オストルのPSPACE困難性

◎吉渡　叶　名古屋大学
塩田拓海　九州工業大学
鎌田斗南　北陸先端科学技術大学院大学

組合せゲーム

組合せゲーム

- プレイヤが二人
- 交互に着手
- ランダム性がない
- 全ての情報が公開

組合せゲームにおける興味関心

現在の局面，次に行動するプレイヤが与えられたとき，
どちらのプレイヤがゲームに勝つかを判定したい

→**必勝判定**

オストル

プレイヤ

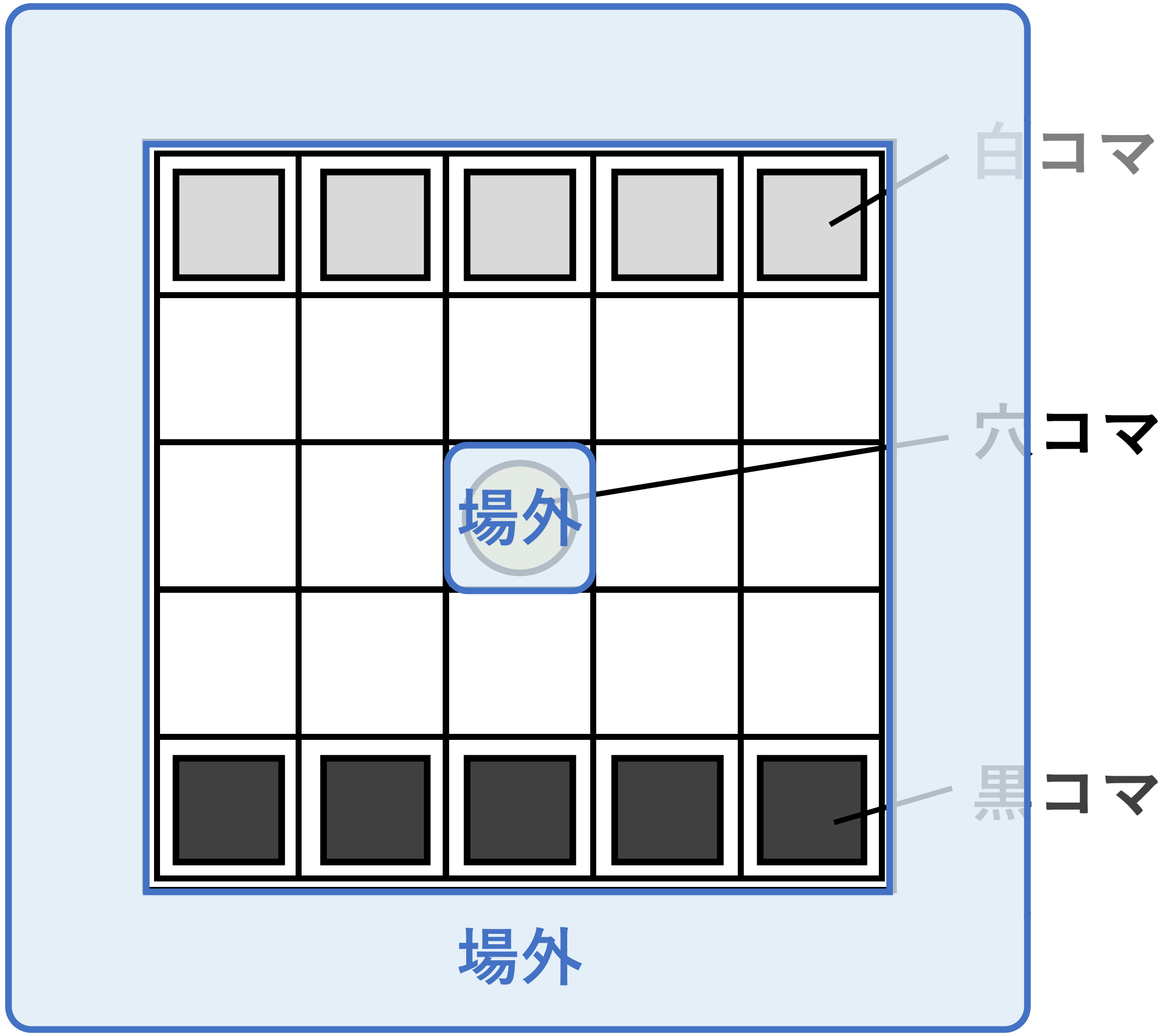
黒プレイヤ(先手), 白プレイヤ

勝敗条件

自色のコマが２つ**場外**に出たら,
その色のプレイヤの負け

場外

・穴コマが置いてあるマス
・ボードの外



オストル

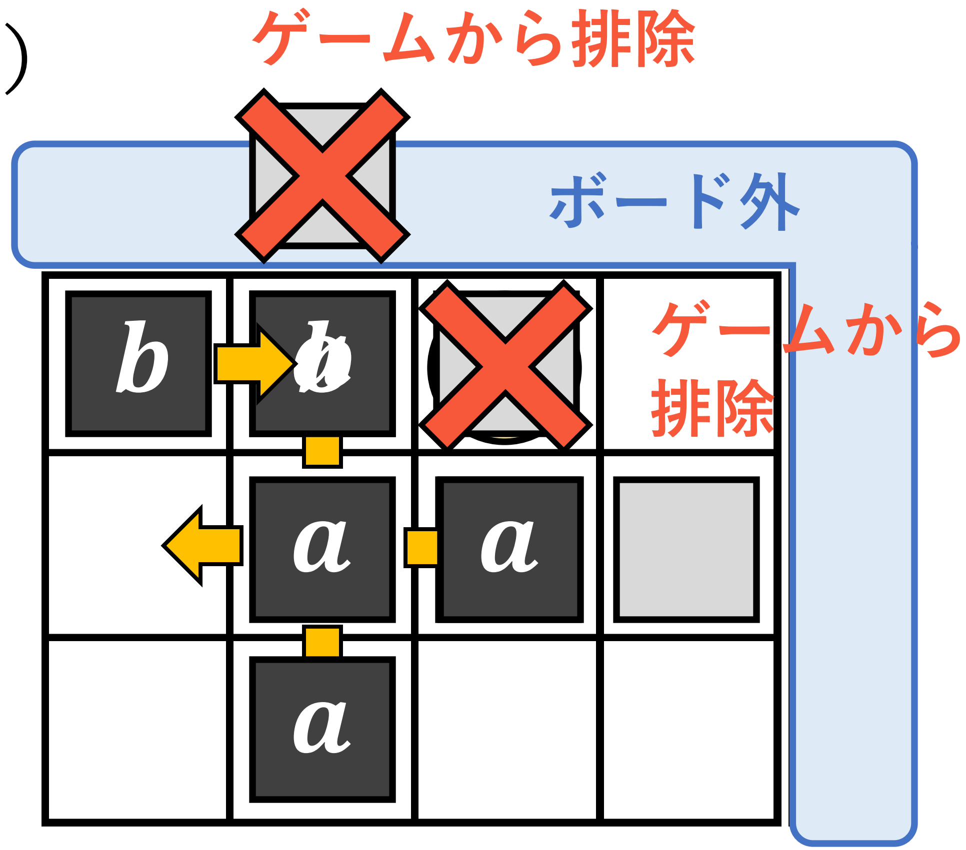
手番での行動（①，②のいずれかを選択）

①自色のコマを１つ選び，
上下左右いずれかに１マス移動

このとき，移動先が

・**黒コマ**または**白コマ**
→**全てまとめて**移動

・**場外**（穴コマまたはボード外）
→**場外に出たコマを排除**



オストル

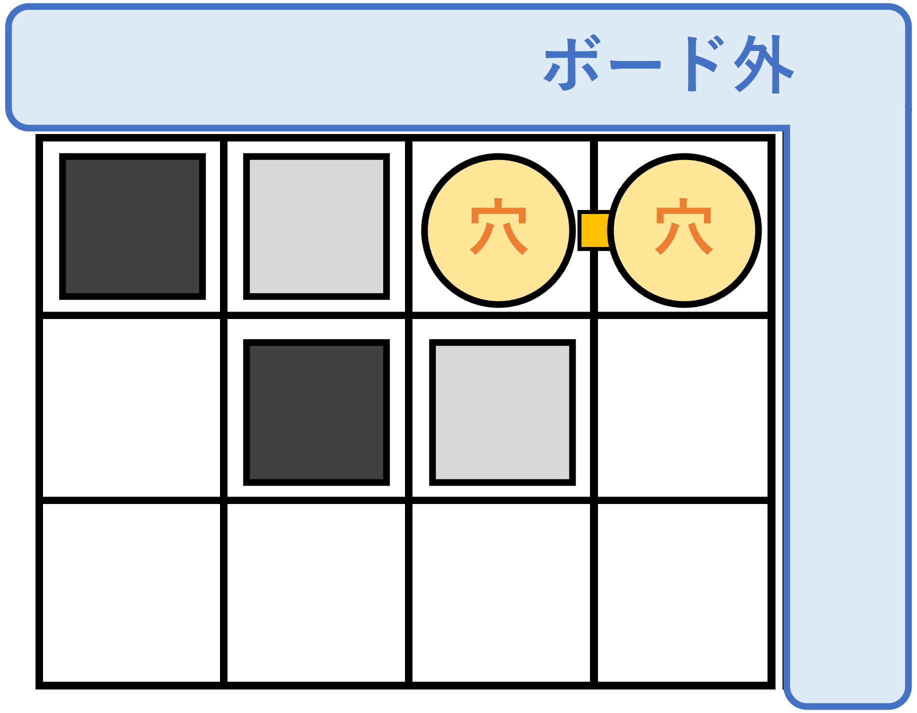
手番での行動（①，②のいずれかを選択）

②穴コマを上下左右に隣接する
空きマスに移動

できない移動

・場外に出す

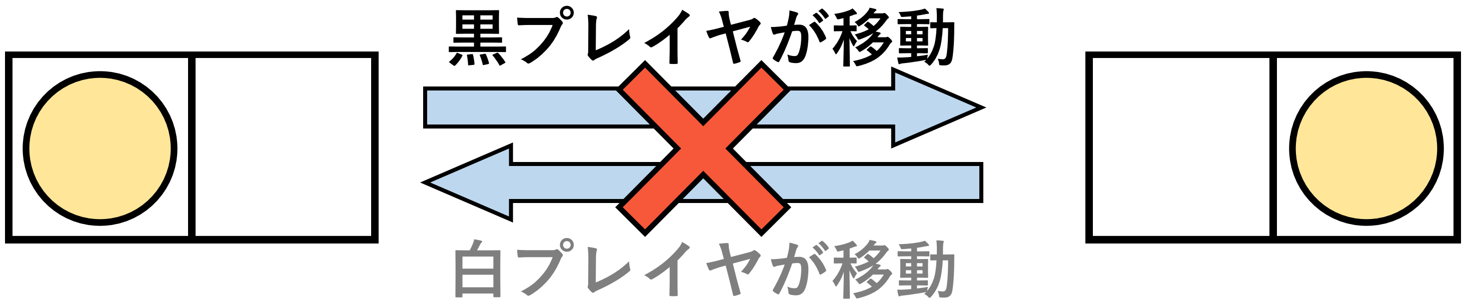
・黒コマまたは白コマに重ねる



オストル

制約

相手の**直前の着手を取り消す手**は禁止



研究理由

局面の繰り返しが起こりうるゲーム

