整面凸多面体の重なりを持たない辺展開図の列挙

九州地区における若手OR研究交流会 2023

◎ 塩田 拓海（九州工業大学）
榎本 優大（北海道大学）
堀山 貴史（北海道大学）
斎藤 寿樹（九州工業大学）

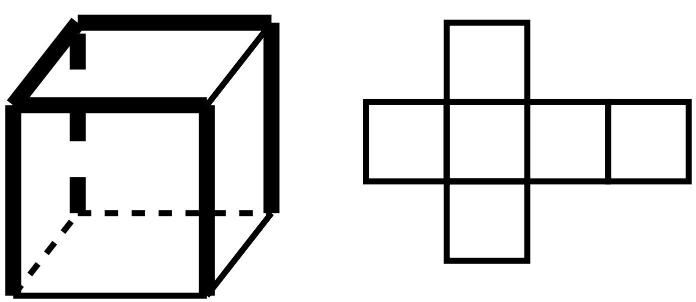
2023年 10月 29日 (日)

辺展開図

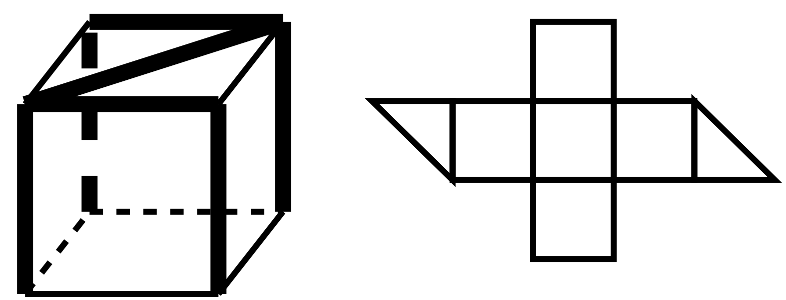
定義 1 [R. Uehara, 2018]

　多面体の辺に切れ込みを入れて，平坦に開いた多角形を，辺展開図という.

それぞれ左側の立方体を太線に沿って切ると…



(a) 辺展開図



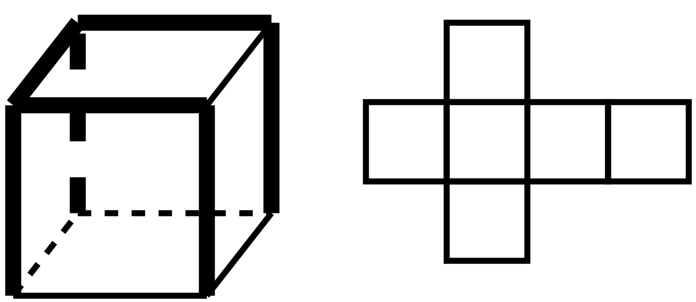
(b) 辺展開図ではない

辺展開図

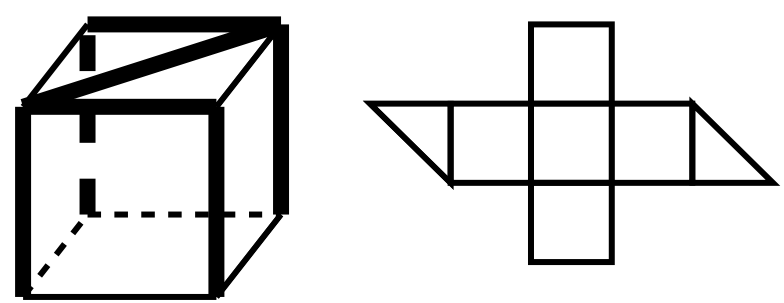
定義 1 [R. Uehara, 2018]

　多面体の辺に切れ込みを入れて，平坦に開いた多角形を，辺展開図という.

それぞれ左側の立方体を太線に沿って切ると…



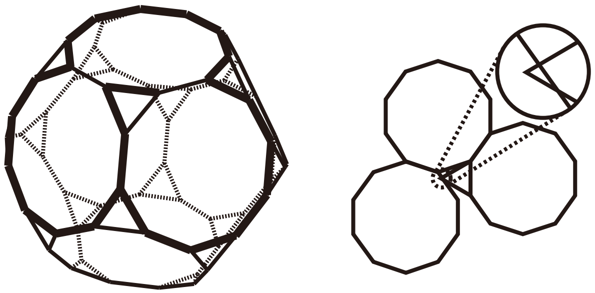
(a) 辺展開図



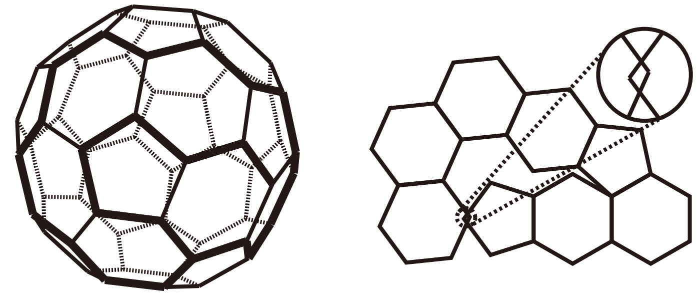
(b) 辺展開図ではない

重なりを持つ辺展開図

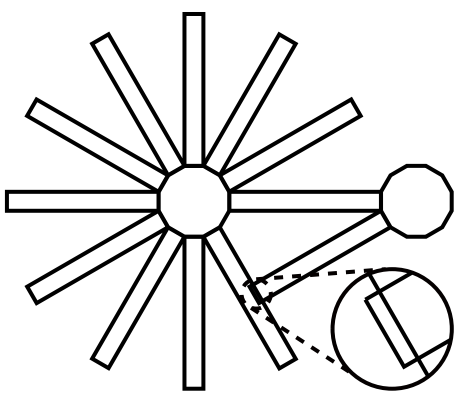
いくつかの凸多面体には，重なりを持つ辺展開図が存在する



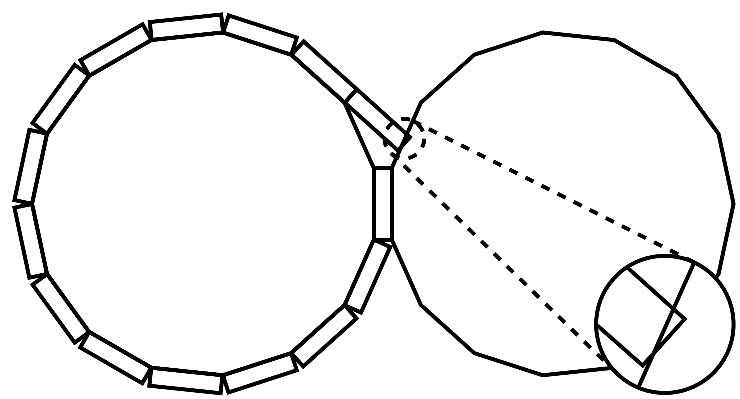
切頂十二面体
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



