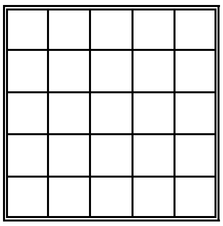
# オストルの PSPACE 困難性

吉渡 叶 *　　塩田 拓海 †　　鎌田 斗南 ‡

## 1　はじめに

本研究では，オストルと呼ばれるゲームを対象に計算複雑性を議論する．オストルは，2017 年に Masao Fukase によって開発された 2 人のプレイヤで対戦するボードゲームである．各プレイヤは，自分のコマを用いて相手のコマを移動させ，コマをボードの外や穴に押し出し合うことによってゲームの勝敗を競う．ゲームは，5×5 のマス目からなるボードと，穴コマ，各プレイヤの占有コマ（黒コマ，白コマ）を用いて行われる（図 1）．オストルの初期局面では，黒コマ，白コマが 5 つずつボードの対辺に一列に配置され，穴コマはボードの中央に配置される（図 2）．プレイヤは黒プレイヤと白プレイヤに分かれ，初期局面から交互に一手ずつ着手を行う．各プレイヤは毎ターン，自分の占有コマか穴コマのどちらかを選び，隣接する四方のマスのいずれかに移動させる（図 3）．ただし，穴コマは，すでに占有コマがある方向，動かすと場外に出てしまう方向には移動させることはできない（図 4）．占有コマをすでに占有コマが存在するマスに移動する場合，移動先にある占有コマは押し出され，移動方向に沿って 1 マス移動する（図 5(a)）．複数個の占有コマが連続して隣接する場合には，それらのコマが全て 1 マスずつ移動する（図 5(b)）．この操作において，あるコマが場外に出た場合（図 6(a)），もしくは穴コマの上に移動した場合（図 6(b)）は，



(a) 5 × 5 のボード

(b) 穴コマ

(c) 黒コマ

(d) 白コマ

図 1: オストルの内容物

*名古屋大学
†九州工業大学
‡北陸先端科学技術大学院大学

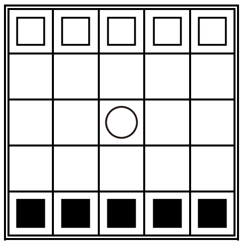
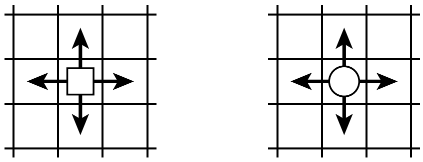


図 2: オストルの初期局面



(a) 占有コマ　　(b) 穴コマ

図 3: 各コマの移動

そのコマを排除する．そして，排除されたコマとは異なる色のプレイヤが 1 点獲得する．また，各プレイヤは相手の直前の着手を打ち消す着手はできない．つまり「相手の直前の着手が行われる前の盤面」と「現在の自分の着手の後の盤面」が同一になるような着手は認められない（例を 図 7 に示す）．以上の着手を交互に繰り返し，先に 2 点を取ったプレイヤが勝利となる．

オストルには「両方のプレイヤが着手できる特殊なコマが存在する」「直前の着手の繰り返しの禁止」というルールが存在する．ゆえに，これまでの計算機科学で研究されてきた古典的なボードゲームやパズルとは異なる構造を持つと考えられる．一方で，ボードに固定されたピースが存在せず同一局面が複数回

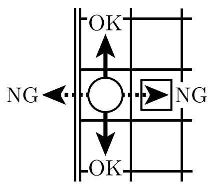
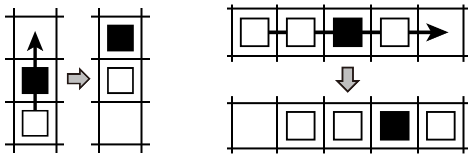
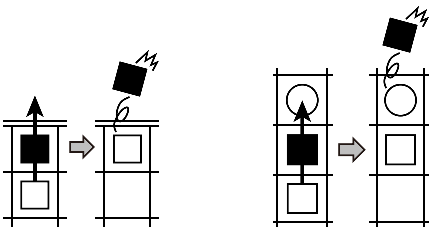



