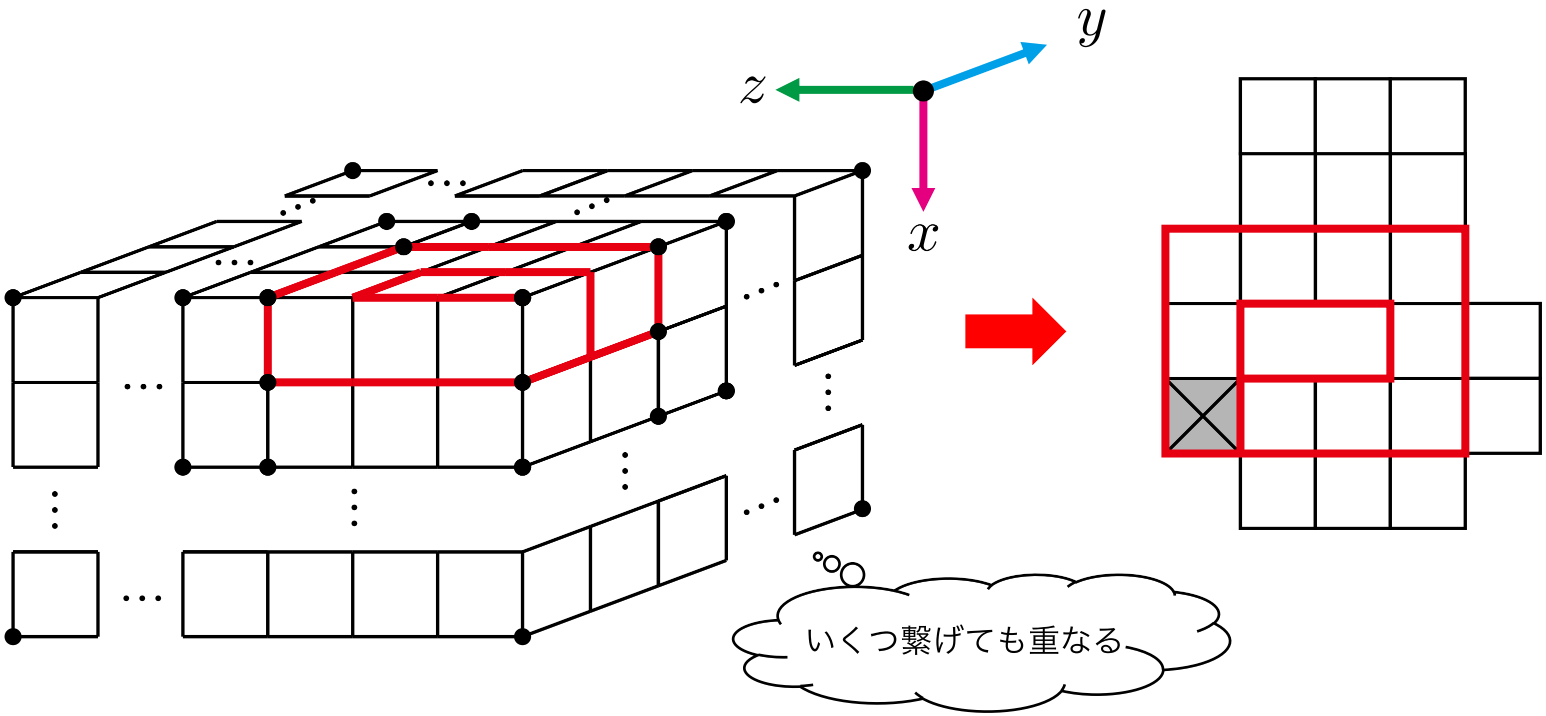
$x \times y \times z$ $(z \geq 3)$で表せる格子直方体

格子直方体 $x{\times}y{\times}z$ $(z \geq 3)$ における重なり

定理 2 [上原, 2008]

$x{\times}y{\times}z$ $(y \geq 2, z \geq 3)$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図が存在する．また，辺および頂点が接触する格子展開図が存在する．

【再掲】1×2×3 の格子直方体の赤色の太線に沿って切り開くと…

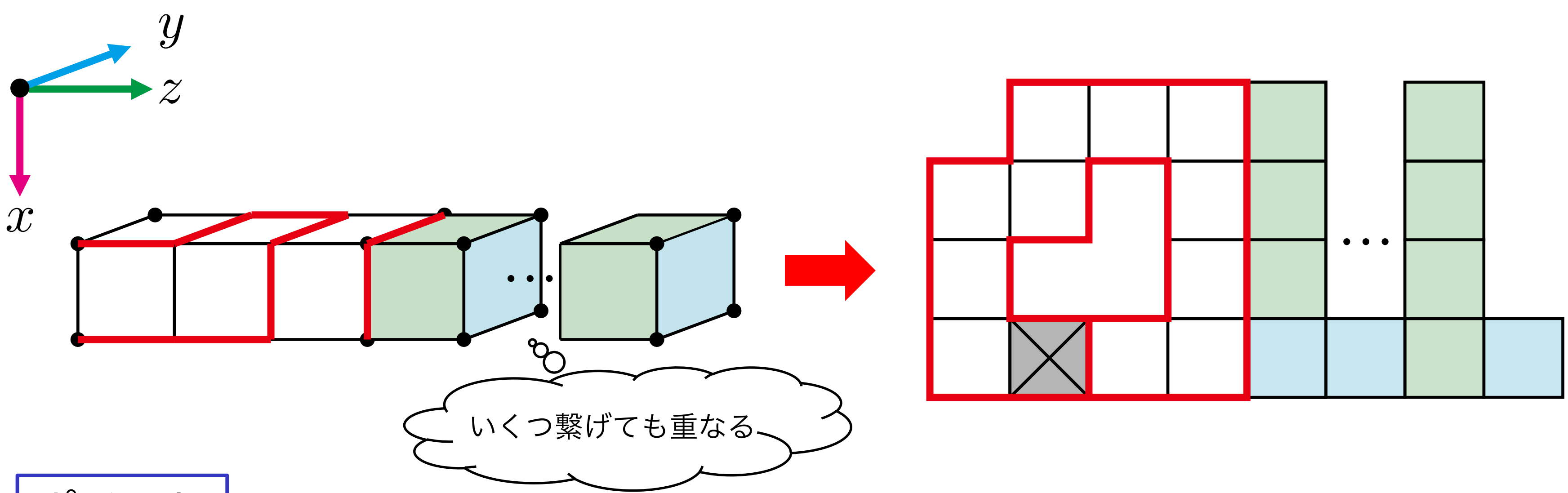


格子直方体 $x \times y \times z$ $(z \geq 3)$ における重なり

定理 3 [宇野, 2008]

$1 \times 1 \times z$ $(z \geq 3)$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図が存在する．
また，辺および頂点が接触する格子展開図が存在する．

$1 \times 1 \times 3$ の格子直方体の赤色の太線に沿って切り開くと…

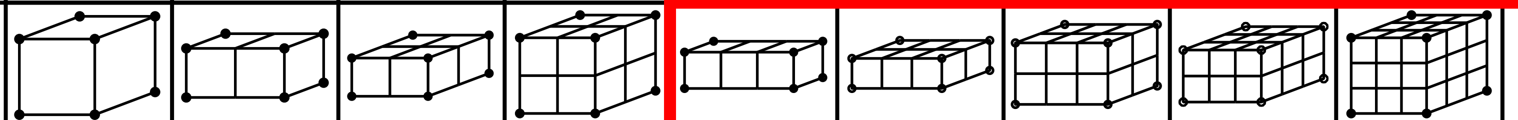
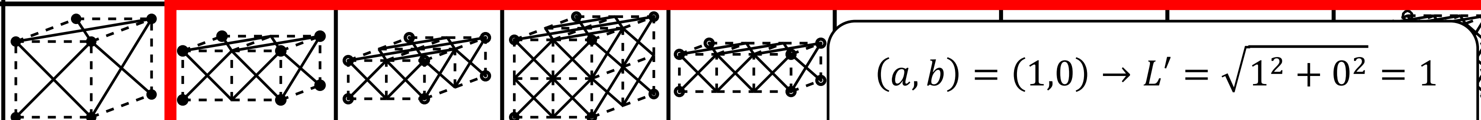
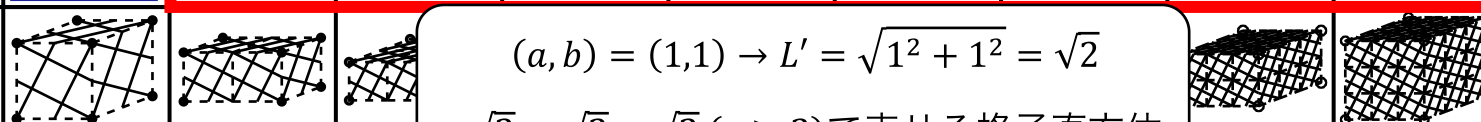