相手の**直前の**着手を取り消す手は禁止だが,
複数の局面を経由して一度現れた局面に戻ることはある

→将棋などの難しいゲームに近い
PSPACEに含まれるかは明らかではない

本研究

オストルの必勝判定についての研究

主結果

ボードサイズが$n \times n$かつ黒コマと白コマがそれぞれn個であっても，任意の正整数kについて，相手のコマを先にk個排除したプレイヤが勝利するオストルの必勝判定問題はPSPACE困難である．

今回の発表内容

ボードサイズ自由，コマ数自由，$k = 1$の場合の証明

証明概要

有向グラフ上での**一般化頂点しりとり**からの帰着

一般化頂点しりとり

プレイヤ

プレイヤA(先手)，プレイヤB

手番での行動

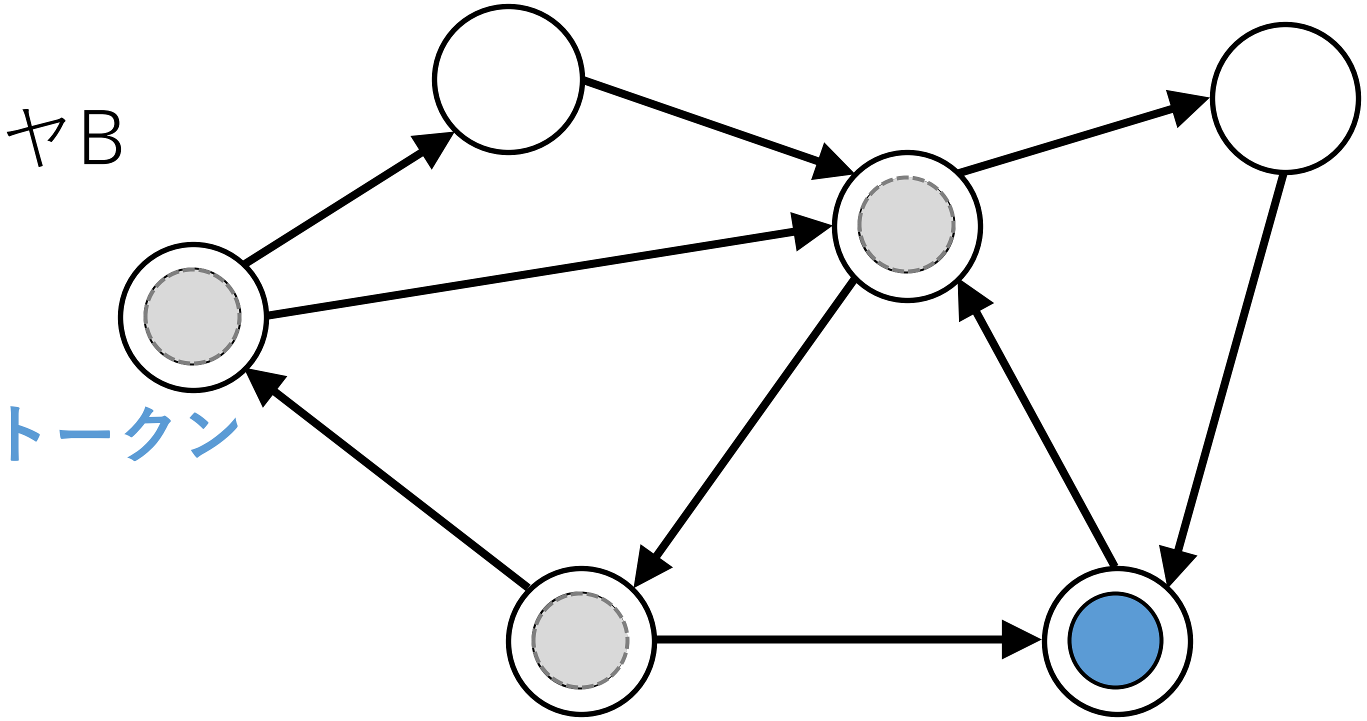
トークンの移動

・有向辺に従う**隣接点**

・**未訪問**の頂点

勝敗

トークンを動かせないプレイヤの負け



トークンを移動できない
→プレイヤBの負け

帰着概要

一般化頂点しりとりは，以下の制限を加えてもPSPACE完全[1]

- 平面グラフ
- 二部グラフ
- 最大次数３
- 開始頂点が入次数０，出次数２

制限された一般化頂点しりとりで先手のプレイヤAが勝つ **⇔オストルで先手の黒プレイヤが勝つ**

を満たすオストルの局面を多項式時間で作成できることを示す

[1] Lichtenstein David and Sipser Michael. Go is polynomial-space hard. Journal of the ACM, 27(2):393–401, 04 1980.