切頂二十面体
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



正 12 角柱
[Schlickenrieder, 1997]



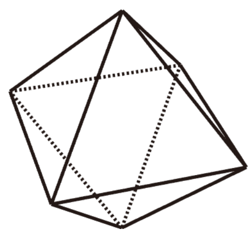
正 15 角柱
[Schlickenrieder, 1997]

整面凸多面体

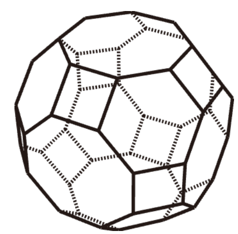
定義 2

全ての面が，正多角形で構成される（辺の長さが等しい）凸多面体を，整面凸多面体という.

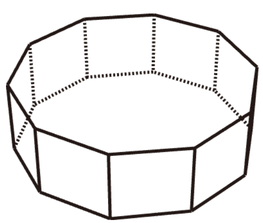
5種類に分類される



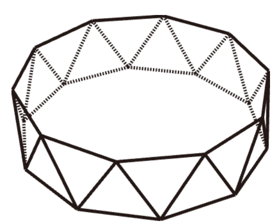
正多面体



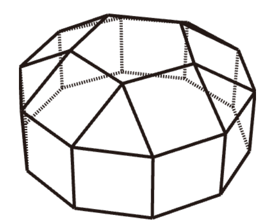
半正多面体



アルキメデスの角柱



アルキメデスの反角柱



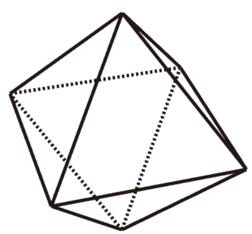
ジョンソンの立体

先行研究および主結果

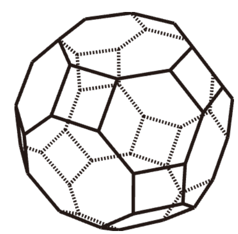
重なりを持つ辺展開図が存在するか？

→ 全ての整面凸多面体について分かっている

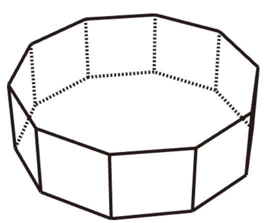
[T. Horiyama et al., 2011] [Hirose, 2015] [T. Shiota et al., 2023]



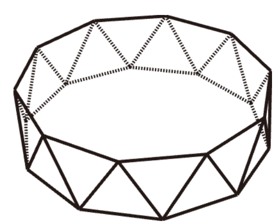
正多面体



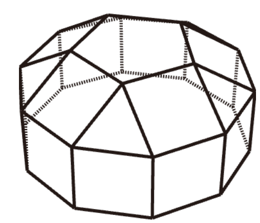
半正多面体



アルキメデスの角柱



アルキメデスの反角柱



ジョンソンの立体

先行研究および主結果

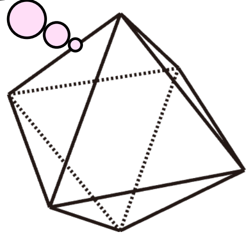
重なりを持つ辺展開図が存在するか？

→ 全ての整面凸多面体について分かっている

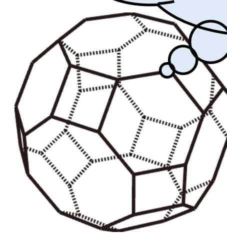
2011] [Hirose, 2015] [T.