ポイント

小さいユニットで重なりを持つことが言えると，拡張しても重なることが言える．

格子直方体における重なりの先行研究と主結果

※1： [R.Hearn,2018]
※2：[杉浦,2018]

		(x,y,z)									
		$(1,1,1)$	$(1,1,2)$	$(1,2,2)$	$(2,2,2)$	$(1,1,3)$	$(1,2,3)$	$(2,2,3)$	$(2,3,3)$	$(3,3,3)$	⋯
(a,b)	$(1,0)$										⋯
	頂点接触	No (自明)	Yes	Yes		Yes 1×1×z (z≥3)で表せるものは[宇野,2008] それ以外は[上原, 2008]					
	辺接触		No								
	面が重なる		No※1	No	No※2						
	$(1,1)$										⋯
	頂点接触	No	Yes								
	辺接触										
	面が重なる										
	$(2,1)$										⋯
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										

$(a,b)=(1{,}0) \to L'=\sqrt{1^2+0^2}=1$

$x\times y\times z$ $(z\geq 3)$で表せる格子直方体

$(a,b)=(1{,}1) \to L'=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

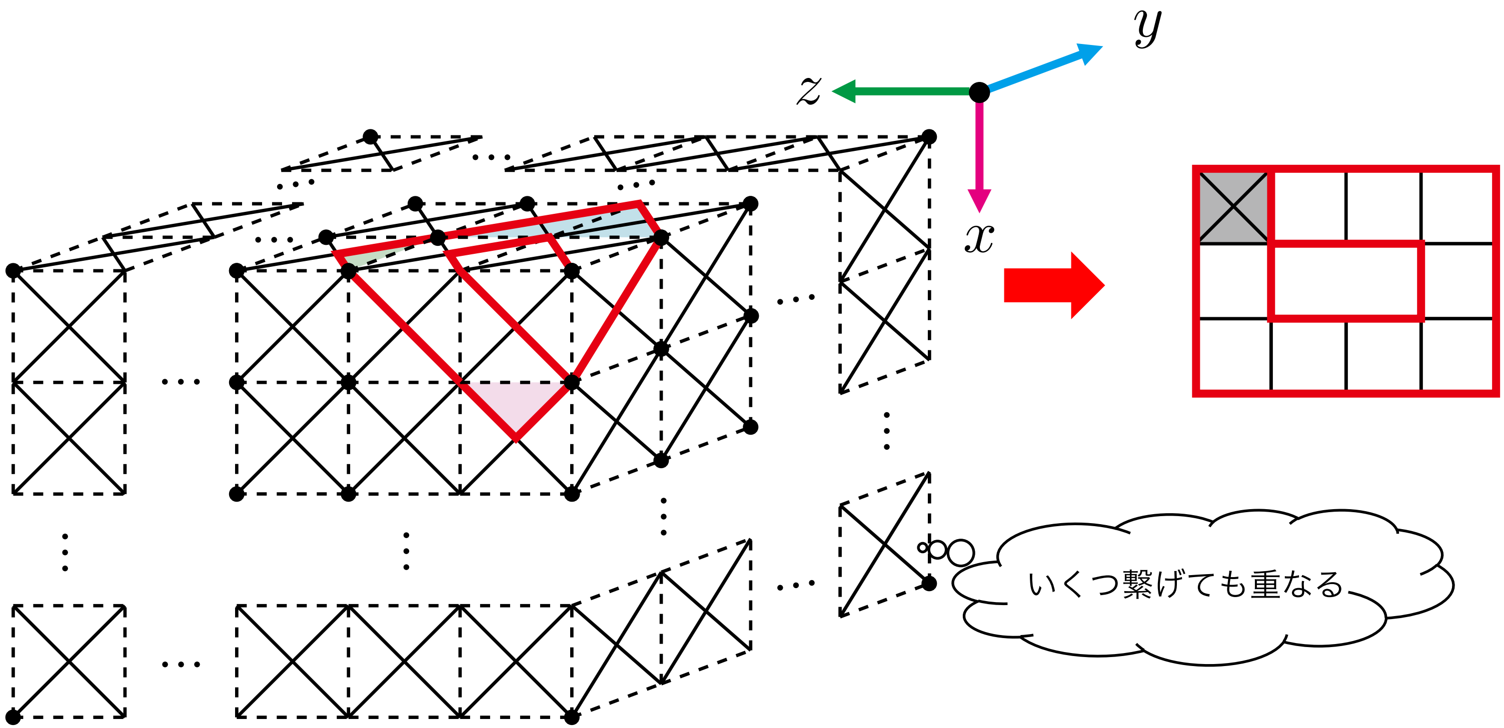
$x\sqrt{2}\times y\sqrt{2}\times z\sqrt{2}$ $(z\geq 2)$で表せる格子直方体

格子直方体 $x\sqrt{2}\times y\sqrt{2}\times z\sqrt{2}(z \geq 2)$ における重なり

補題 1

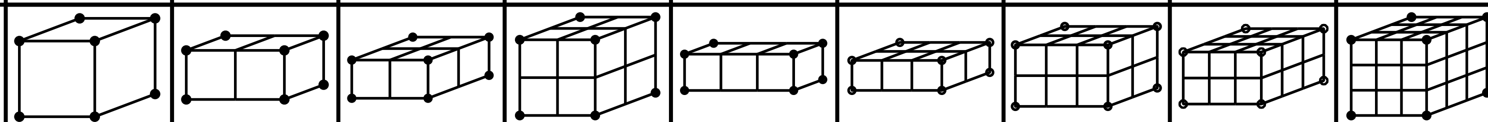
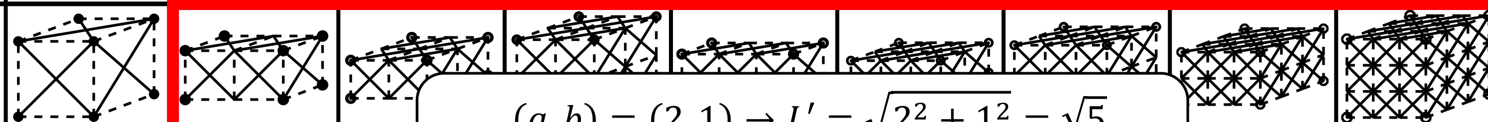
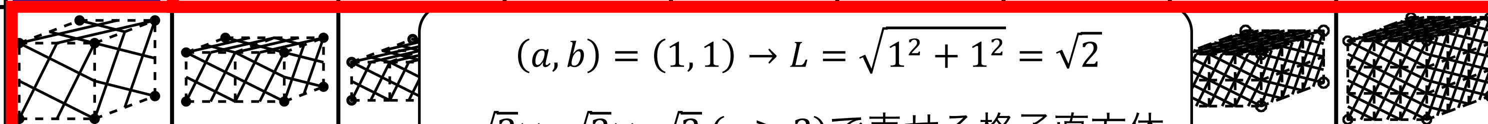
$x\sqrt{2}\times y\sqrt{2}\times z\sqrt{2}$ $(z \geq 2)$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図が存在する．また，辺および頂点が接触する格子展開図が存在する．