帰着のアイデア

メインガジェット

一般化頂点しりとりの局面を再現した部分

勝敗ガジェット

白プレイヤに有利な部分

作成するオストルの局面

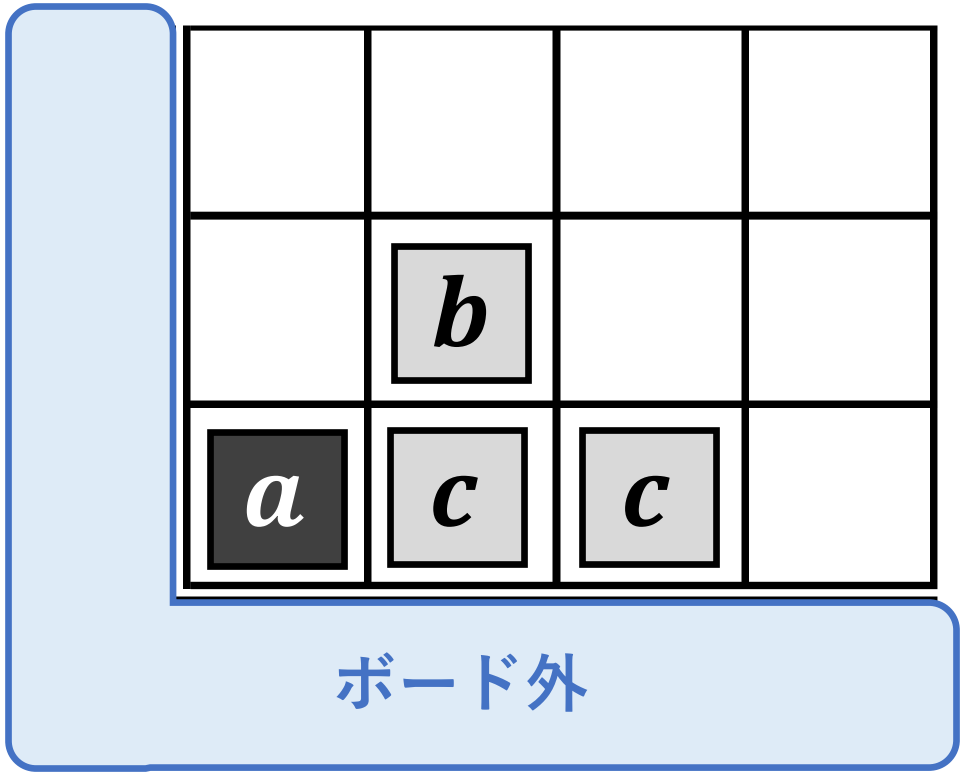
勝敗ガジェット

黒プレイヤ：

黒コマaをどのように動かしても
白コマbに場外に出される

白プレイヤ：

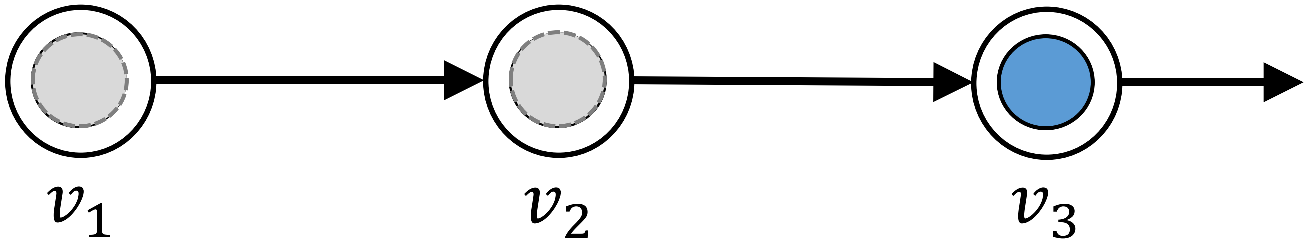
白コマcを左に動かすことで,
次の手番で必ず黒コマaを場外に出せる



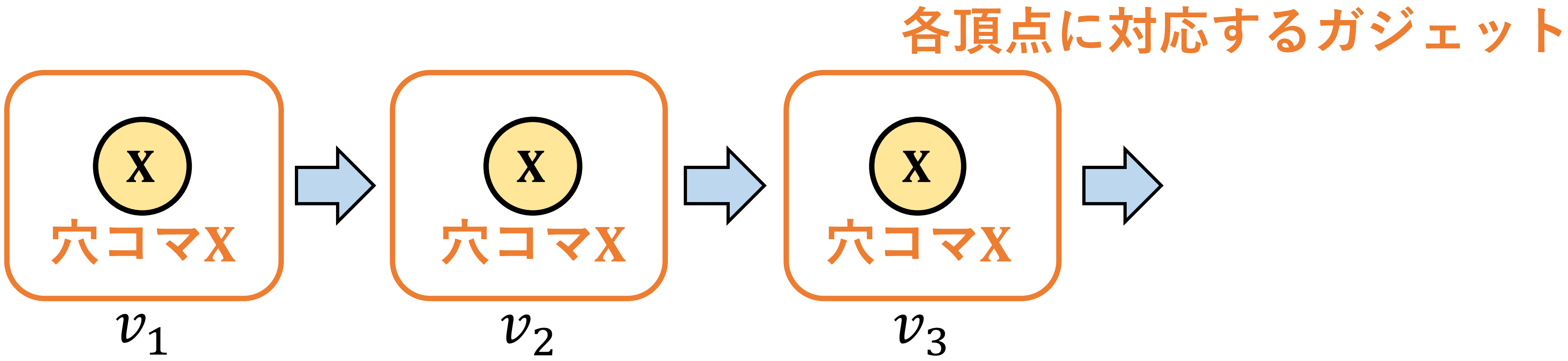
白プレイヤは勝敗ガジェットに着手した時点で,
黒コマを１個場外に出せることが確定する

メインガジェット

一般化頂点しりとりでのトークンの移動



オストルでは**特定の穴コマXの移動**で再現



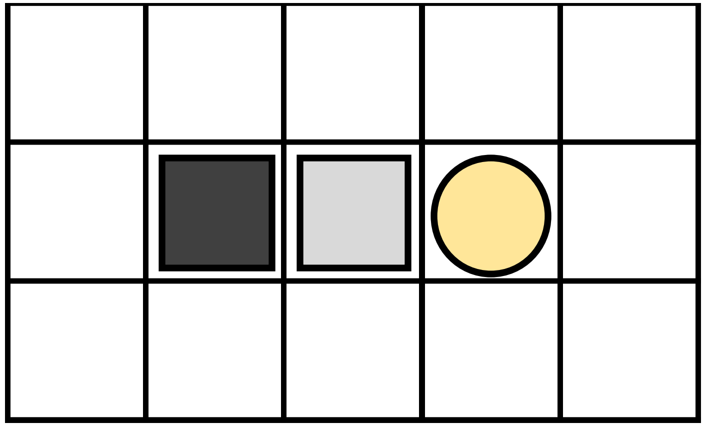
メインガジェット

白プレイヤに自由に手を打たせるチャンスを与えると,
勝敗ガジェットにより黒プレイヤは負ける

→**黒プレイヤはメインガジェットで白コマを狙い続ける**

メインガジェット

黒プレイヤの
着手後の状態



白プレイヤはこの状態の対処をしないと
次の手番で負ける
→絶対に対処しないといけない
→勝敗ガジェットに着手できない

黒プレイヤはこの操作を繰り返し,
狙った白コマを場外に出せたら黒プレイヤの勝ち

対応関係

まとめると，作成するオストルの局面の構造は以下の通り

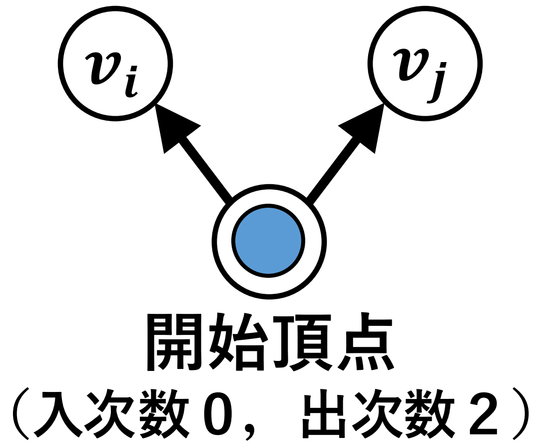
一般化頂点しりとりにおいて，**プレイヤAが勝つ**
⇒**メインガジェットで**白コマを場外に出して**黒プレイヤが勝つ**