5種類全てが
重なりを持たない

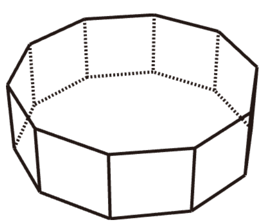
6種類/13種類が
重なりを持つ



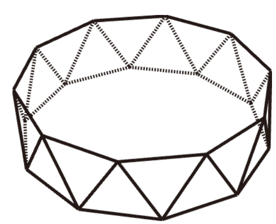
正多面体



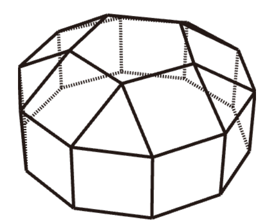
半正多面体



アルキメデスの角柱



アルキメデスの反角柱



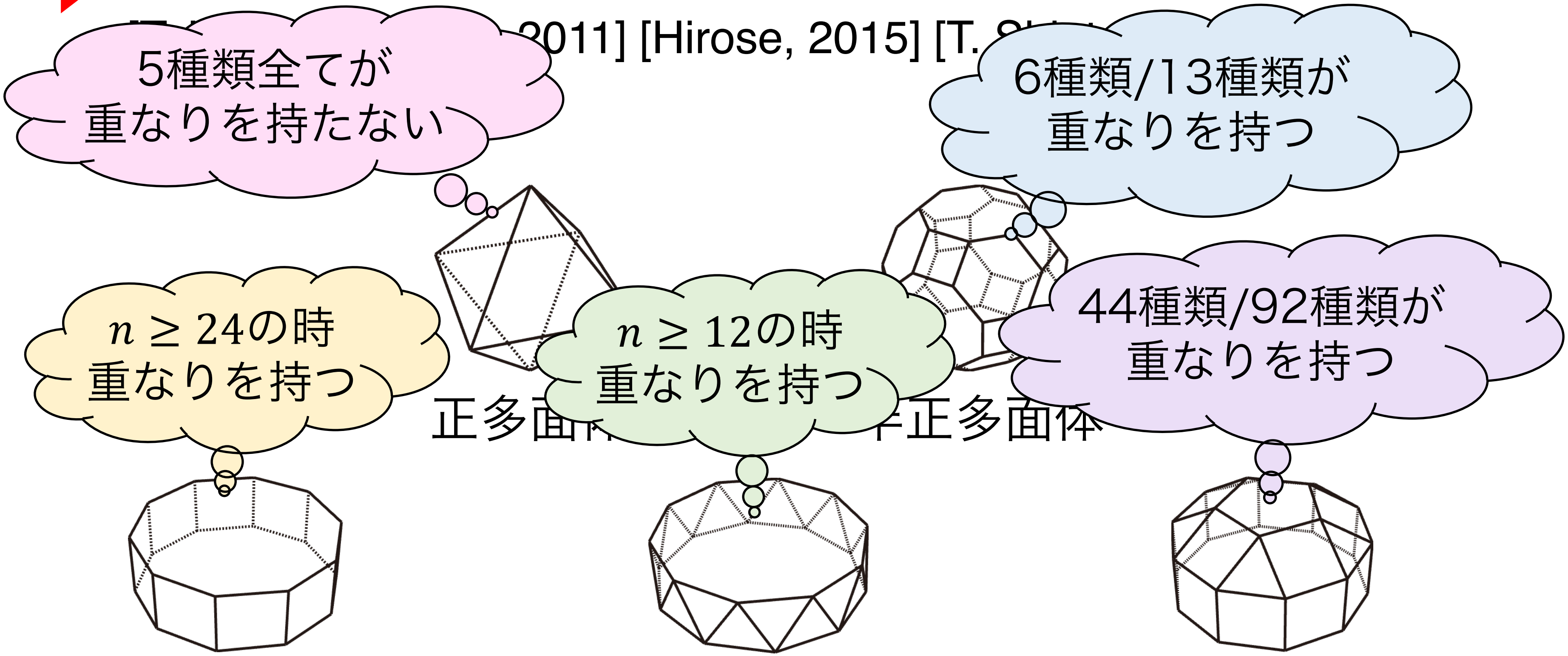
ジョンソンの立体

先行研究および主結果

重なりを持つ辺展開図が存在するか？

→ 全ての整面凸多面体について分かっている

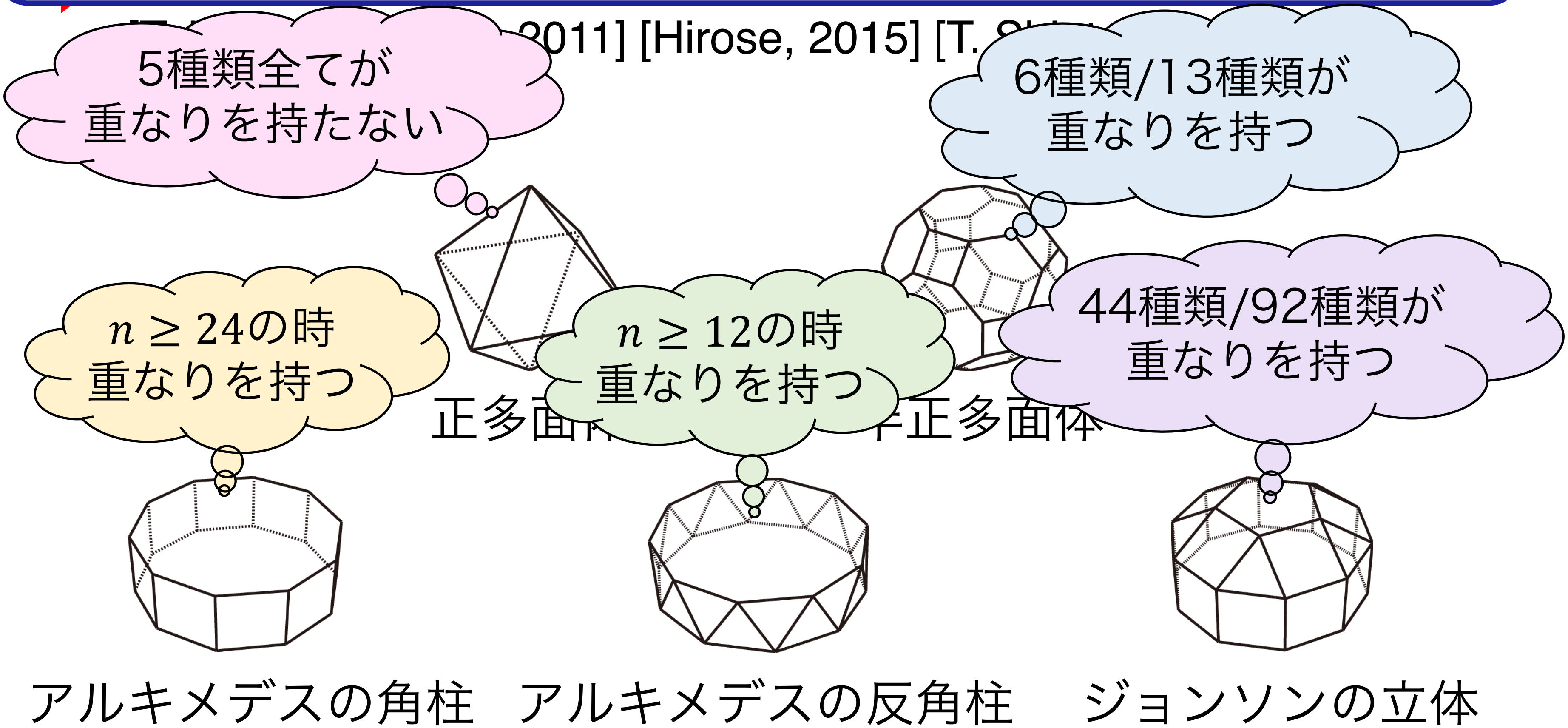
2011] [Hirose, 2015] [T.



アルキメデスの角柱　アルキメデスの反角柱　ジョンソンの立体

先行研究および主結果

【現状】重なりを持つ整面凸多面体のいずれも,
重なりを持たない辺展開図の個数が知られていない.



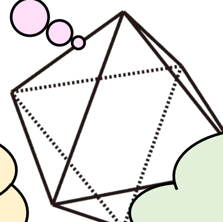
先行研究および主結果

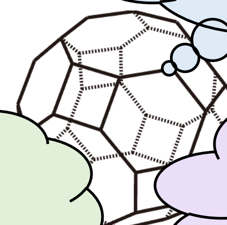
【現状】重なりを持つ整面凸多面体のいずれも,
重なりを持たない辺展開図の個数が知られていない.

2011] [Hirose, 2015] [T.

5種類全てが
重なりを持たない

6種類/13種類が
重なりを持つ





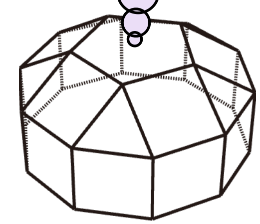
$n \geq 24$の時
重なりを持つ

$n \geq 12$の時
重なりを持つ

44種類/92種類が
重なりを持つ

正多面

正多面体



【本研究の成果】５種類のジョンソンの立体の重なりを持たない辺展開図の個数を求めることができた.