【証明】 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}$ 格子直方体の赤色の太線に沿って切り開くと… お試し品



格子直方体における重なりの先行研究と主結果

※1：[R.Hearn,2018]
※2：[杉浦,2018]

		(x,y,z)									
		$(1,1,1)$	$(1,1,2)$	$(1,2,2)$	$(2,2,2)$	$(1,1,3)$	$(1,2,3)$	$(2,2,3)$	$(2,3,3)$	$(3,3,3)$	…
(a,b)	$(1,0)$										…
	頂点接触	No (自明)	Yes	Yes		Yes 1×1×z (z≥3)で表せるものは[宇野,2008] それ以外は[上原, 2008]					
	辺接触		No								
	面が重なる		No※1	No	No※2						
	$(1,1)$										…
	頂点接触	No									
	辺接触										
	面が重なる										
	$(2,1)$										…
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										

$(a,b)=(2,1)\rightarrow L'=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$xL'\times yL'\times zL'\ (L'\geq\sqrt{5})$で表せる格子直方体

$(a,b)=(1,1)\rightarrow L=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

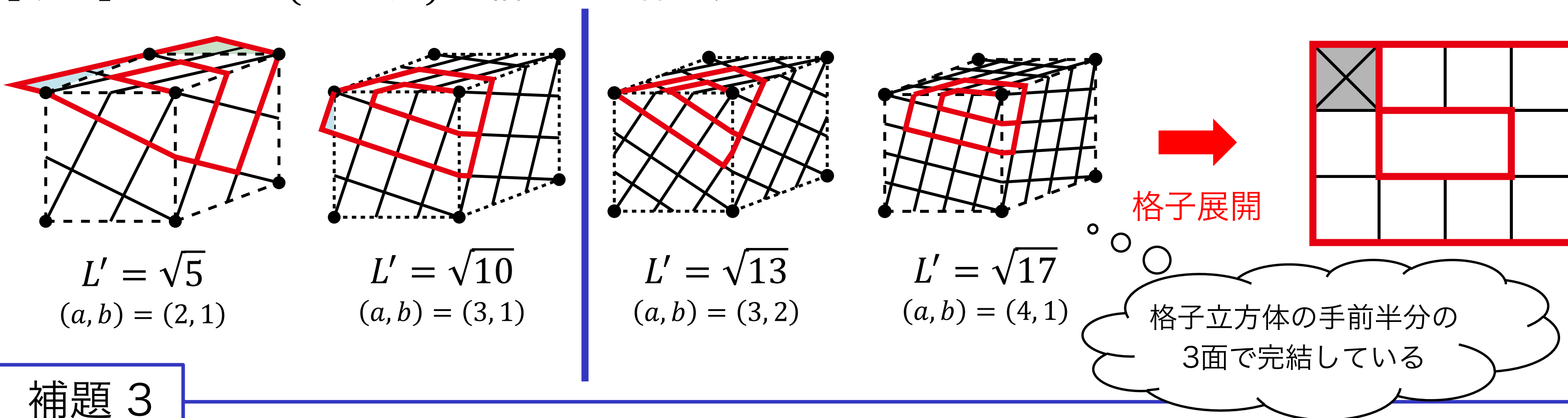
$x\sqrt{2}\times y\sqrt{2}\times z\sqrt{2}\ (z\geq 2)$で表せる格子直方体

格子直方体 $xL'{\times}yL'{\times}zL'$ $\left(L' \geq \sqrt{5}\right)$ における重なり

補題 2

$xL'{\times}yL'{\times}zL'$ $\left(L' \geq \sqrt{5}\right)$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図が存在する．また，辺および頂点が接触する格子展開図が存在する．

【観察】 $L'{\times}L'{\times}L'$ $(L' \geq \sqrt{5})$ の格子立方体を見ていくと…



補題 3

$L'{\times}L'{\times}L'\left(L' \geq \sqrt{13}\right)$ の格子立方体の手前半分には，面どうしが重なる格子展開図が存在する．また，辺および頂点が接触する格子展開図が存在する．

証明は，予稿に載せています．

格子直方体における重なりの先行研究と主結果

※1： [R.Hearn,2018]
※2：[杉浦,2018]

(a,b)		(x,y,z)									
		$(1,1,1)$	$(1,1,2)$	$(1,2,2)$	$(2,2,2)$	$(1,1,3)$	$(1,2,3)$	$(2,2,3)$	$(2,3,3)$	$(3,3,3)$	…
$(1,0)$											…
	頂点接触	No (自明)									
	辺接触		No								
	面が重なる		No※1	No	No※2	1×…		…08] それ以外は[上原, 2008]			
$(1,1)$											…
	頂点接触	No									
	辺接触										
	面が重なる										
$(2,1)$											…
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										

301,056,000,000

16,425

29,859,840

331,776

$xL' \times yL' \times zL'$ $(L' \geq \sqrt{5})$で表せる格子直方体

格子展開図を列挙すれば
よいのでは？

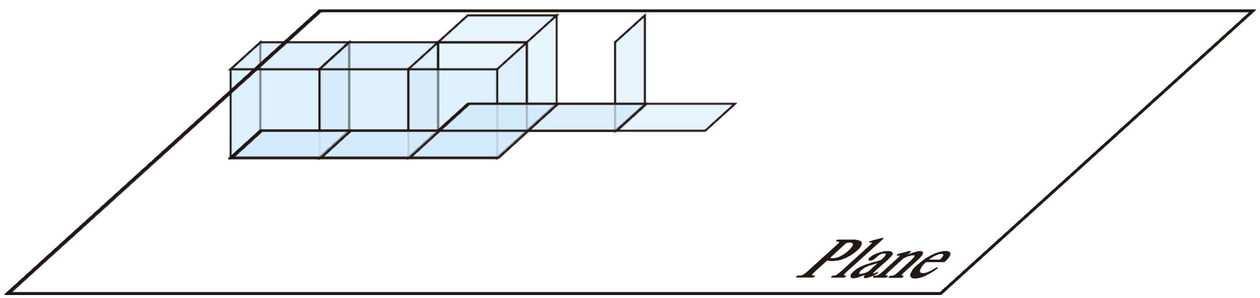
- 面の数が多くなると格子展開図の個数が増える！
- 格子展開図の重なり方の種類の区別が付けにくい

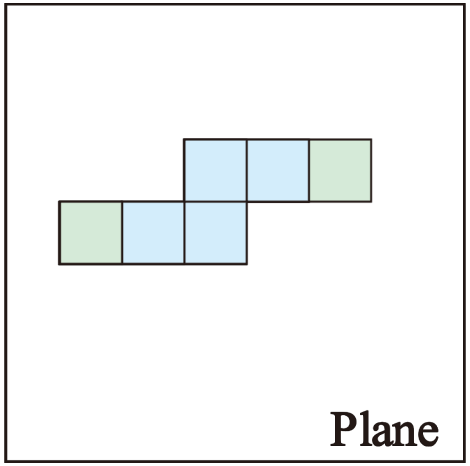
- 回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023] という
アルゴリズムを使って判定する

重なりを持つ展開図の探索

回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023]