一般化頂点しりとりにおいて，**プレイヤBが勝つ**
⇒**勝敗ガジェットで**黒コマを場外に出して**白プレイヤが勝つ**

メインガジェット作成のために必要なこと

１．全ての頂点に対し，対応するガジェットの作成
２．ガジェットをボード上で正しく繋げられることの確認

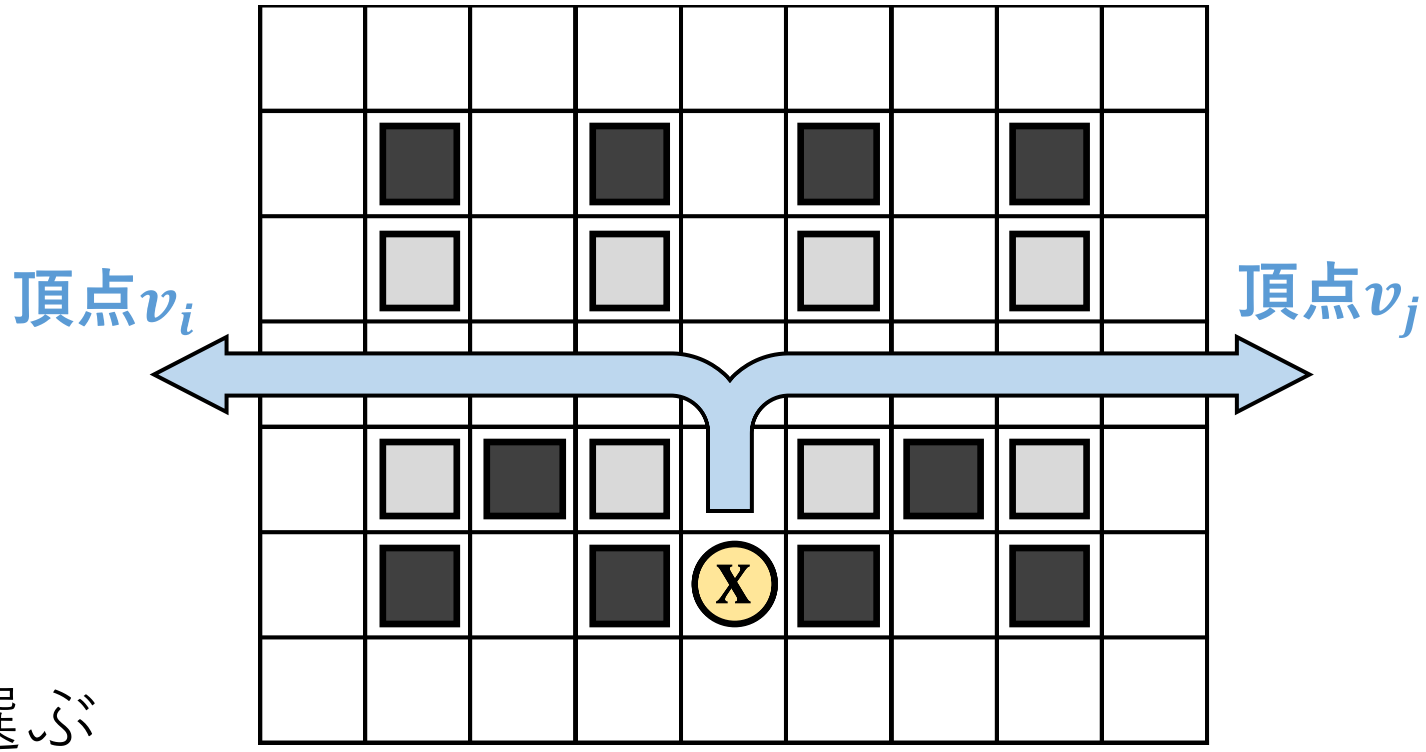
開始頂点



先手のプレイヤAが
行き先（v_iまたはv_j）を選ぶ

→黒プレイヤが行き先を選ぶ

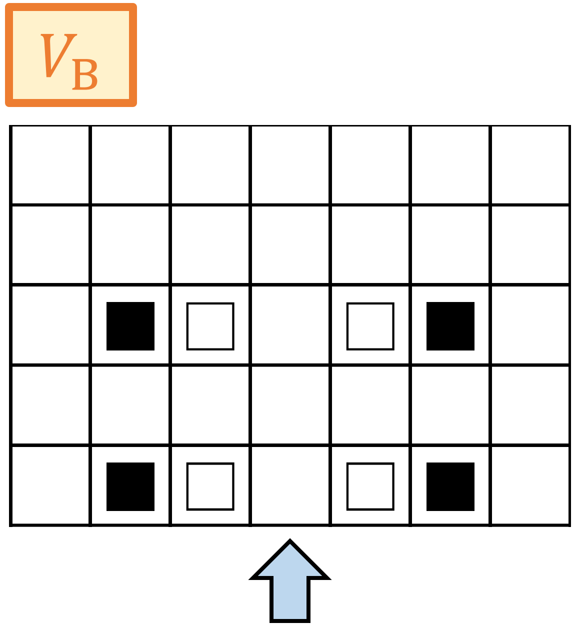
開始頂点を表すオストルのガジェット

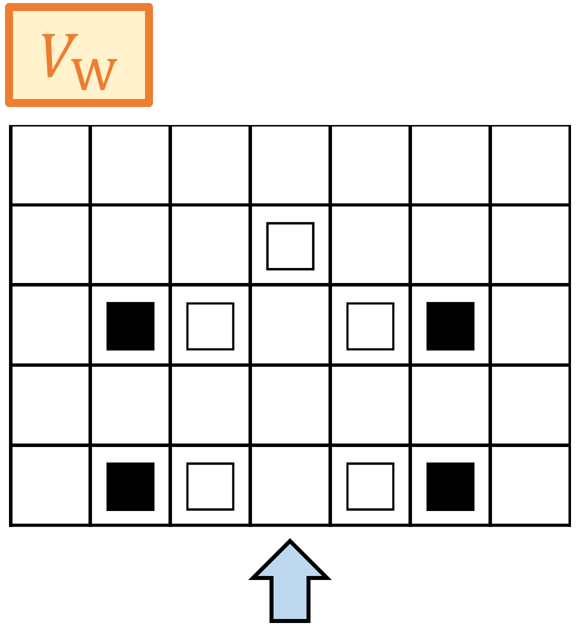


その他の頂点ガジェット紹介

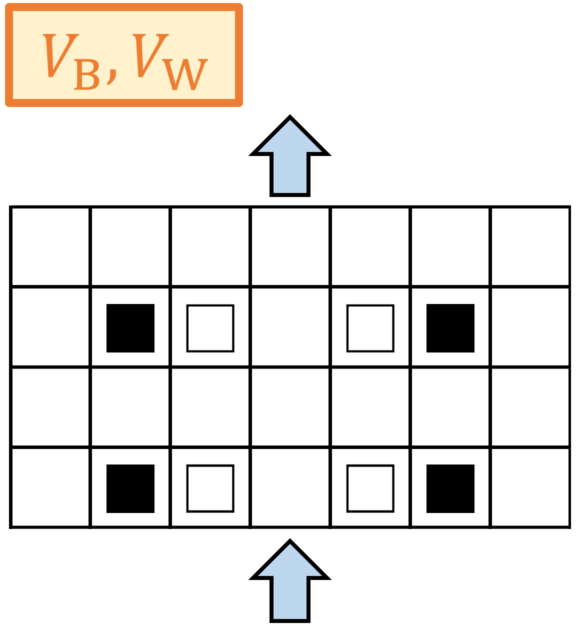
入次数 1，出次数 0 の頂点

（入次数 2 または 3 も同様）





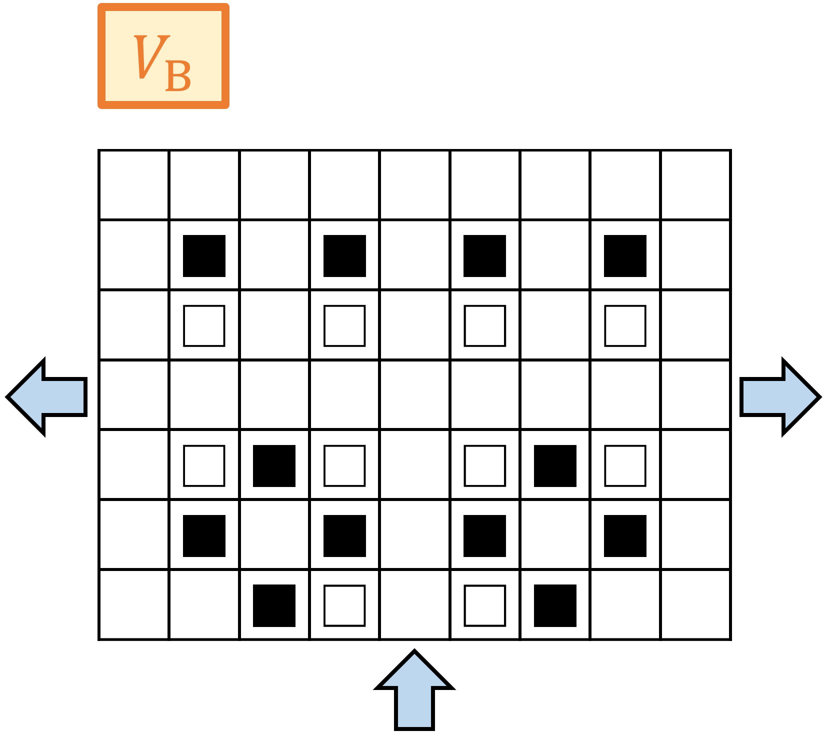
入次数 1，出次数 1 の頂点

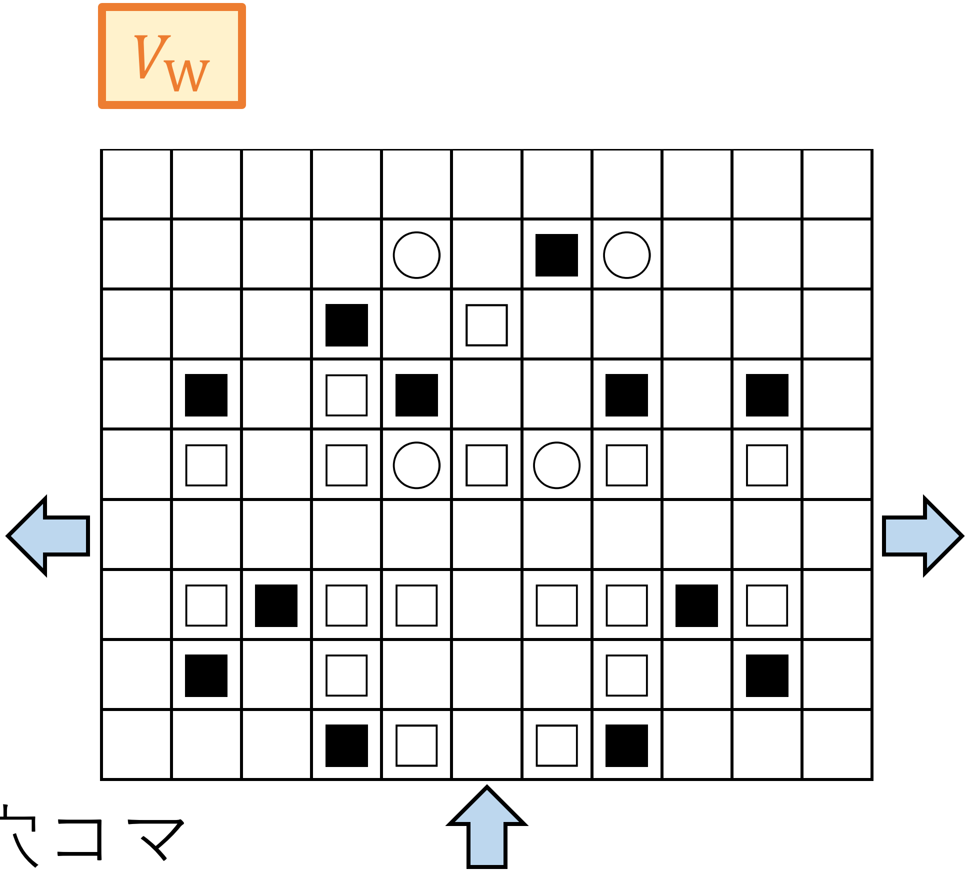