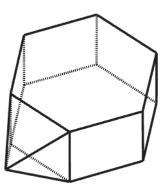
ジョンソンの立体

ジョンソンの立体における主結果

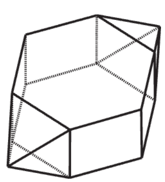
定理 1

ジョンソンの立体 J54〜J58 における重なりを持たない辺展開図の個数は以下の通りである.

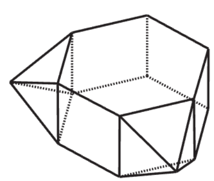
立体番号	#(辺展開図) [HS13]	#(重なりを持たない辺展開図)	割合(%)
J54	75,973	75,749	99.7
J55	709,632	705,144	99.4
J56	707,232	702,520	99.3
J57	6,531,840	6,457,860	98.9
J58	92,724,962	92,219,782	99.4



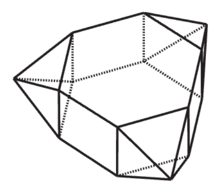
J54
側錐六角柱



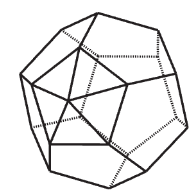
J55
双側錐六角柱



J56
二側錐六角柱



J57
三側錐六角柱

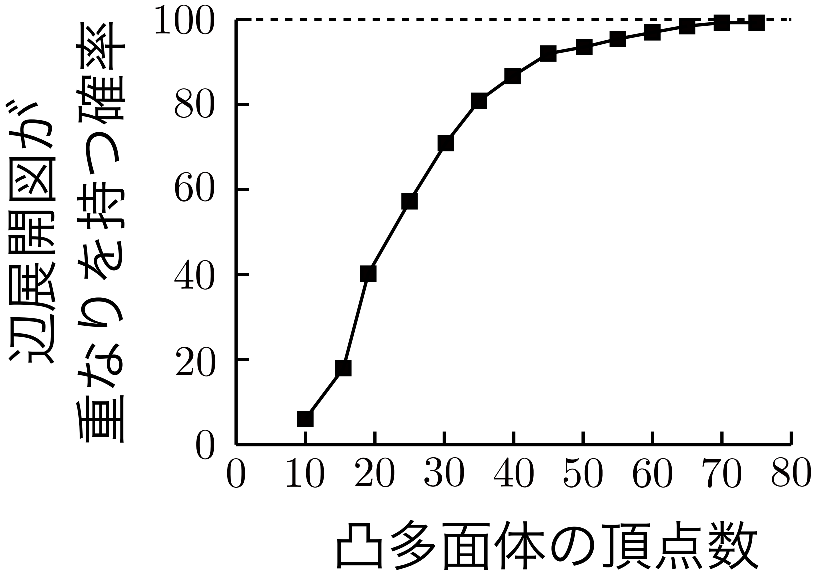


J58
側錐十二面体

本研究の背景

[C. A. Schevon, 1989]

凸多面体の頂点数のが多くなると，重なりを持つ辺展開図の割合は大きくなる．

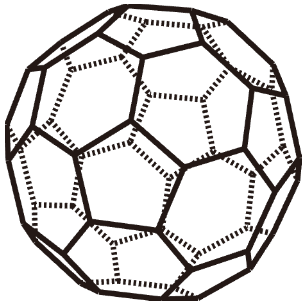


ランダムに選んだ1000個の辺展開図中の重なりを持つ割合

本研究の背景

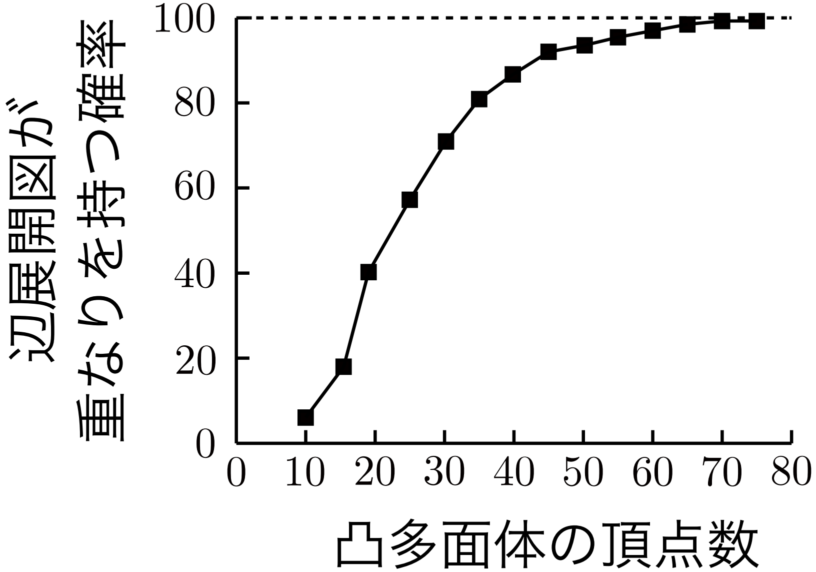
[C. A. Schevon, 1989]

凸多面体の頂点数のが多くなると，重なりを持つ辺展開図の割合は大きくなる．



切頂二十面体

#(辺展開図)
≈ 3抜個



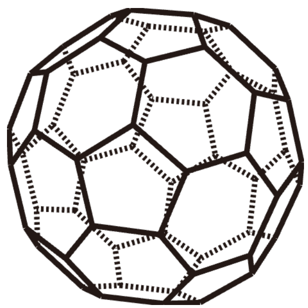
多面体のサイズが
大きくなる
⇓
辺展開図の個数が
爆発的に増加する

ランダムに選んだ1000個の辺展開図中の重なりを持つ割合

本研究の背景

[C. A. Schevon, 1989]