図 4: 穴コマの移動可能な場所



(a) 1 個のコマ　　(b) 複数個のコマ

図 5: コマの押し方



(a) 場外に出す　　(b) 穴に落とす

図 6: 相手のコマを取る操作

現れうるゲームであり，将棋やチェスなどの計算が困難な組合せゲームと性質を共有すると言える．このことから，オストルの構造を解明することで古典的なボードゲームの解析とは異なる知見や，同一局面の再出を許すボードゲームの対処法などが得られると期待する．本研究では、ボードサイズを $n \times n$ に拡張したオストルの必勝判定問題が PSPACE 困難であることを示す．

## 2　準備

帰着には有向グラフ上の一般化頂点しりとりを利用する．一般化頂点しりとりの初期局面は，ある 1 つの頂点にトークンが 1 つ置かれた有向グラフである．二人のプレイヤは自分の手番で，現在トークンが置かれている頂点の有向辺に従った隣接点へとトークンを動かす．このとき 1 度トークンが置かれたことのある頂点には移動できない．先にトークンの移動ができなくなったプレイヤの負けである．

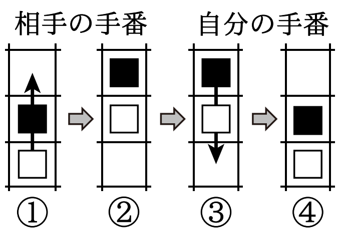



図 7: 元の盤面に戻る着手は禁止

二部グラフにおける一般化頂点しりとりの頂点を $V = V_B \cup V_W$ とし，一般性を失うことなく開始頂点は $V_B$ に含まれているものとする．二部グラフでの一般化頂点しりとりにおける先手を黒プレイヤ，後手を白プレイヤとする．黒プレイヤはトークンを必ず $V_B$ の頂点から $V_W$ の頂点に移動させ，白プレイヤはトークンを必ず $V_W$ の頂点から $V_B$ の頂点に移動させるものとする．このとき，以下の補題が知られている．

**補題 1** (L. David and S. Michael, 1980 [1])**.** 有向グラフでの一般化頂点しりとりの必勝判定問題は，入力が二部グラフかつ平面グラフかつ最大次数 *3* かつ開始頂点が入次数 *0*，出次数 *2* の頂点であっても *PSPACE* 完全である．

## 3　オストルの PSPACE 困難性

平面二部グラフかつ最大次数 3 かつ開始頂点が入次数 0，出次数 2 である任意の一般化頂点しりとり（以降，単に一般化頂点しりとりと呼ぶ）の局面から，勝敗が等価であるオストルの局面を多項式時間で作成できることを示す．勝敗が等価であるとは次の 2 つの条件が必要十分の関係であることを指す．

1. 一般化頂点しりとりにおいて黒プレイヤ（先手）が勝利する
2. 作成したオストルの局面において黒プレイヤ（先手）が勝利する

はじめに，勝利条件が 1 点先取であるオストルについて，PSPACE 困難性の証明を行う．作成するオストルの局面は，**勝敗ガジェット**と**メインガジェット**の 2 つにより構成される．ここで，勝敗ガジェットとは，白プレイヤが必ず 2 手で黒コマを落とすことができるガジェットであり，メインガジェットとは，一般化頂点しりとりのグラフ構成を再現したオストルのコマ配置である．

まず，勝敗ガジェットについて考察する．使用する勝敗ガジェットは，1 つの黒コマと 2 つの白コマをボードの隅に配置したものである（図 8）．このガジェットにおいて，黒プレイヤ（先手）が黒コマ $a$ を上または右に動かした場合，黒プレイヤは白コマ $b$ で $a$ を場外に落とすことができる．従って，黒プレイヤは，勝敗ガジェットに着手することができない．一方で，白プレイヤ（後手）は，白コマ $c$ を左に動