■ 黒コマ　□ 白コマ　○ 穴コマ

その他の頂点ガジェット紹介

入次数１，出次数２の頂点

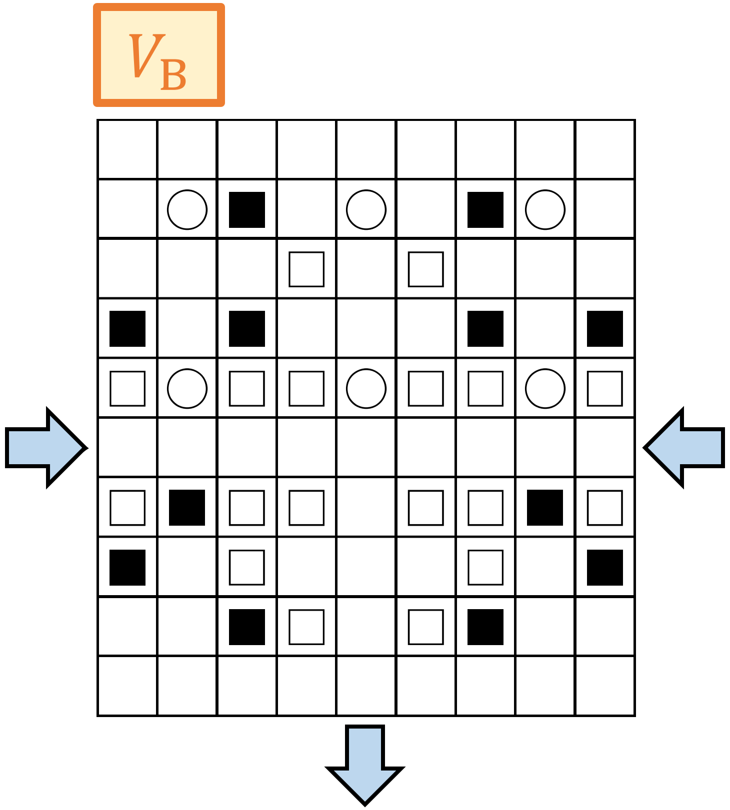


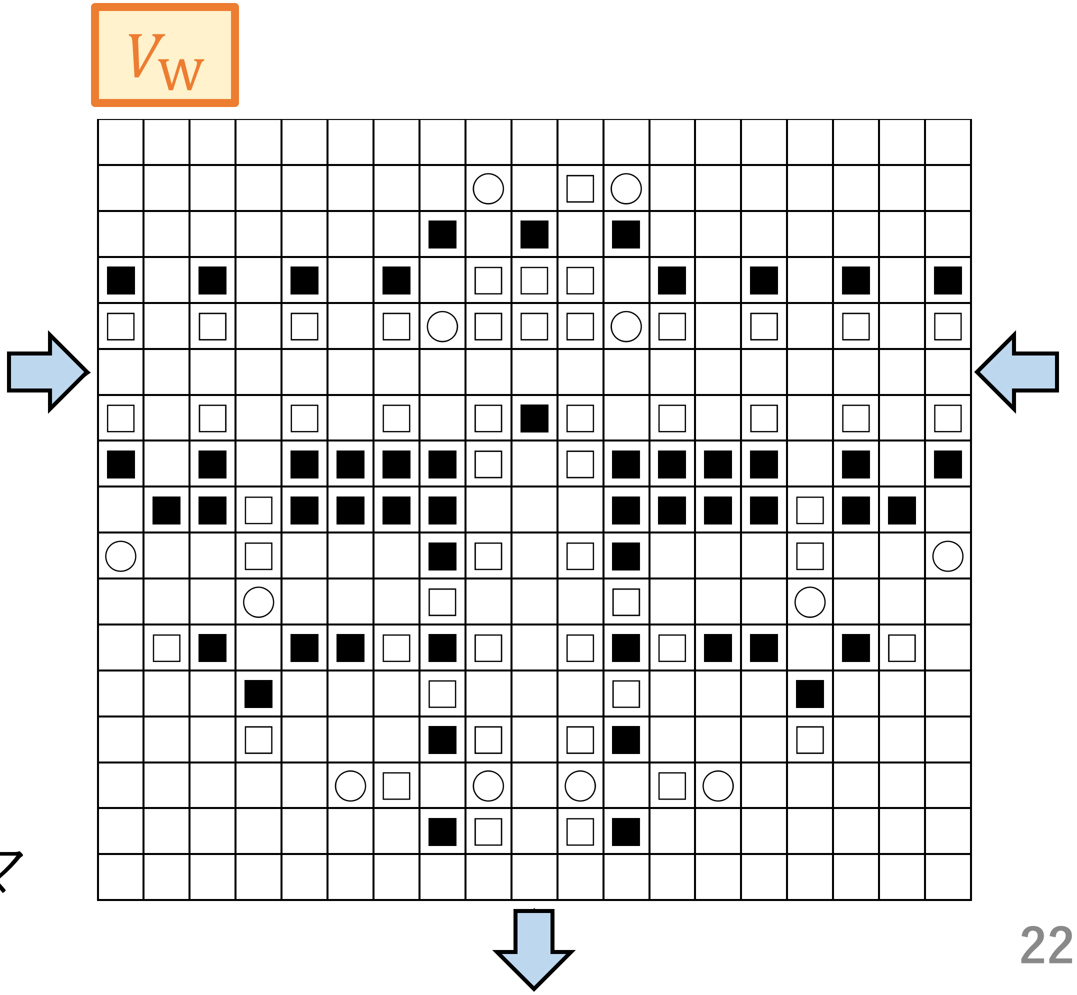


■ 黒コマ　□ 白コマ　○ 穴コマ

その他の頂点ガジェット紹介

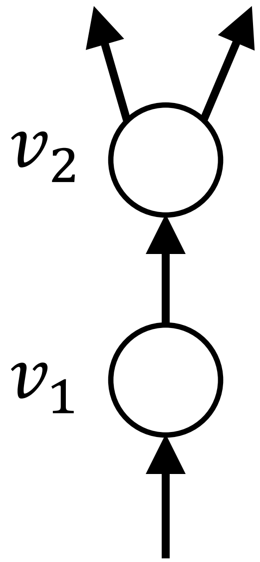
入次数２，出次数１の頂点



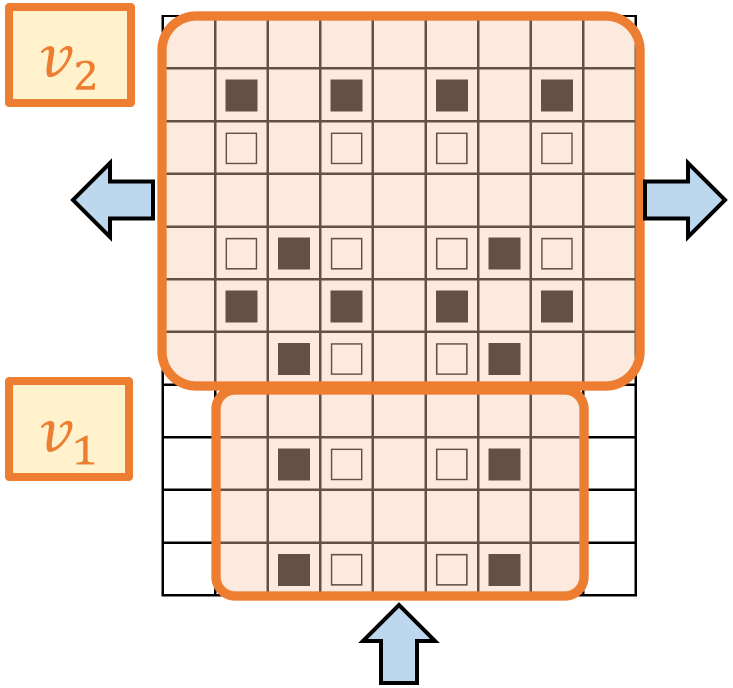


■ 黒コマ　□ 白コマ　○ 穴コマ

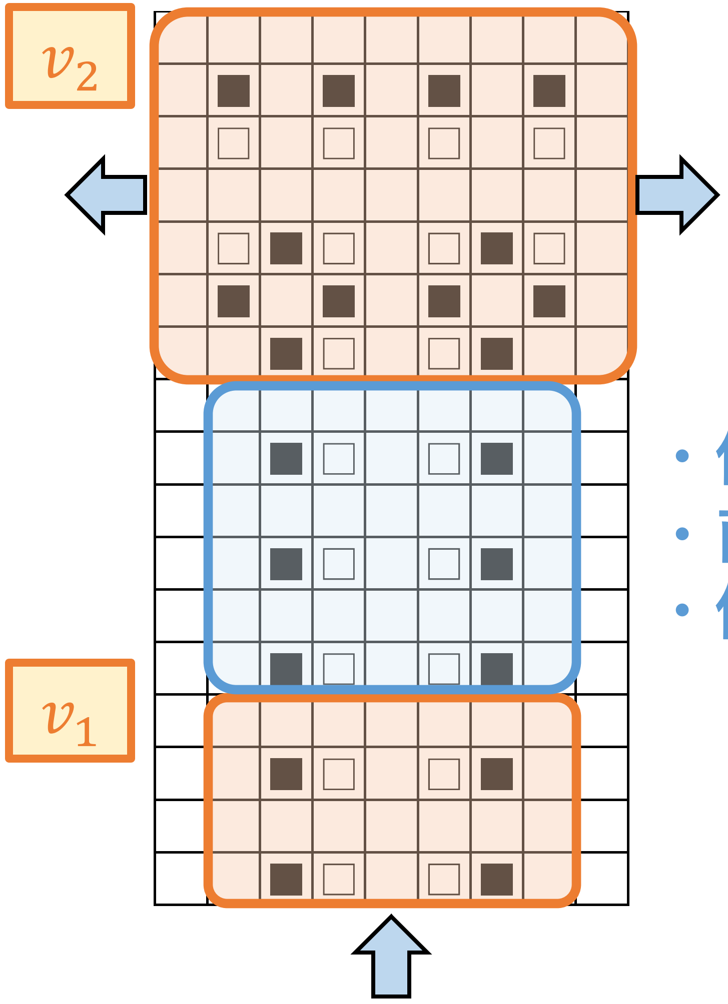
ガジェットの接続



そのまま隣接させる

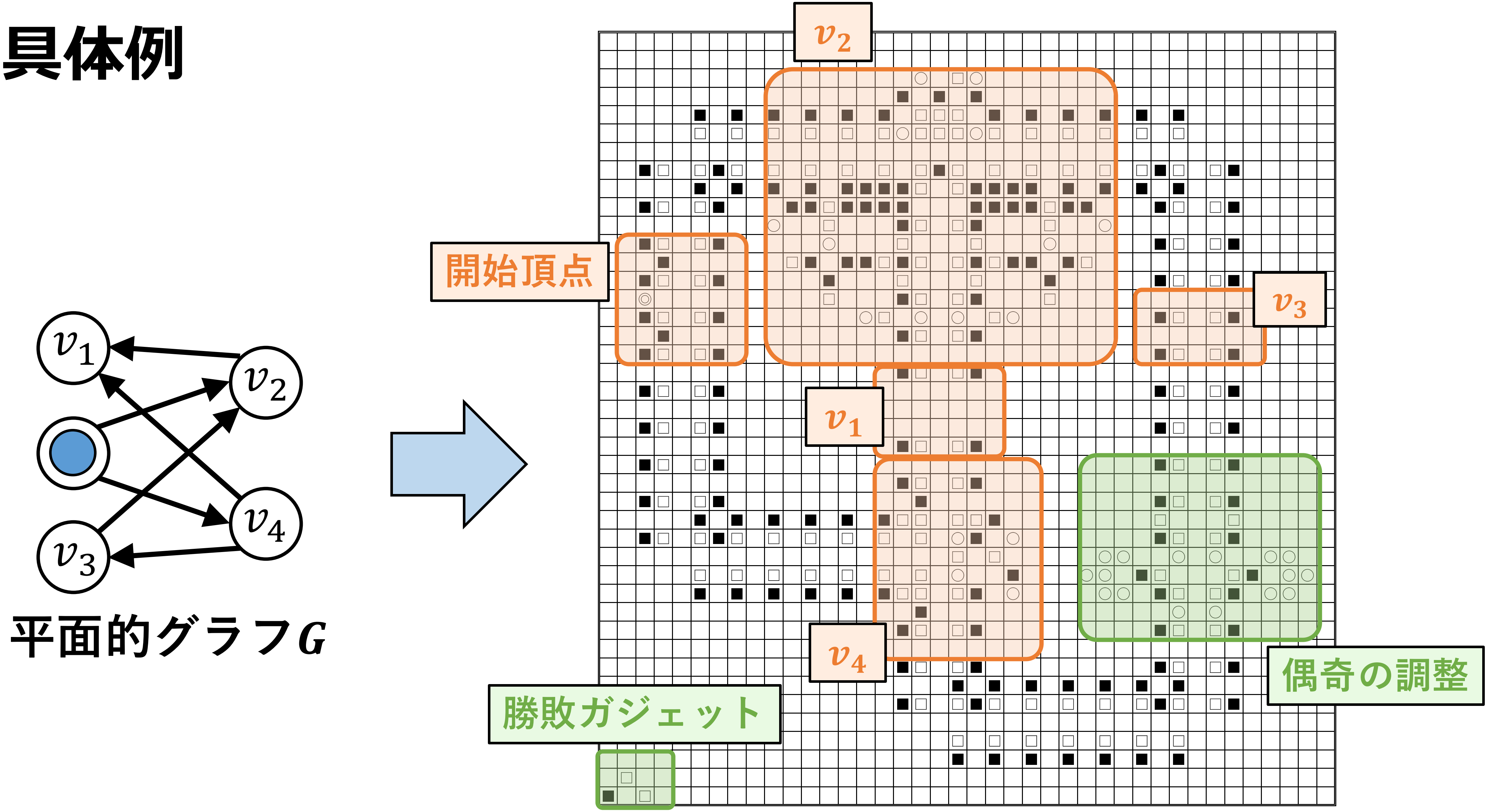


間を埋める



- 伸ばす
- 直角に曲げる
- 偶奇の調整

具体例



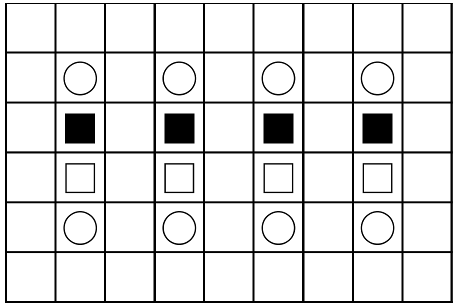
まとめ

結果