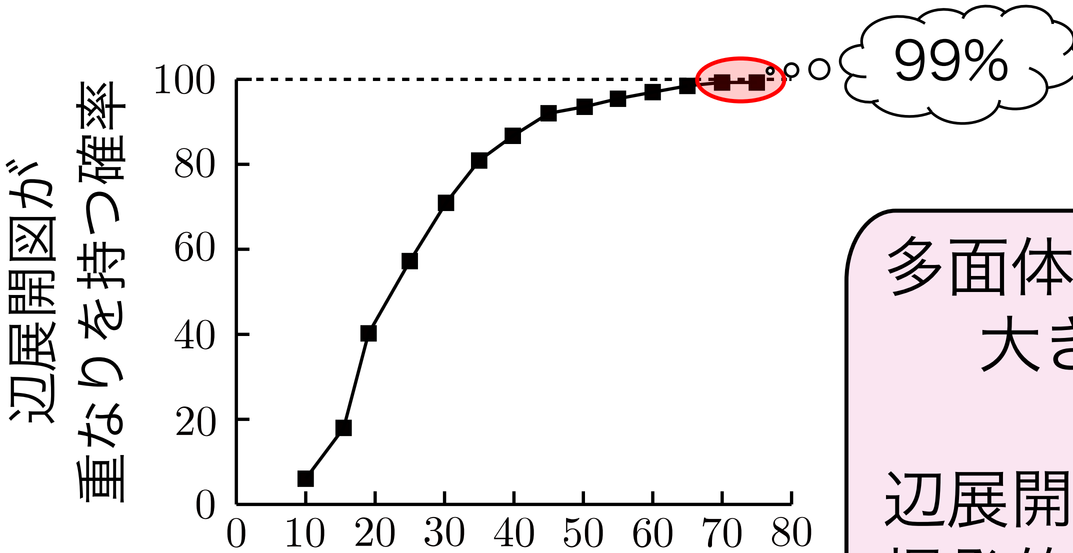
凸多面体の頂点数のが多くなると，重なりを持つ辺展開図の割合は大きくなる.



切頂二十面体

#(辺展開図)

≈ 3垓個



多面体のサイズが大きくなる

⇓

辺展開図の個数が爆発的に増加する

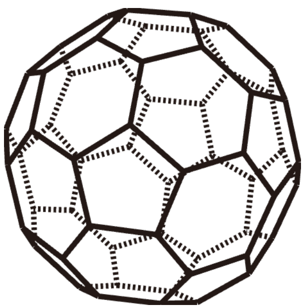
ランダムに選んだ1000個の辺展開図中の重なりを持つ割合

本研究の背景

[C. A. Schevon, 1989]

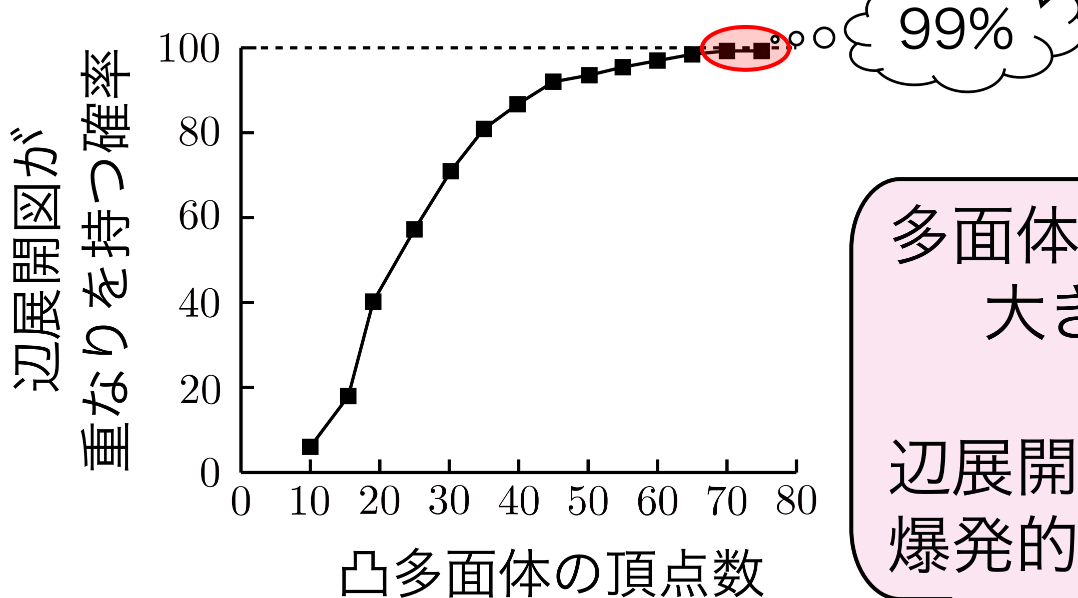
凸多面体の頂点数のが多くなるほど重なりを持つ辺展開図の割合は大きくなる.

重ならないものの解のサイズは小さくなるのではないか？



切頂二十面体

#(辺展開図)
≈ 3垓個



多面体のサイズが大きくなる
⇓
辺展開図の個数が爆発的に増加する

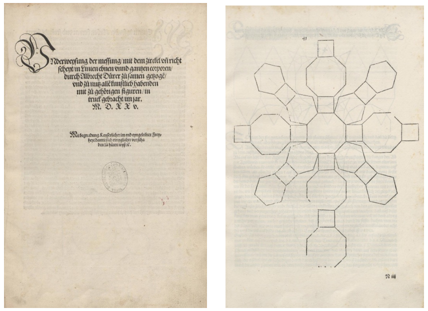
ランダムに選んだ1000個の辺展開図中の重なりを持つ割合

本研究の背景

Dürerの問題 [E. D. Demaine and J. O’Rourke, 2007]

全ての凸多面体は，重ならない多角形に辺展開できるか？

- ✓計算幾何学における重要な未解決問題
- ✓ 起源は約500年前まで遡る



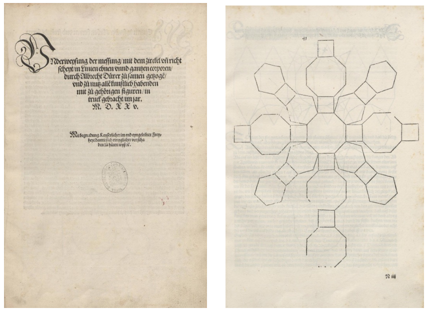
計測法教本

本研究の背景

Dürerの問題 [E. D. Demaine and J. O'Rourke, 2007]

全ての凸多面体は，重ならない多角形に辺展開できるか？

- ✓計算幾何学における重要な未解決問題
- ✓ 起源は約500年前まで遡る



計測法教本

この問題の解決には…

- ➢ 重なりを持たない辺展開図が存在しない凸多面体を示す
- ➢ どのような凸多面体に対しても重なりを持たないように辺展開できるアルゴリズムを示す

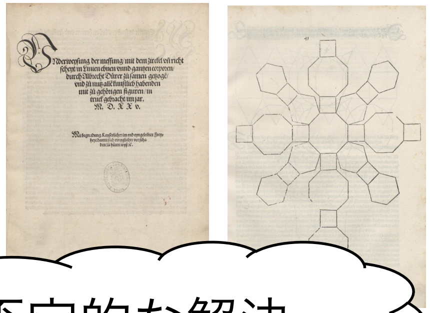
本研究の背景

Dürerの問題 [E. D. Demaine and J. O'Rourke, 2007]