多面体をコロコロと転がすことで任意の二面間のパスを列挙し，列挙したパスの両端点に位置する面どうしの重なりを確認する手法





なぜパスの両端点の面の重なりだけを判定すれば良いのか…？

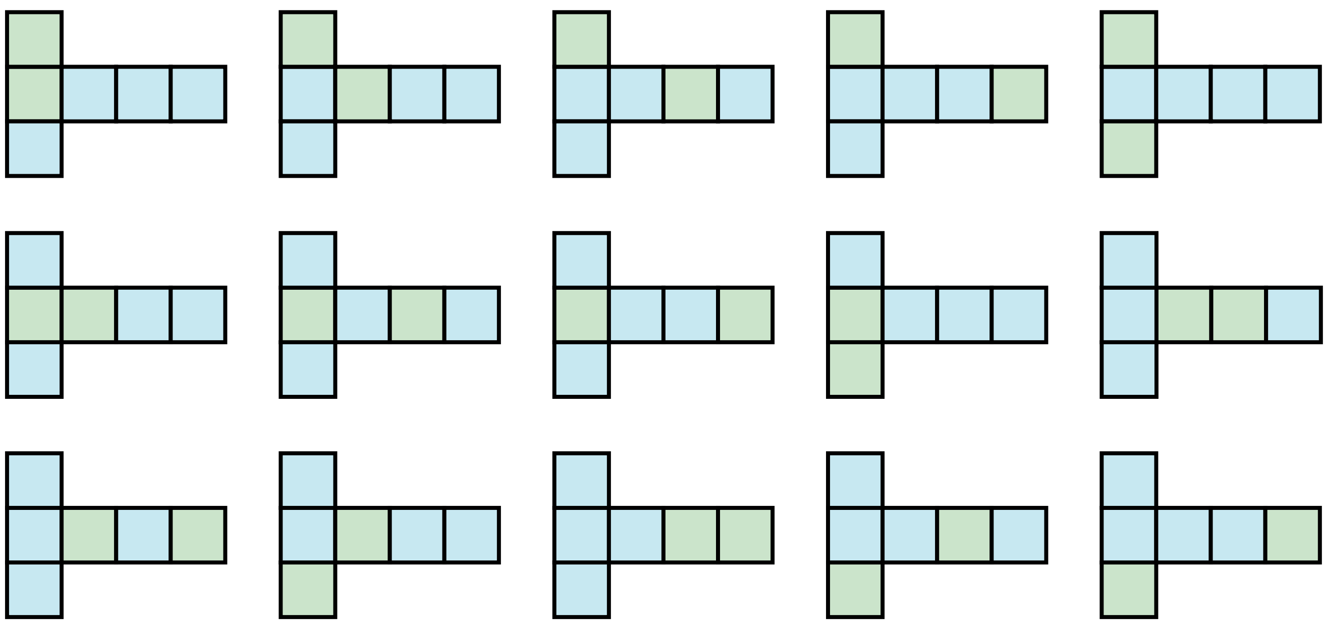
補題 4

辺展開図のある2面を結ぶパスは，回転展開で列挙したいずれかのパスに該当する．

なぜ回転展開が早いのか？

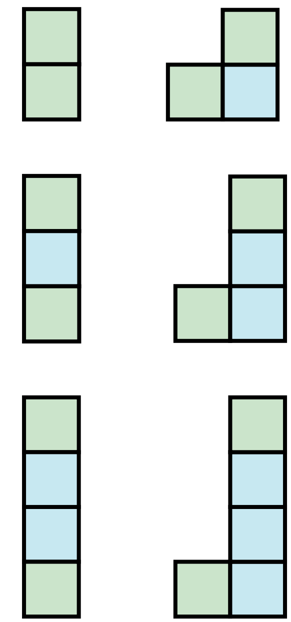
(例) 立方体の辺展開図の１つに対する重なりを確認すべき面の組み

全ての面の組みに対して重なりを確認する方法 [T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



$_6C_2 = 15$通り

回転展開



6通り

ポイント

辺展開図を列挙する必要がなく，パスの両端点の面の重なりだけを判定すればよい

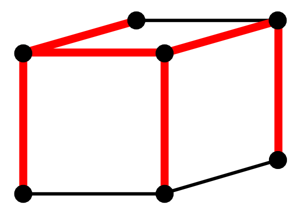
回転展開の格子直方体への適用

今までの回転展開は…

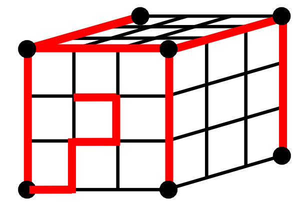
- 多面体の辺に沿って切れ込みを入れることで得られる辺展開図を扱っていた
  - ➡ 各頂点に対して，必ずいずれかの方向かに切れ込みを入れないといけない
  - ∵ 平坦に開くことができないから