ボードサイズが$n \times n$かつ黒コマと白コマがそれぞれn個であっても，任意の正整数kについて，相手のコマを先にk個排除したプレイヤが勝利するオストルの必勝判定問題はPSPACE困難である．

今後の展望

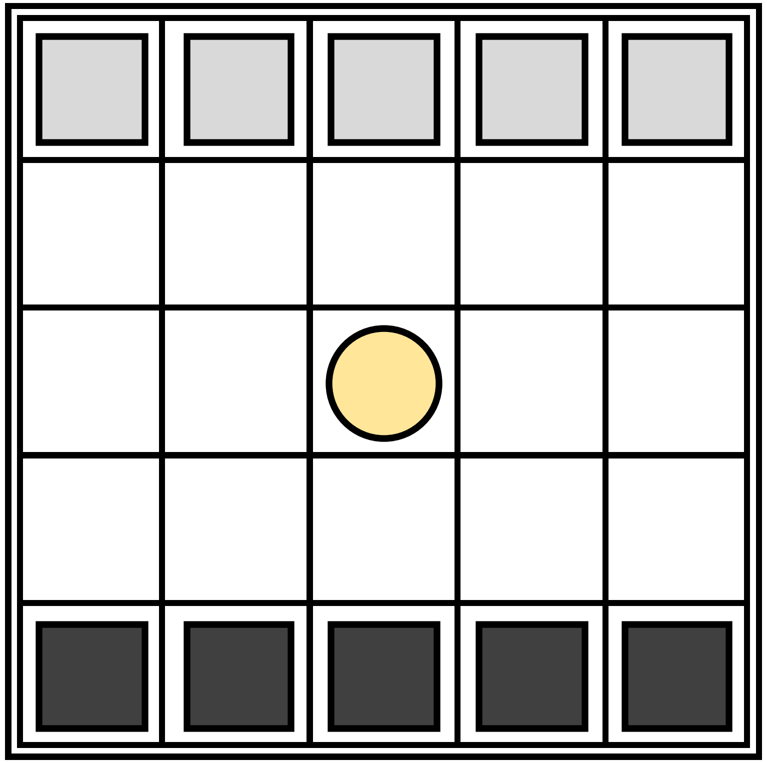
・PSPACE完全性の証明（PSPACEに含まれるかどうか）
・ボードサイズが5×5の一般的な初期局面の解析



オストル

ボードゲーム

2017 年に Masao Fukaseにより考案



PSPACEに入るかどうか

全局面ゲーム木（n*nでnコマずつ）
１手で遷移可能な可能な局面に有向辺をひく

ここで思ってる定理２がおかしい
→定理２は，全てのkについての定理だから

・示した定理が３つ（定理1,2,3），包含関係がわからなくなった

		相手のコマを何個落としたら勝ちか	
		１個	k個
黒コマと白コマの数	n個ずつ	PSPACE困難（定理４と呼ぶことにする）	PSPACE困難（定理３）
	制限なし（何個でも）	PSPACE困難（定理１）	PSPACE困難（定理２）

この時，「定理１が言えたから，自明に定理２も言えますよね」は正しいのか？→正しい
だって任意のk個にk＝１も含まれるから
つまり定理１の方が強いことを言っていて，定理２はいらないのでは？？
→いらないのではなくて，書き方（定理２の定義？）が悪い

・示した定理が３つ（定理1,2,3），包含関係がわからなくなった

		相手のコマを何個落としたら勝ちか	
		１個	k個
黒コマと白コマの数	n個ずつ	PSPACE困難（定理４と呼ぶことにする）	PSPACE困難（定理３）
	制限なし（何個でも）	PSPACE困難（定理１）	PSPACE困難（定理２）

定理２で言いたかったことは，「１個落とすルールはPSPACE完全，２個落とすルールもPSPACE完全，３個落とすルールもPSPACE完全，…」と言うこと

決して「ある１つの正整数についてPSPACE完全が言えました」と言うことではない，全てのと言う意味の主張だった

理解したかも，定理２の方が強い主張をしてる

→じゃあこの意を正確に伝える書き方を考えるべき

・示した定理が３つ（定理1,2,3），包含関係がわからなくなった

		相手のコマを何個落としたら勝ちか	
		１個	**全ての**k個
黒コマと白コマの数	n個ずつ	定理４ （と呼ぶことにする）	定理３
	制限なし （何個でも）	定理１	定理２