全ての凸多面体は，重ならない多角形に辺展開できるか？

✓計算幾何学における重要な未解決問題

✓ 起源は約500年前まで遡る



否定的な解決

この問題の解決には…

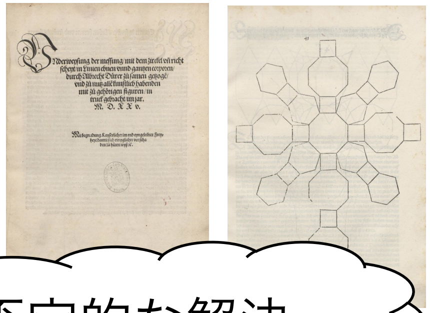
➢ 重なりを持たない辺展開図が存在しない凸多面体を示す

➢ どのような凸多面体に対しても重なりを持たないように辺展開できるアルゴリズムを示す

本研究の背景

Dürerの問題 [E. D. Demaine and J. O'Rourke, 2007]

全ての凸多面体は，重ならない多角形に辺展開できるか？



- ✓計算幾何学における重要な未解決問題
- ✓ 起源は約500年前まで遡る

重ならないよう辺展開できる確率が低い

否定的な解決

この

- ➢ 重な 展開図が存在しない凸多面体を示す
- ➢ どのような凸多面体に対しても重なりを持たないように辺展開できるアルゴリズムを示す

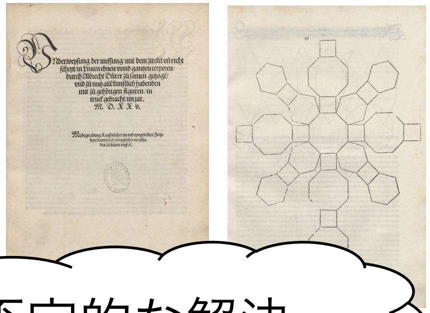
本研究の背景

Dürerの問題 [E. D. Demaine and J. O'Rourke, 2007]

全ての凸多面体は，重ならない多角形に辺展開できるか？

✓計算幾何学における重要な未解決問題

✓ 起源は約500年前まで遡る



重ならないよう辺展開
できる確率が低い

否定的な解決

こ

➤ 重 展開図が存在しない凸多面体を示す

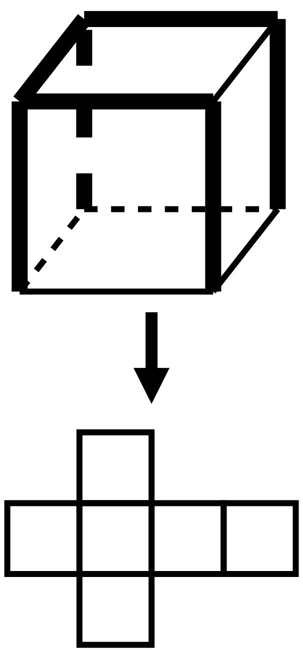
➤ どのような凸多面体に対しても重なりを持たないように
辺展開できるアルゴリズムを示す

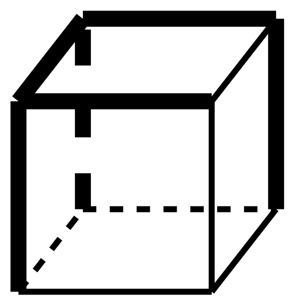
重ならない辺展開図のみを取り出すことが解決の糸口に！

辺展開図の列挙（重なり有りも含む）

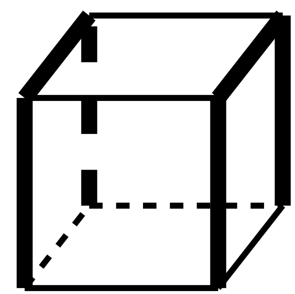
定理 2 [R. Uehara, 2018]

凸多面体 Q を切り開くときの線をカット線と呼び，これを集合 C とする．カット線の集合 C は，Q 上のすべての頂点をつなぐ全域木である．（辺の本数 = 頂点の個数 − 1）

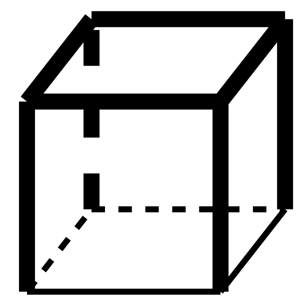




次数 0 の
頂点がある



連結グラフ
ではない



閉路が
存在する

切り開くことができない！

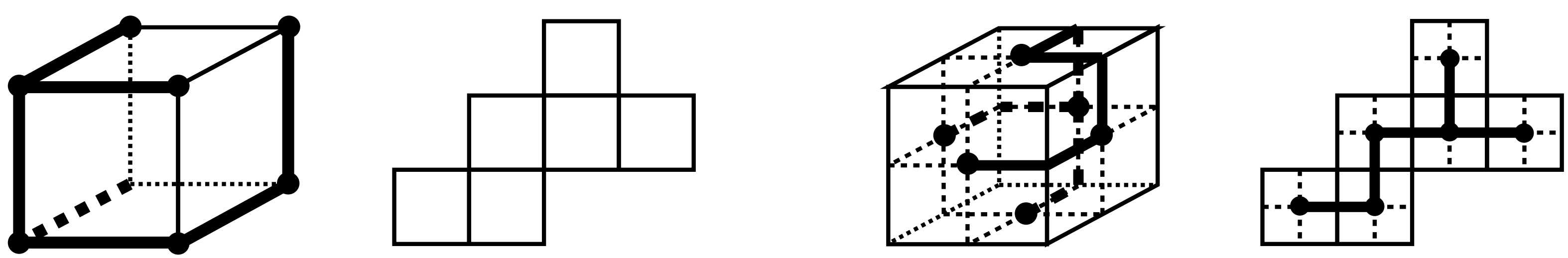
辺展開図の列挙（重なり有りも含む）

定義 3 [R. Uehara, 2018]

　多面体 Q の，それぞれの面の中心を新たな頂点とみなし，辺で接する面の中心同士を辺で結ぶことでできるグラフを，双対グラフという．

定理 3 [R. Uehara, 2018]