一方で格子直方体は…

- 全ての格子上の点に沿って，必ずしも切れ込みを入れる必要はない



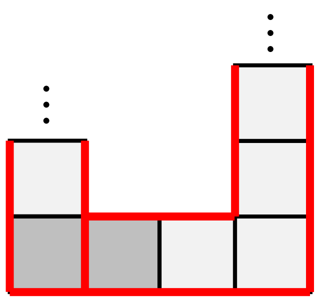
立方体



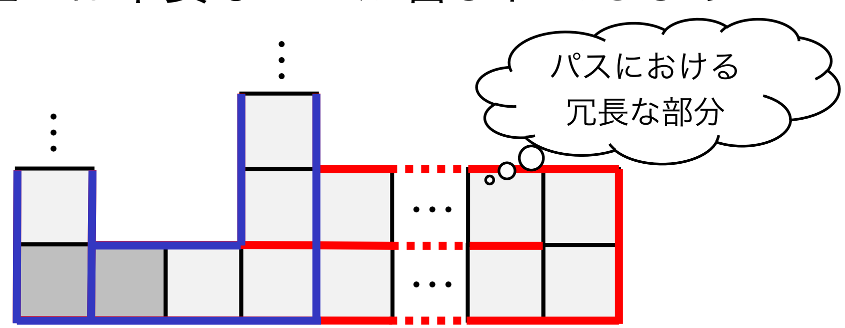
格子直方体

そのため…

- 列挙したパスの中に，重なりを確認する上では不要なパスが含まれてしまう



求めるべきパス



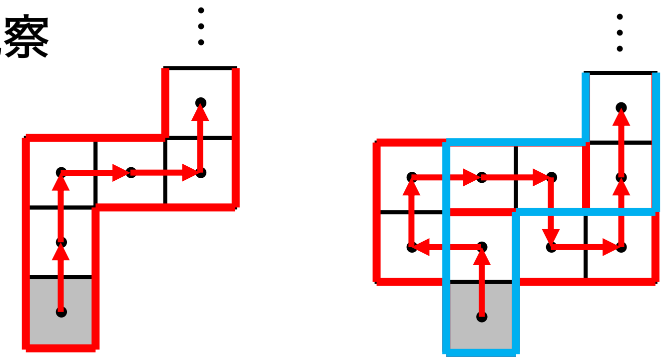
回転展開では不要なパス

回転展開の格子立方体への適用

パスに冗長な部分が含まれる格子展開図の観察

1ステップ前で転がした方向から見て…

- ✓ 真っ直ぐに転がす ➡ C
- ✓ 右向きに転がす ➡ R
- ✓ 左向きに転がす ➡ L

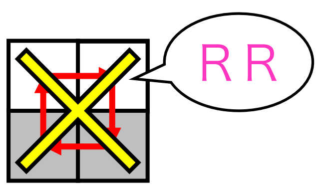


C C R C L　　C L R R C R L L C

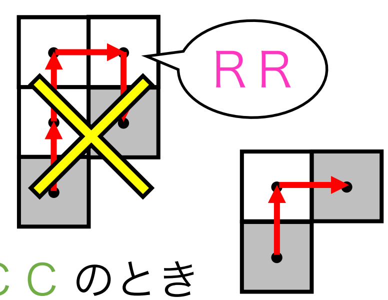
補題 5

回転展開において，文字列 “RR” or “LL” が現れるパスには冗長な部分がある．

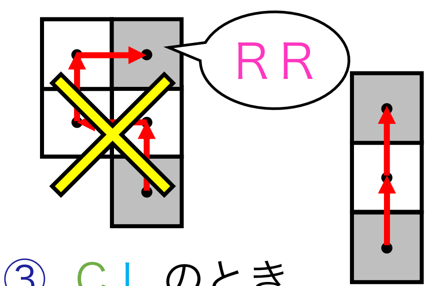
【証明の概略】 文字列 RR が含まれるパスを，3つに場合分けをして考える



① C R のとき



② C C のとき



③ C L のとき

文字列 “RR” or “LL” が表れたら枝刈り ⬌ 冗長な部分を含まないパスのみを得る

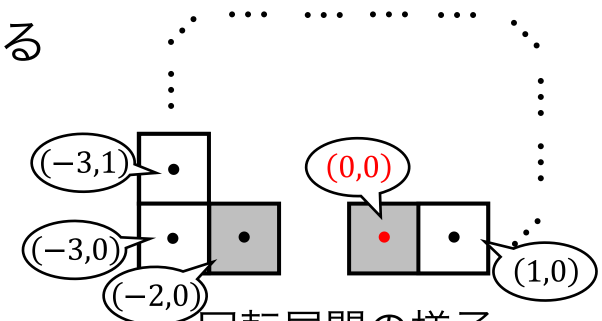
回転展開の格子立方体への適用

格子展開図の（種類も含めた）重なりの判定

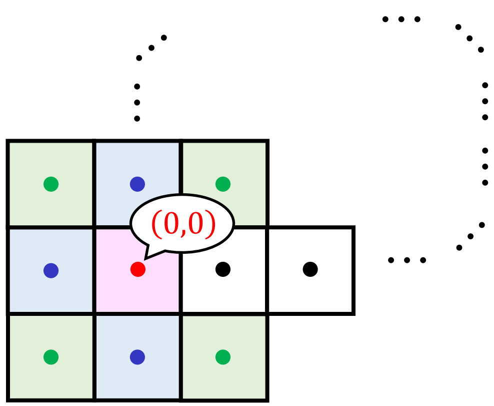
回転展開では，転がす度に重なりがあるかを判定している

➡ パスの片方の端点の面の中心座標 (x, y) を $(0,0)$ とし，
転がしながら，もう一方の端点も逐次計算する

（格子の1辺の長さは1）



回転展開の様子



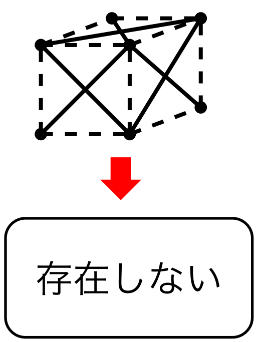
パスの，もう一方の端点の面の中心座標が…

- $(0,0)$ のとき → 面が重なる
- $(0,1), (-1,0), (0,-1)$ のとき → 辺接触
- $(1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1)$ のとき → 頂点接触

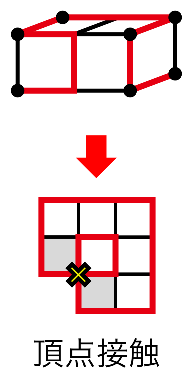
格子直方体 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$, $x\times y\times z$ $(z=2)$ における重なり

補題 6

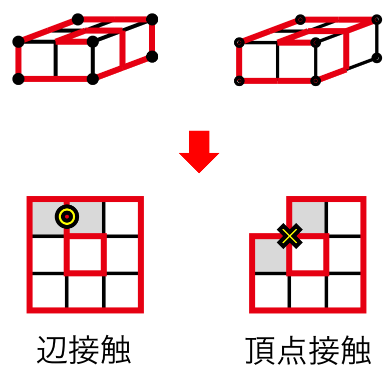
1. $\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ の格子直方体には，重なりを持つ格子展開図が存在しない.
2. $1\times1\times2$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図，辺が接触する格子展開図が存在しないが，頂点が接触する格子展開図が存在する.
3. $1\times2\times2$ および $2\times2\times2$ の格子直方体には，面どうしが重なる格子展開図が存在しないが，辺および頂点が接触する格子展開図が存在する.



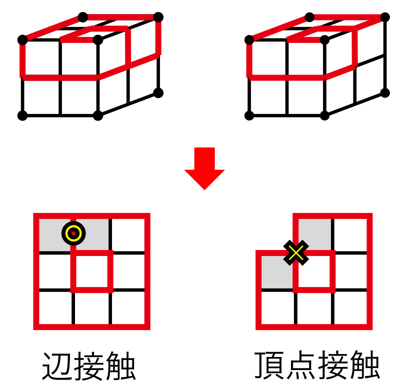
$\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$の
格子直方体



$1\times1\times2$ の
格子直方体



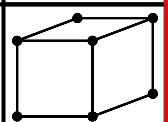
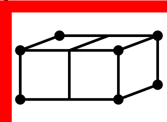
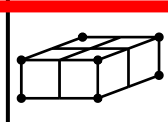
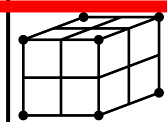
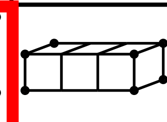
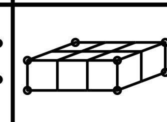
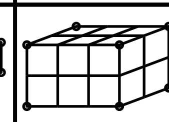
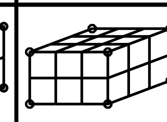
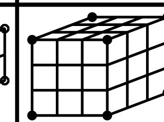
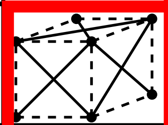
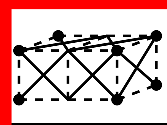
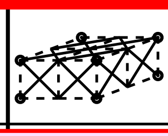
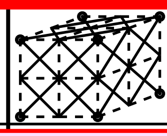
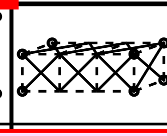
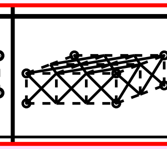
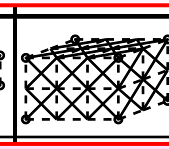
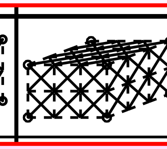
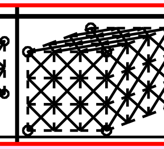
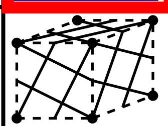
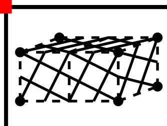
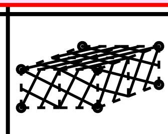
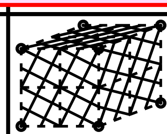
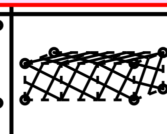
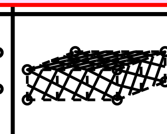
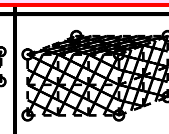
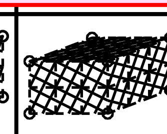
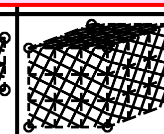
$1\times2\times2$ の格子直方体



$2\times2\times2$ の格子直方体

格子直方体における重なりの先行研究と主結果

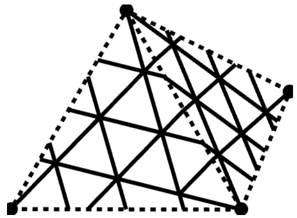
※1： [R.Hearn,2018]
※2：[杉浦,2018]

(a,b)		$(1,1,1)$	$(1,1,2)$	$(1,2,2)$	$(2,2,2)$	$(1,1,3)$	$(1,2,3)$	$(2,2,3)$	$(2,3,3)$	$(3,3,3)$	…
	$(1,0)$										…
	頂点接触	No (自明)	Yes	Yes		Yes 1×1×z (z≥3)で表せるものは[宇野,2008] それ以外は[上原, 2008]					
	辺接触		No								
	面が重なる		No※1	No	No※2						
	$(1,1)$										…
	頂点接触	No	Yes								
	辺接触										
	面が重なる										
	$(2,1)$										…
	頂点接触										