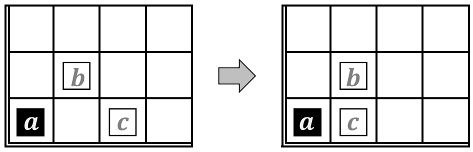



図 8: 勝敗ガジェット（左：初期状態，右：白着手後）

かすことで，次のターンで黒コマ $a$ を確実に場外に出すことができる．つまり，白プレイヤは，勝敗ガジェットに着手した時点で 1 点獲得が確定する．

そこで，黒プレイヤ（先手）は，メインガジェットで「現在の状態のまま黒プレイヤの手番が回ってくると，黒プレイヤが白コマを落とせる局面」を維持し続けることで，白プレイヤに勝敗ガジェットに着手させることを阻止するという策を取る．この状態を**黒プレイヤのリーチ**，もしくは単に**リーチ**と呼ぶ．白プレイヤに対しても同様に定義する．黒プレイヤがメインガジェットでリーチし続けている間は，白プレイヤはリーチを回避しなければ次の手番で黒プレイヤが必ず 1 点獲得できる．ゆえに，白プレイヤは勝敗ガジェットに着手することができない．メインガジェットにおいて，黒プレイヤのリーチを白プレイヤが回避できなければ黒プレイヤの勝ちとなる．また，黒プレイヤのリーチが途切れたならば白プレイヤの勝ちとなる．つまり，以下の補題が成り立つ．

**補題 2.** 勝利条件が 1 点先取であるオストルについて，メインガジェットにおいて黒プレイヤ（先手）がリーチにできない場合，白プレイヤ（後手）が勝敗ガジェットに着手し，白プレイヤの勝利が確定する．

次に，メインガジェット内でのコマの移動に多用されるアイデアを以下の補題で示す．

**補題 3.** 黒プレイヤ（先手）を $P_B$，白プレイヤ（後手）を $P_W$ とする．現在，プレイヤ $P_i$ $(i \in \{B, W\})$ が手番であるとする．ある穴コマ $h$ を中心として，4 方向のうち 2 方向以上にプレイヤ $P_i$ の専有コマ，プレイヤ $P_j$ $(j \in \{B, W\}, j \neq i)$ の専有コマの順で（複数個）隣接していた場合，プレイヤ $P_i$ が穴コマ $h$ を動かす以外の着手を行うと，プレイヤ $P_j$ は次の手番で必ず 1 点得ることができる．

例えば，白プレイヤ（後手）の手番で図 9 の状態となっているとする．この状態は，黒プレイヤのリーチが 2 つ存在するので，**ダブルリーチ**と呼ぶ．ここで，白プレイヤが白コマ $a$ を右・下に動かした場合，

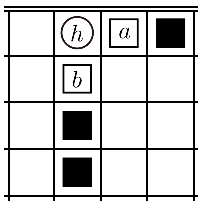



図 9: ダブルリーチの様子

白コマ $b$ が落とされる．また，白コマ $b$ を右・下・左に動かした場合，白コマ $a$ が落とされる．ゆえに，白プレイヤは穴コマ $h$ を左に動かさないければならない．

以上の補題を用いて，以下の主張を示す．

**定理 1.** ボードサイズが $n \times n$ であり，相手のコマを先に 1 個排除したプレイヤが勝利するオストルの必勝判定問題は *PSPACE* 困難である．

*Proof.* 与えられた最大次数 3 の平面二部グラフ（開始頂点は入次数 0，出次数 2）に対して，その上での一般化頂点しりとりと勝敗が等価となるオストルが構成可能であることを示す．

メインガジェットでは，一般化頂点しりとりのトークンの移動を，特定の穴コマ $X$ の移動により表現する．以降，図中では穴コマ $X$ を二重丸で表す．

最大次数 3 の一般化頂点しりとりにおいて，開始頂点以外に入次数 0 の頂点はゲームに関係しないため，存在しないものとする．このとき，最大次数 3 の一般化頂点しりとりのグラフに存在する頂点は以下の 7 個に分類される．