　多面体 Q の頂点と辺で導出されるグラフと，双対グラフの全域木の個数は一致する．（辺展開図の個数も一致する）



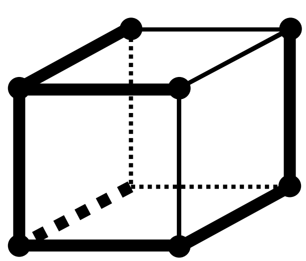
辺展開図の列挙（重なり有りも含む）

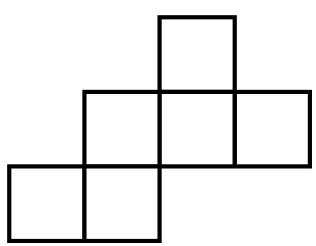
定義 3 [R. Uehara, 2018]

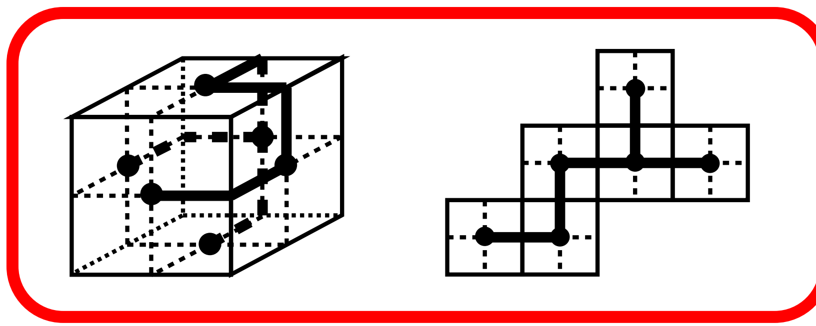
多面体 Q の，それぞれの面の中心を新たな頂点とみなし，辺で接する面の中心同士を辺で結ぶことでできるグラフを，双対グラフという．

定理 3 [R. Uehara, 2018]

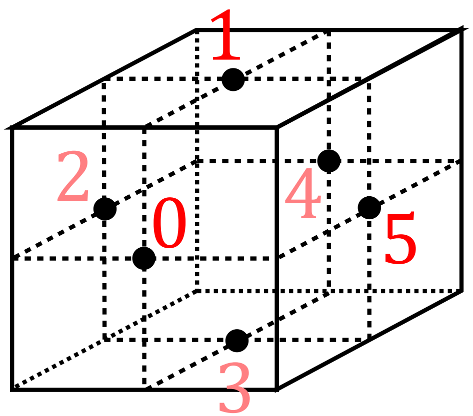
多面体 Q の頂点と辺で導出されるグラフと，双対グラフの全域木の個数は一致する．（辺展開図の個数も一致する）







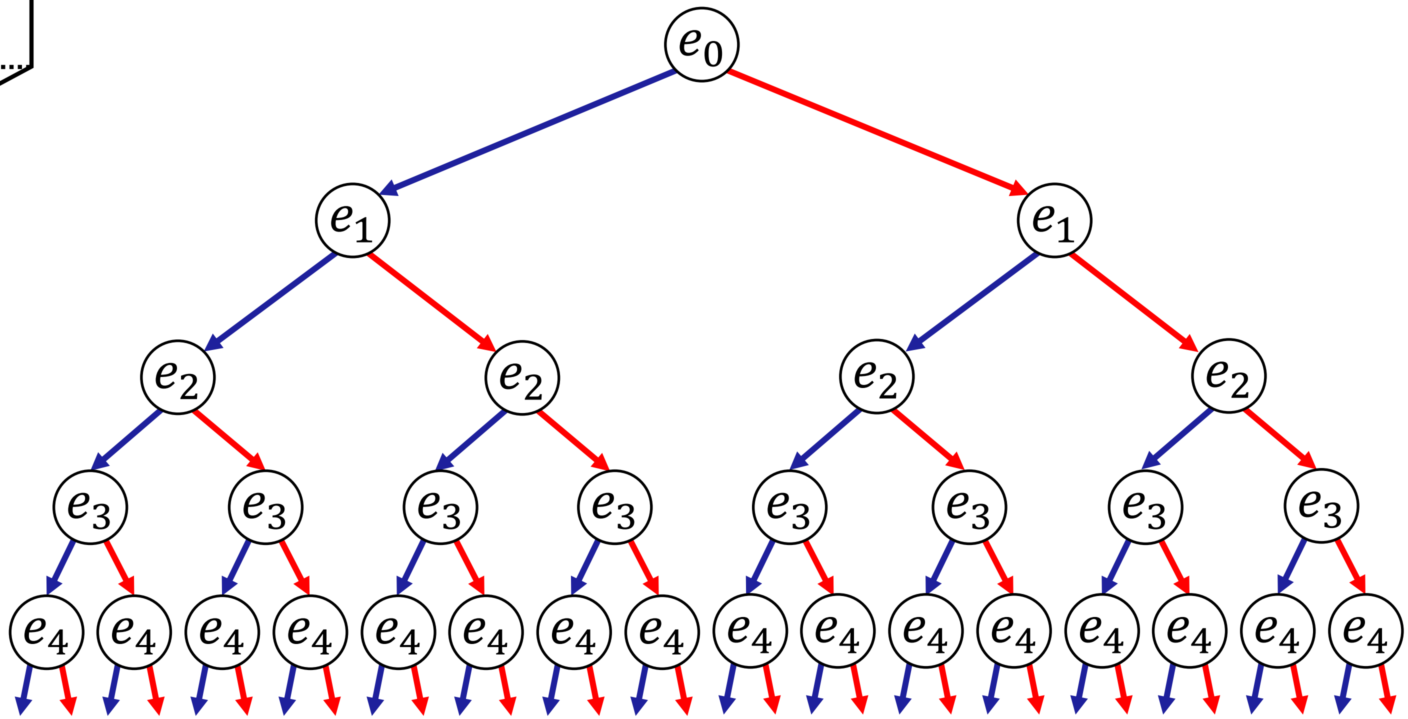
辺展開図の列挙（重なり有りも含む）



0 2 // 辺 e_0
0 1 // 辺 e_1
0 3 // 辺 e_2
0 5 // 辺 e_3
1 2 // 辺 e_4
1 5 // 辺 e_5
⋮

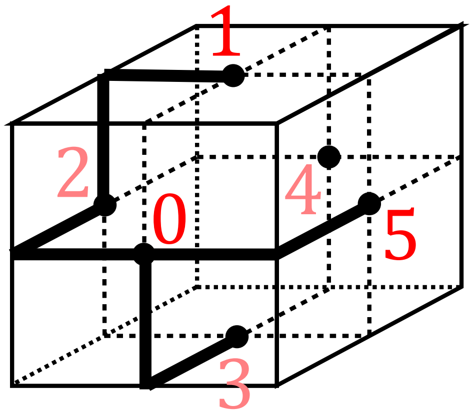
cube.dat

→：1 枝 (辺 e_i を採用する)
→：0 枝 (辺 e_i を採用しない)