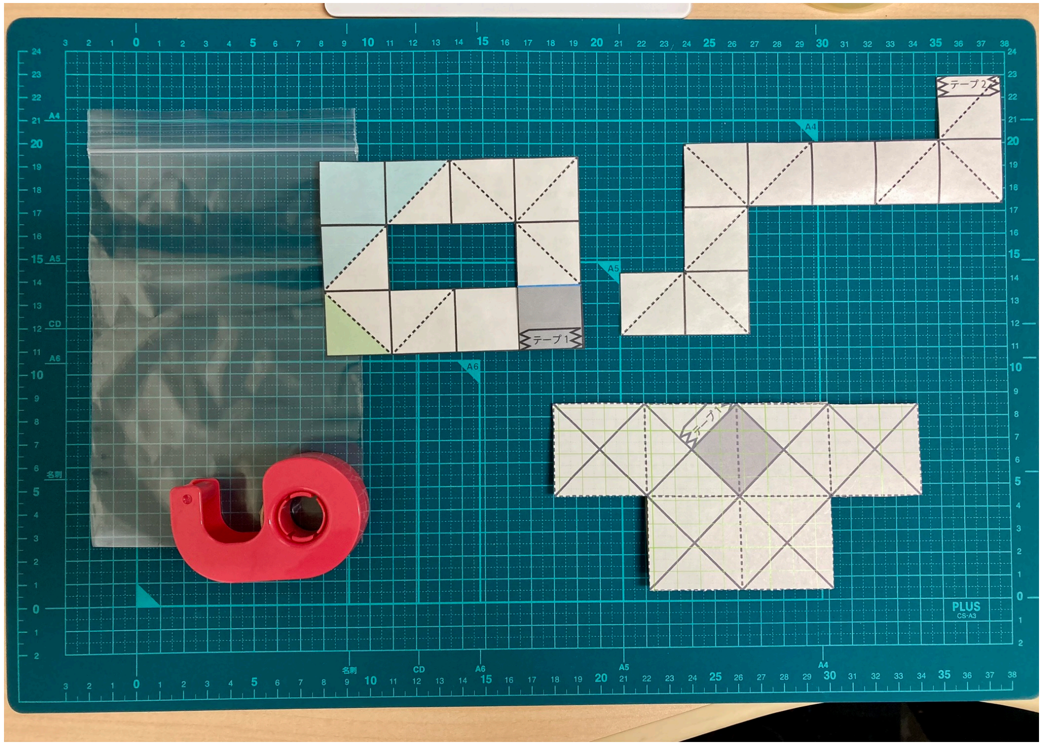
今後の課題…

立方格子から作ることができる六面体（直方体） を対象

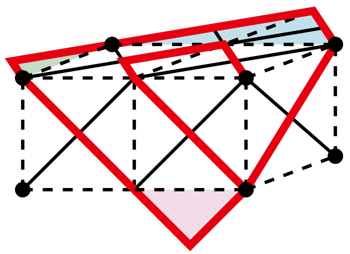
➡ 三角格子から作ることができる四面体や八面体へと拡張していく.


格子四面体

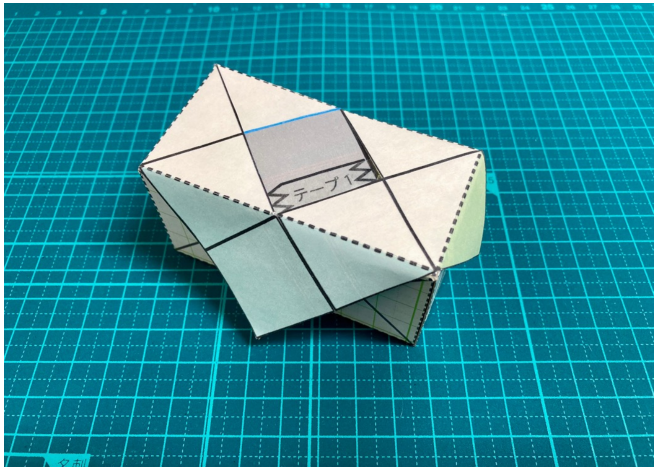
$\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}$ の格子直方体における重なり方の確認