(1). 開始頂点
(2). 出次数 0，入次数 1 の頂点
(3). 出次数 0，入次数 2 の頂点
(4). 出次数 0，入次数 3 の頂点
(5). 出次数 1，入次数 1 の頂点
(6). 出次数 1，入次数 2 の頂点
(7). 出次数 2，入次数 1 の頂点

開始頂点は一般性を失うことなく $V_B$ のみに存在し，その他の各種類のコマは二部グラフの 2 つの頂点集合 $V_B, V_W$ のいずれにも存在しうる．従って，計 13 種類の頂点に対応するガジェットと，それらを接続する辺に対応するガジェットが構成可能であることを示せば良い．

まずは，一般化頂点しりとりの開始頂点に対応するガジェットについて説明する．開始頂点の出次数

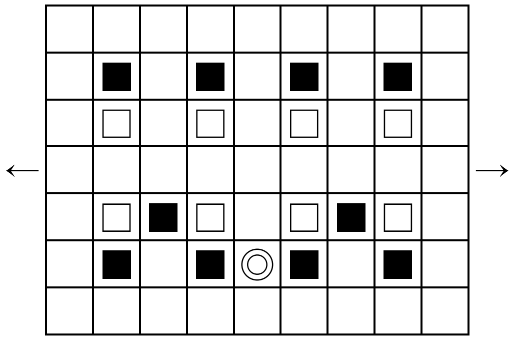


図 10: 開始頂点（$V_B$）

は 2 であり，先手は，2 つの隣接点のうちどちらの頂点にトークンを進めるかを選択できる．これに基づき，黒プレイヤ（先手）が穴コマ $X$ の移動先を決定可能なオストルのガジェットを作成する（図 10）．

補題 2 より，黒プレイヤ（先行）は常にリーチをかけ続けなければならない．このガジェットにおいて，黒プレイヤがリーチをかける手は，穴コマ $X$ を上に移動させる手のみである．次に，白プレイヤ（後攻）を考える．黒プレイヤのダブルリーチを回避するには，穴コマ $X$ を移動させるしかない．なぜなら，補題 3 より，他のどの白コマを動かしたとしても，リーチの状態は解除されない．また，オストルのルールにより，直前の局面に戻すことはできず，穴コマで黒コマや白コマを押すこともできない．ゆえに，白プレイヤが打てる手は，穴コマ $X$ を上に移動させる手のみである．さらに，次の黒プレイヤの手番では，黒プレイヤが改めて局面をリーチにする必要がある．直前の局面に戻すことは禁止されているため，黒プレイヤが取れるのは，穴コマ $X$ を左右のどちらかに移動させる着手に限定される．左のマスに移動させた場合は，黒プレイヤのリーチとその回避を繰り返し，穴コマ $X$ はガジェットの左方（図中の矢印部）に移動する．右のマスに移動させた場合も，同様に右方に移動する．このように黒プレイヤの選択によって，穴コマ $X$ の移動先を選択することが可能となる．

その他のガジェットについては，付録 A に示す通りである．各ガジェットは，2 回以上通過できないように設計されている．そのため，穴コマ $X$ を移動させながらガジェットを通過していき，有向辺に従った隣接頂点が存在しない，または全て訪問済になった時点で手番のプレイヤの負けとなる．