定理同士の構造としては,

定理１：土台になっている

定理２：定理１にk拡張ガジェットを追加

定理４：定理１にボードサイズとコマ数の調整を入れたもの

定理３：定理２にボードサイズとコマ数の調整を入れたもの，もしくは定理４にk拡張ガジェットを追加

主結果(一番嬉しい結果)は
定理３

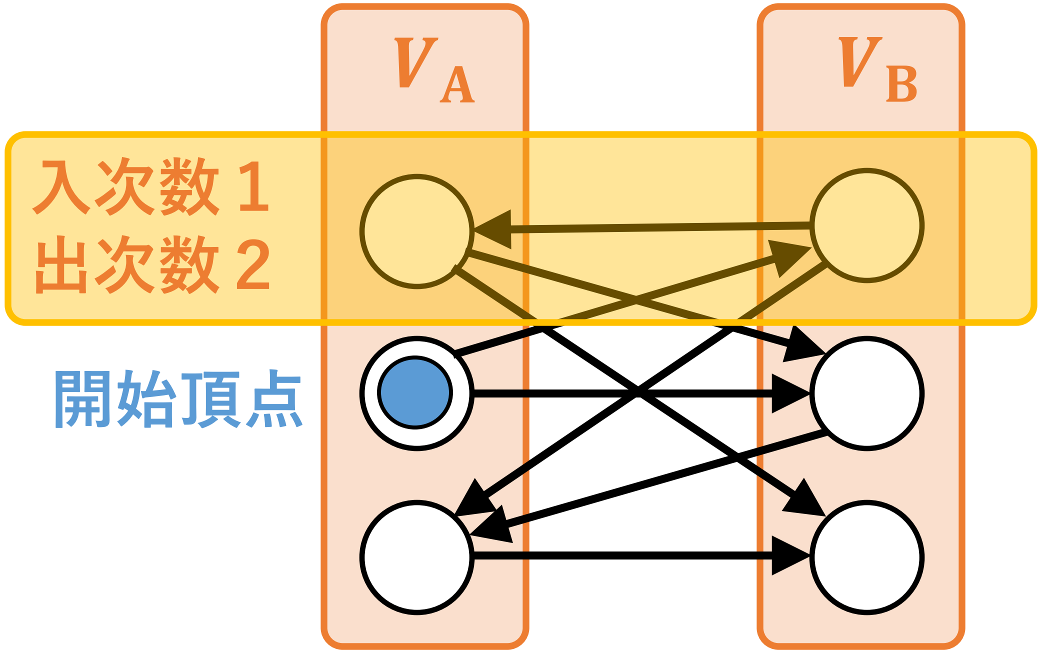
定理３　ボードサイズが$n \times n$かつ黒コマと白コマがそれぞれn個であっても，任意の正整数kについて，相手のコマを先にk個排除したプレイヤが勝利するオストルの必勝判定問題はPSPACE困難である．

今日の証明ではボードサイズ自由，コマ数自由，ｋ＝１の場合について説明します．

定理１

　任意のボードサイズに対し，相手のコマを先に１個排除したプレイヤが勝利するオストルの必勝判定問題はPSPACE困難である．

頂点ガジェット



二部グラフ

トークンの移動

プレイヤA　$V_{\mathrm{A}} \to V_{\mathrm{B}}$

プレイヤB　$V_{\mathrm{B}} \to V_{\mathrm{A}}$

v_i：入次数 1，出次数 2 の頂点

トークンの移動先は

$v_i \in V_{\mathrm{A}}$　ならば，プレイヤA

$v_i \in V_{\mathrm{B}}$　ならば，プレイヤB

が決定する

頂点ガジェット

これより，以下の頂点に対応するガジェットを作成する

現れうる頂点の種類（最大次数３）

- 開始頂点（入次数０，出次数２）
- 入次数１，出次数０
- 入次数２，出次数０
- 入次数３，出次数０
- 入次数１，出次数１
- 入次数２，出次数１
- 入次数１，出次数２

２通りずつ必要（$\boldsymbol{V}_{\mathbf{A}}$，$\boldsymbol{V}_{\mathbf{B}}$）

ガジェット内の行動制限

黒プレイヤが１つの白コマを狙うとき

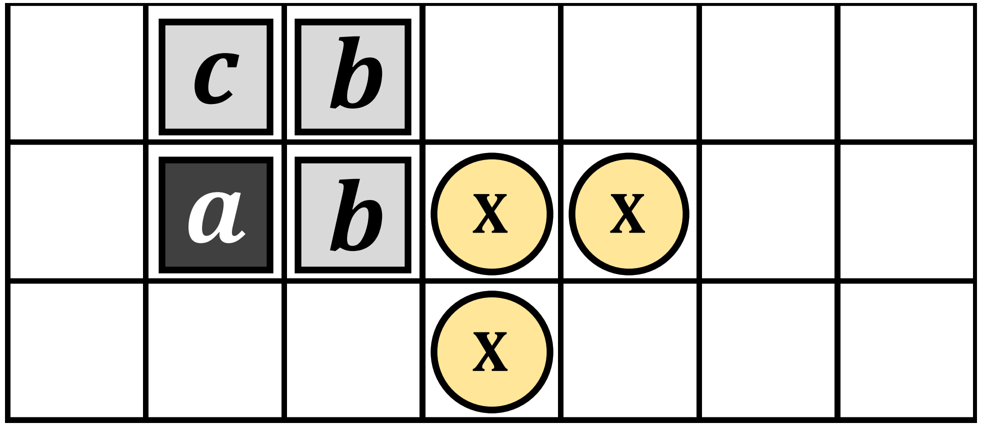
白プレイヤの回避の手

・白コマbを逃す

・黒コマaをどける

・穴コマXを動かす

→複数通りある



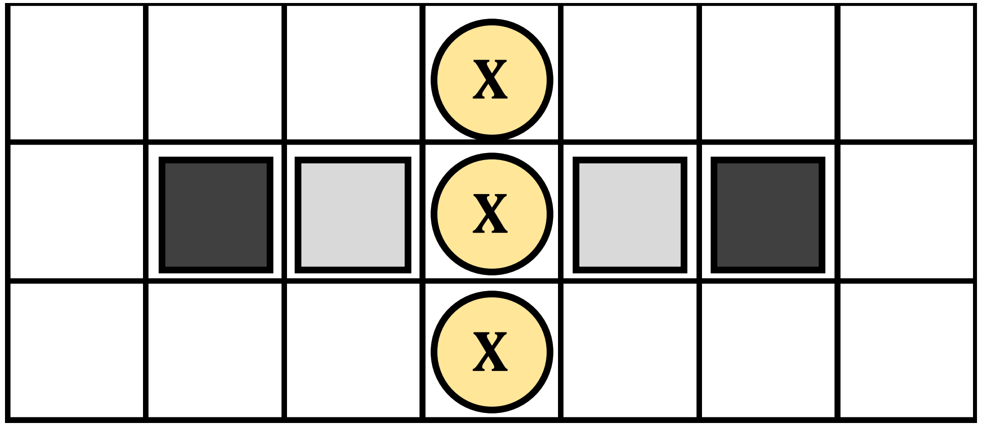
ガジェット内の行動制限

黒プレイヤが２つ以上の白コマを同時に狙うとき

白プレイヤの回避の手

・穴コマを動かす

→**１通り**



プレイヤの選択肢を制限できる

研究理由

2．どちらのプレイヤも着手できる中間のコマ

古典的なゲーム

黒コマ　灰コマ　白コマ

プレイヤのコマと
機能は同じ

オストル

黒コマ　穴コマ　白コマ

プレイヤのコマと
機能が異なる

既存のゲームにはない何か新しい知見を期待する

主結果の導出概要

今回の発表内容

ボードサイズ自由，コマ数自由，$k=1$の場合

互いに相手のコマを$k-1$個場外に出せるガジェットの追加

ボードサイズ自由，コマ数自由，任意の$k \geq 1$の場合

機能しないコマの追加とボードサイズの調整

主結果

ボードサイズ$n \times n$，黒コマ白コマが各n個，任意の$k \geq 1$の場合