お配りしたサンプルの内容

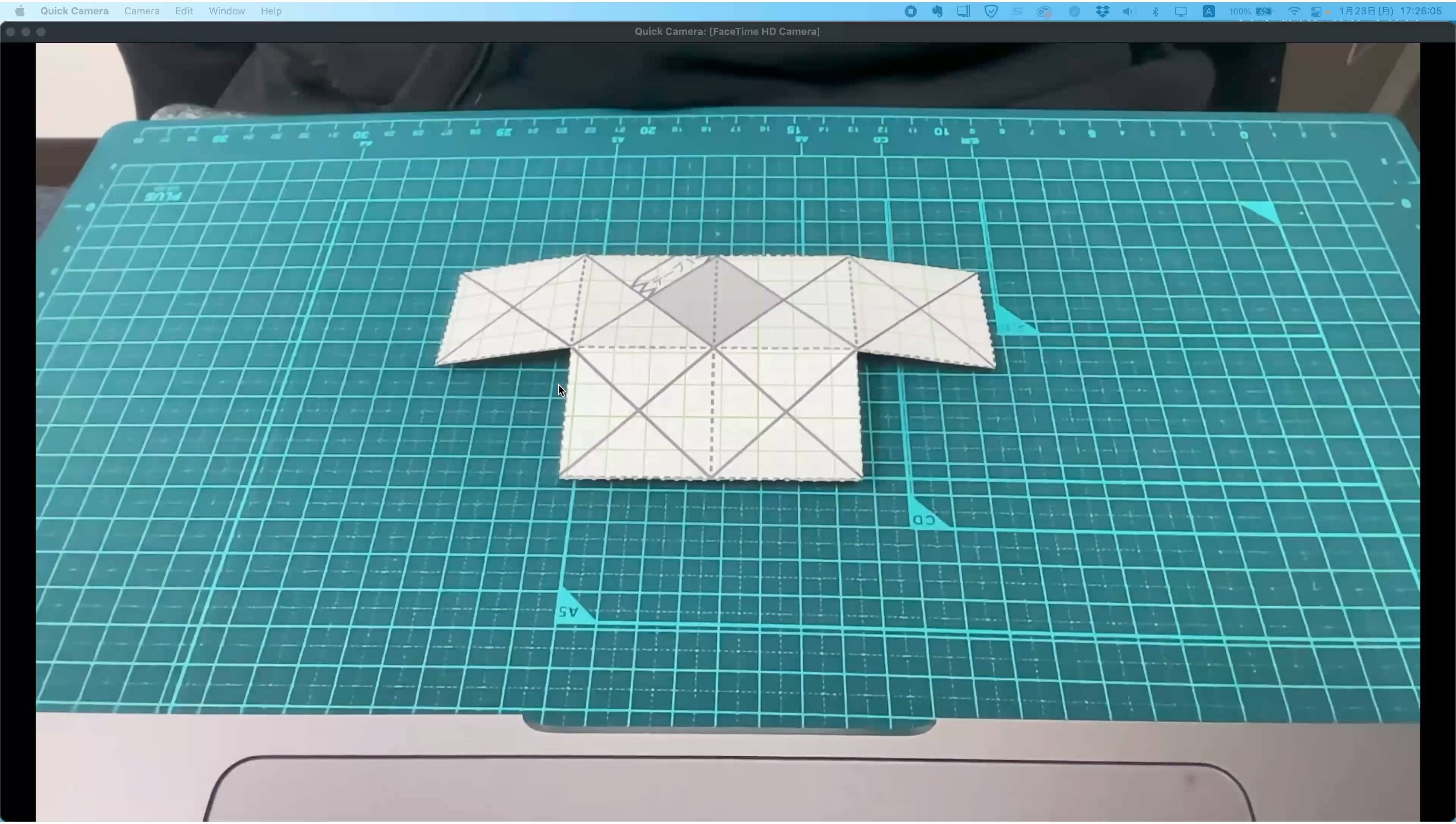


$\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}$ の格子直方体

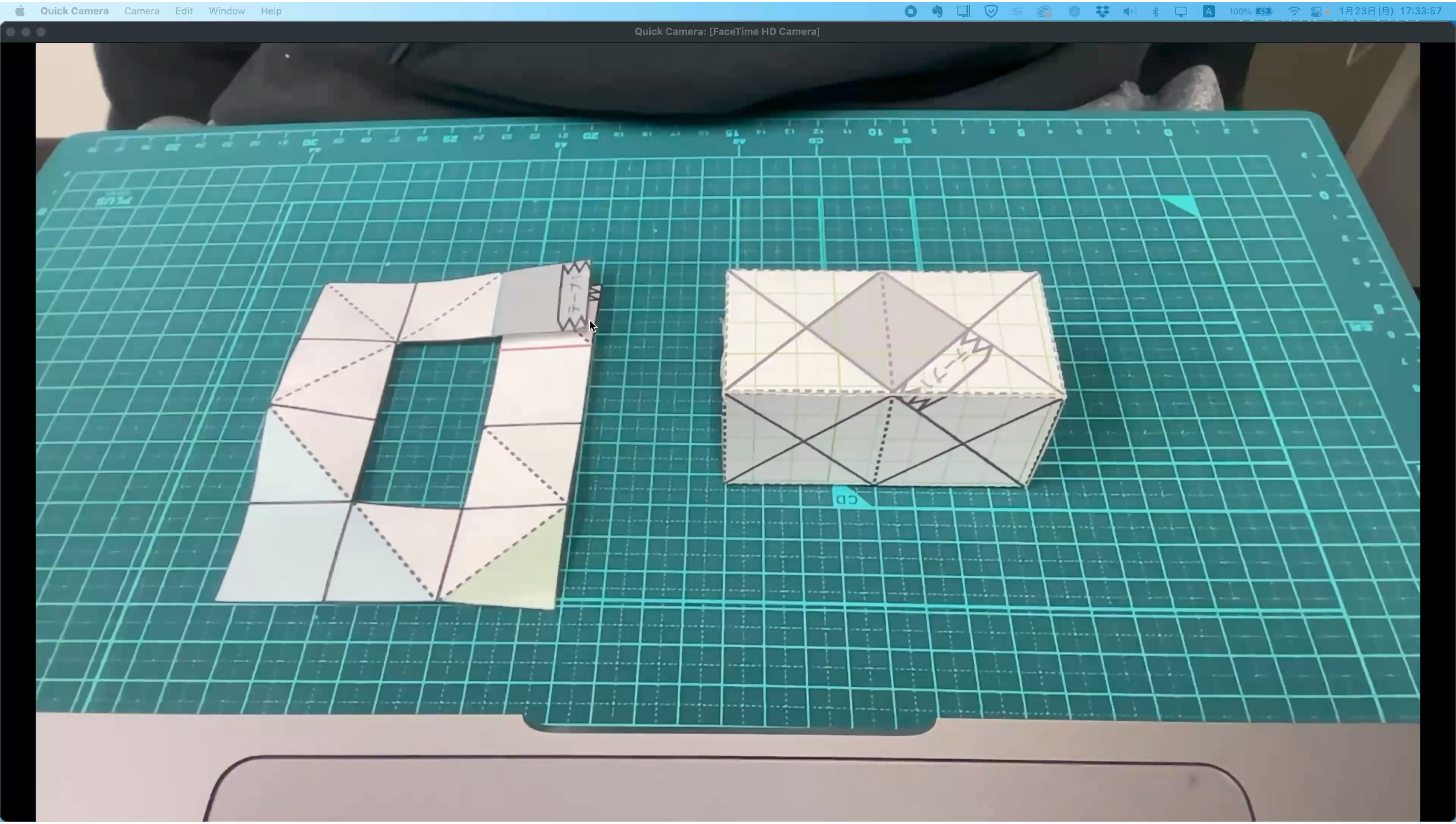


完成イメージ

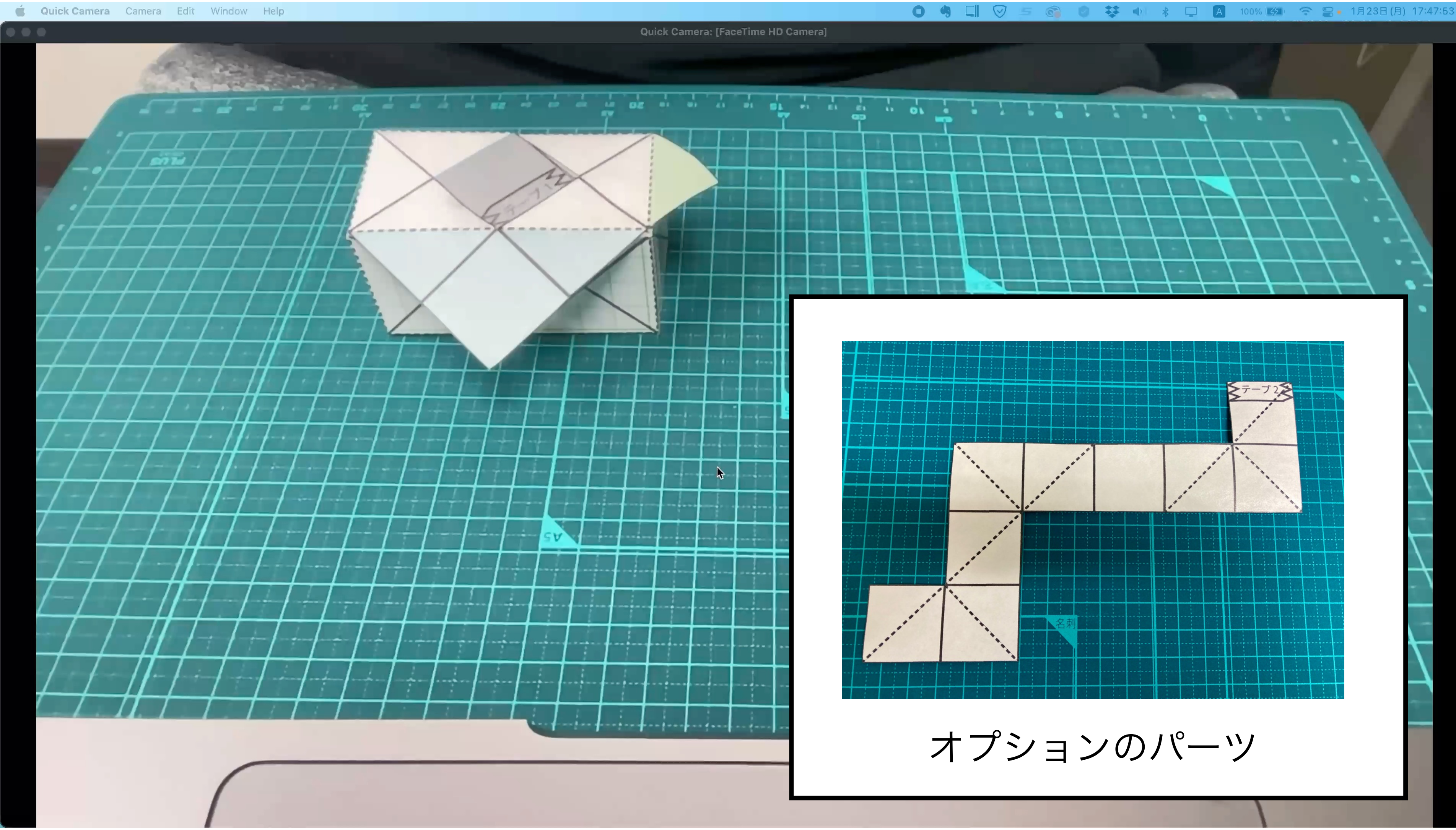
$\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}$ の格子直方体における重なり方の確認