続いて，これらの頂点ガジェット同士が，ボード上

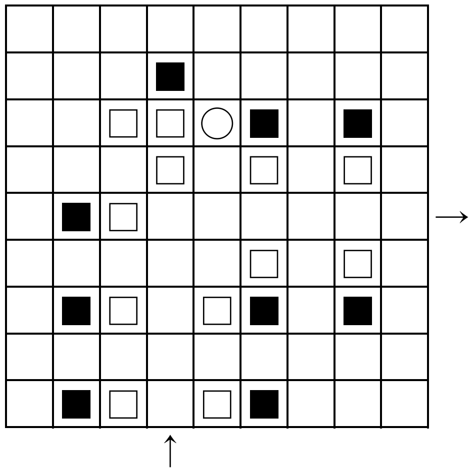


図 11: 直角ガジェット（$V_B$）

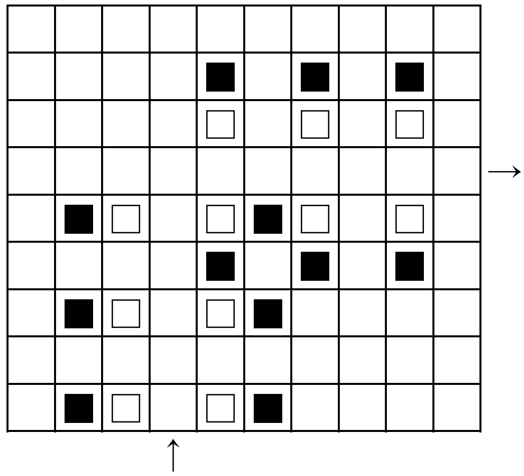


図 12: 直角ガジェット（$V_W$）

で正しくつなぎ合わせることができることを確認する．頂点ガジェットどうしを結ぶガジェットを**接続ガジェット**と呼ぶ．接続ガジェットは，直線もしくは，直角なガジェットとして表現できる（図 11,12）． ここで，各頂点ガジェットの縦横のサイズは，異なるパリティを持ちうることに注意する．そのため，ガジェットを組み合わせる際，必要に応じて，偶奇の差を調整するための**パリティガジェット**を用いる（図 13）．

このように，任意の一般化頂点しりとりの局面からオストルの局面を作成することができ，この操作は多項式時間で行われる．ゆえに，オストルは PSPACE 困難であることが示せた． □

さらに，本結果は，次のように拡張可能である．

**定理 2.** ボードサイズが $n \times n$ であるとき，相手の

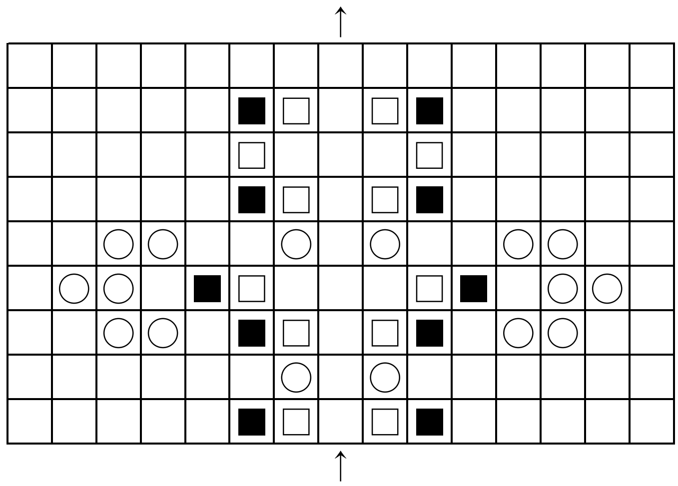


図 13: パリティガジェット

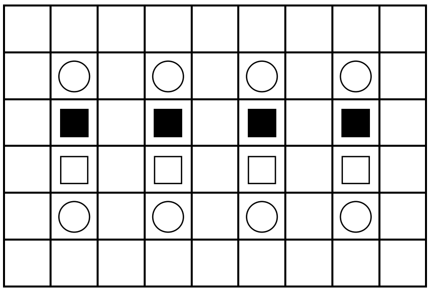


図 14: $k$ 拡張ガジェット

コマを先に $k$ 排除したプレイヤが勝利するオストルの必勝判定問題は $PSPACE$ 困難である．

**定理 3.** ボードサイズが $n \times n$ であり，黒コマと白コマの数がそれぞれ $n$ であるとき，相手のコマを先に $k$ 個排除したプレイヤが勝利するオストルの必勝判定問題は $PSPACE$ 困難である．

定理 2 は，定理 1 の証明に $k$ **拡張ガジェット**（図 14）を追加することで同様に示すことができる．定理 3 は，ボードの隅へのガジェットと無関係な黒コマまたは白コマの追加と，それに合わせたボードサイズの調整を行うことで同様に示すことができる．