$\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}$ の格子直方体における重なり方の確認



$\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}$ の格子直方体における重なり方の確認

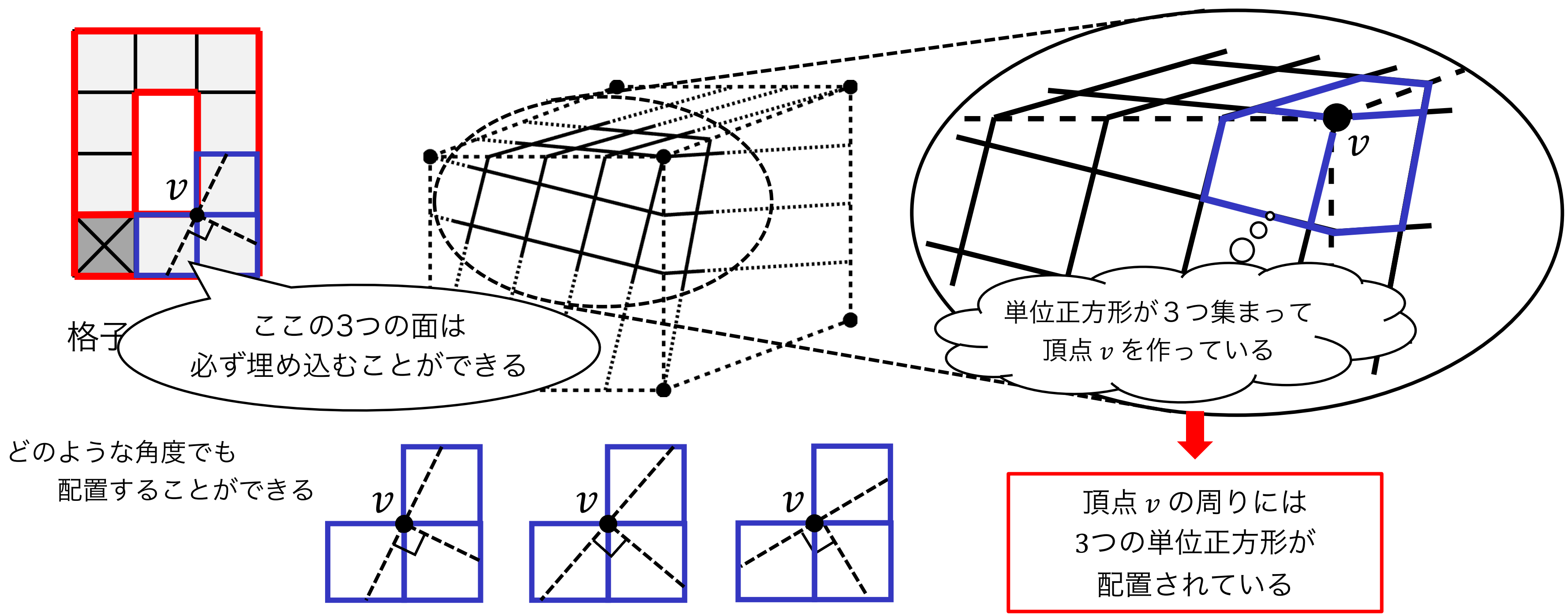


【補足】格子直方体 $xL'\times yL'\times zL'$ $\left(L'\geq\sqrt{13}\right)$ における重なり

補題 3

$L'\times L'\times L'\left(L'\geq\sqrt{13}\right)$ の格子立方体の手前半分には，面どうしが重なる格子展開図が存在する．また，辺および頂点が接触する格子展開図が存在する．

【証明】 次に示す面どうしが重なる格子展開図 Q を考える

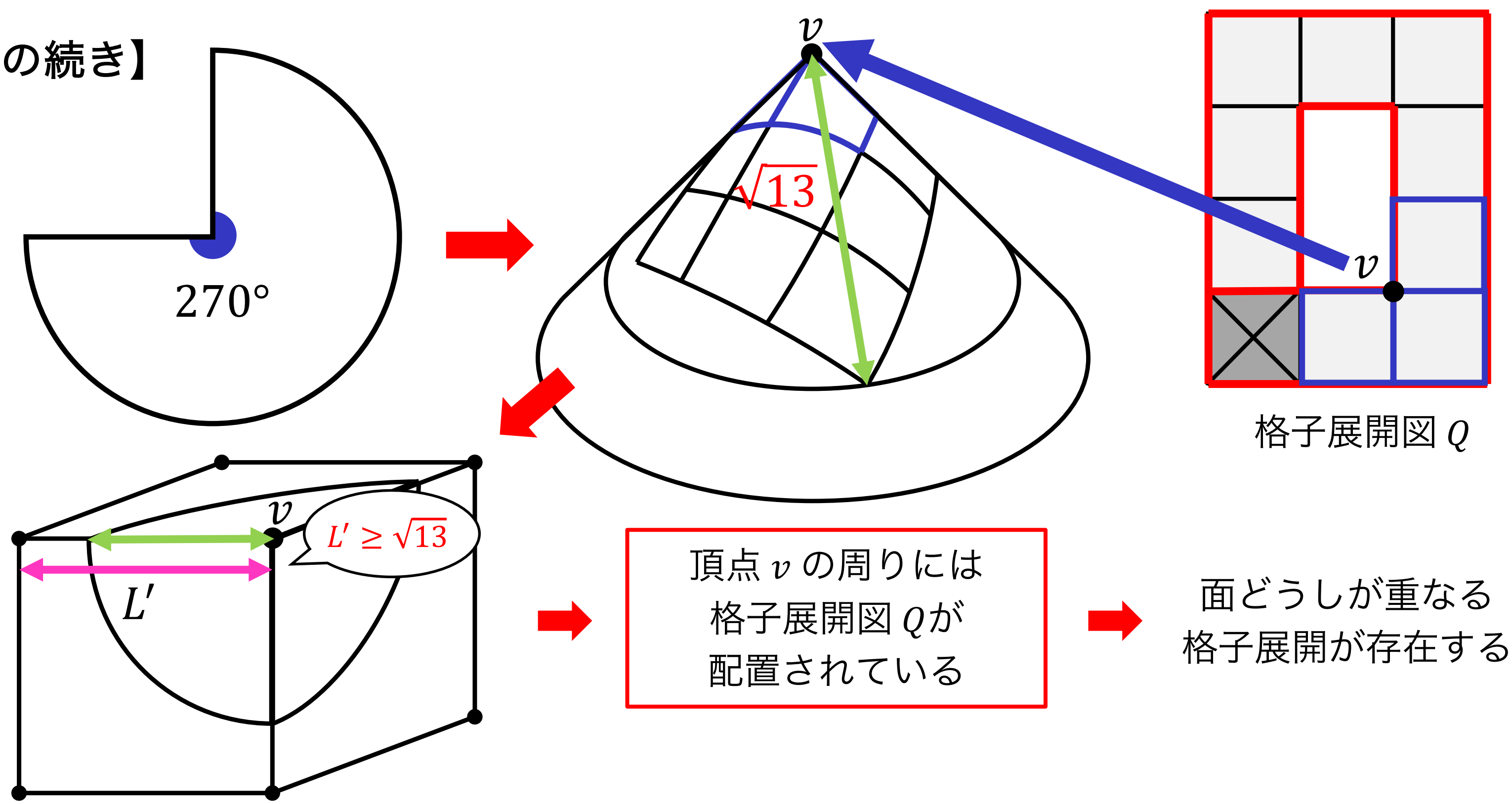


【補足】格子直方体 $xL'\times yL'\times zL'$ $\left(L'\geq\sqrt{13}\right)$ における重なり

補題 3

$L'\times L'\times L'\left(L'\geq\sqrt{13}\right)$ の格子立方体の手前半分には，面どうしが重なる格子展開図が存在する．また，辺および頂点が接触する格子展開図が存在する．

【証明の続き】



頂点 v の周りには
格子展開図 Q が
配置されている

面どうしが重なる
格子展開が存在する