# 4　まとめ

本研究では，一般化オストルの PSPACE 困難性を証明した．一方，この判定問題が PSPACE に含まれるかどうかは自明ではない．これは，一般化オストルにおいて，同一局面が複数回発生しうることに起因している．

# 参考文献


[1] Lichtenstein David and Sipser Michael. Go is polynomial-space hard. *Journal of the ACM*, 27(2):393–401, 04 1980.


# 付録 A　頂点ガジェット一覧

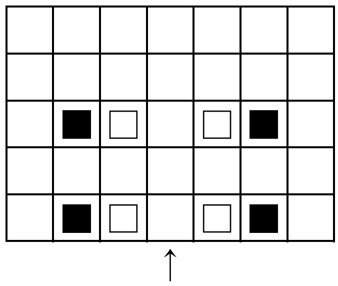


図 15: 出次数 0，入次数 1,2,3（$V_B$）のガジェット

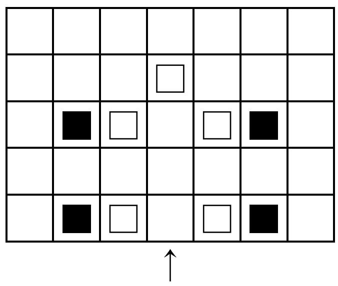


図 16: 出次数 0，入次数 1,2,3（$V_W$）のガジェット

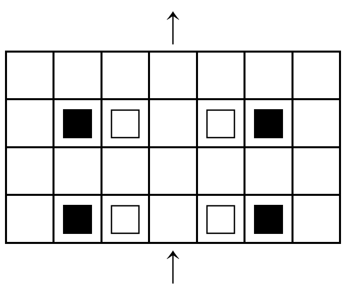


図 17: 出次数 1，入次数 1（$V_B$，$V_W$）のガジェット

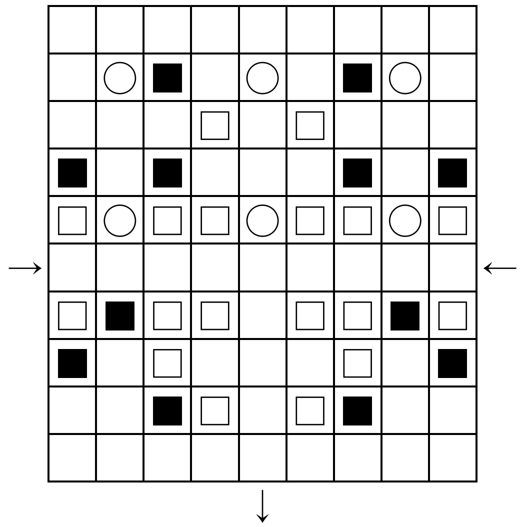


図 18: 出次数 1，入次数 2（$V_B$）のガジェット

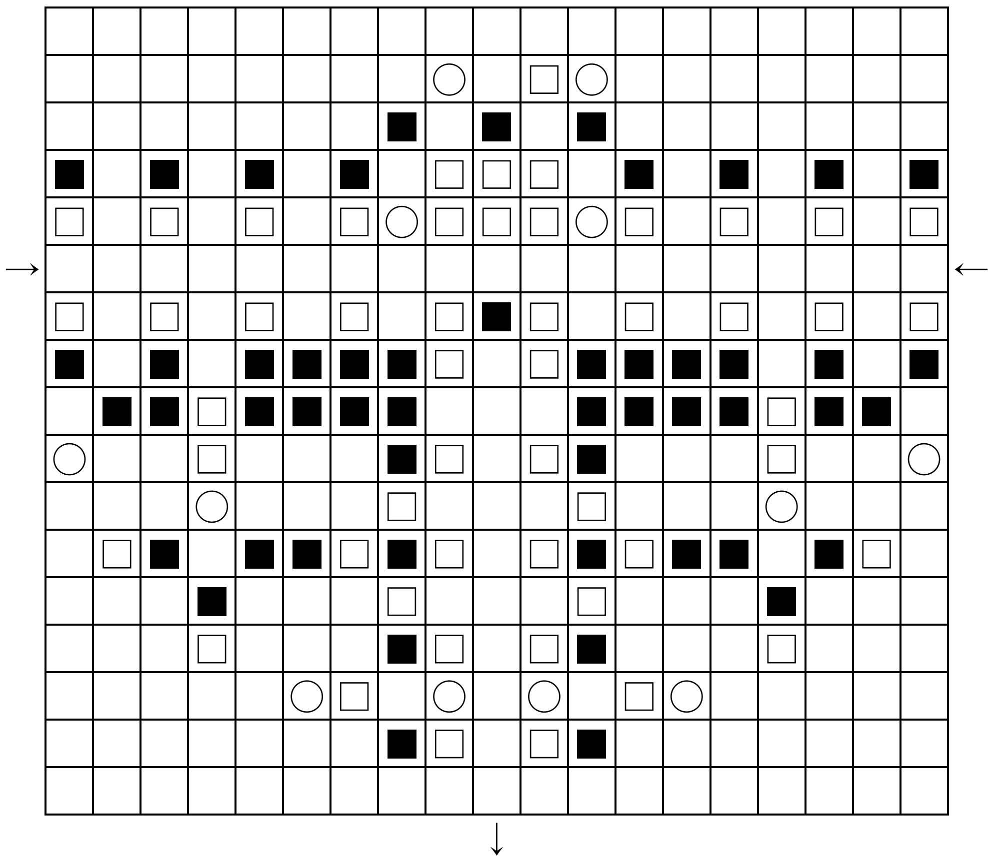


図 19: 出次数 1，入次数 2（$V_W$）のガジェット

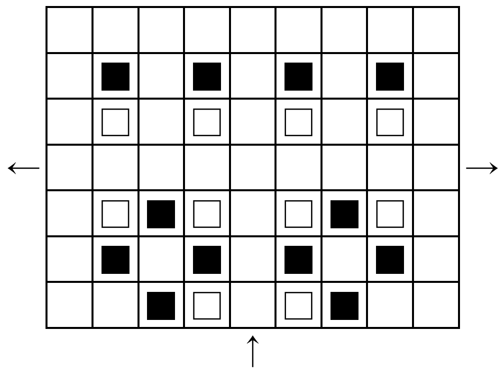


図 20: 出次数 2，入次数 1（$V_B$）のガジェット

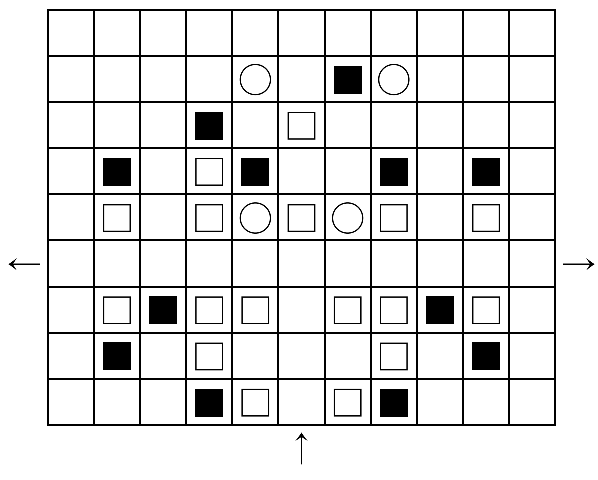


図 21: 出次数 2，入次数 1（$V_W$）のガジェット