場合分け二分木

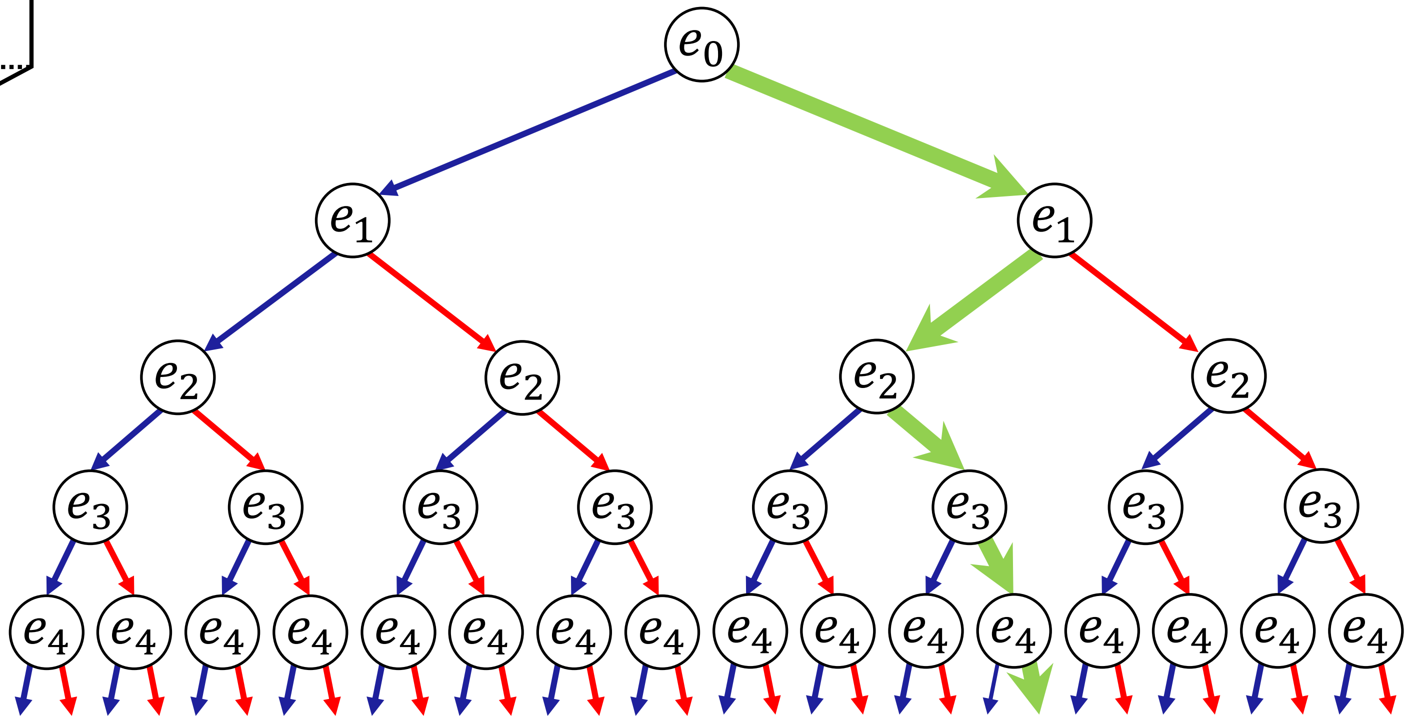
辺展開図の列挙（重なり有りも含む）



0 2 // 辺 e_0
0 1 // 辺 e_1
0 3 // 辺 e_2
0 5 // 辺 e_3
1 2 // 辺 e_4
1 5 // 辺 e_5
⋮

cube.dat

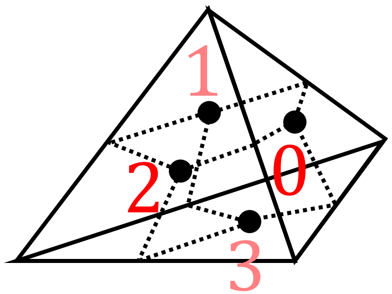
→ : 1 枝 (辺 e_i を採用する)
→ : 0 枝 (辺 e_i を採用しない)

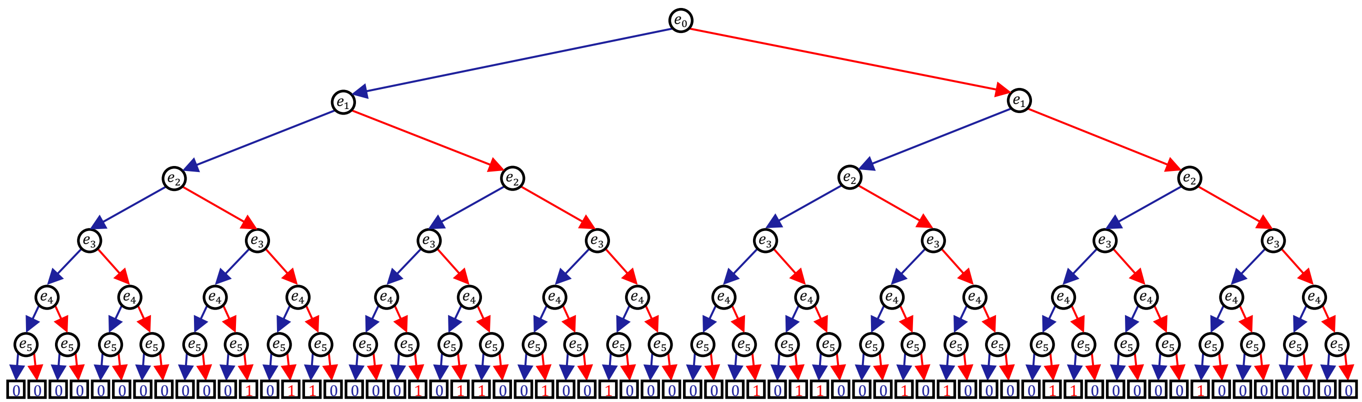


場合分け二分木

辺展開図の列挙（重なり有りも含む）

場合分け二分木は，ZDDを用いて圧縮して表現できる



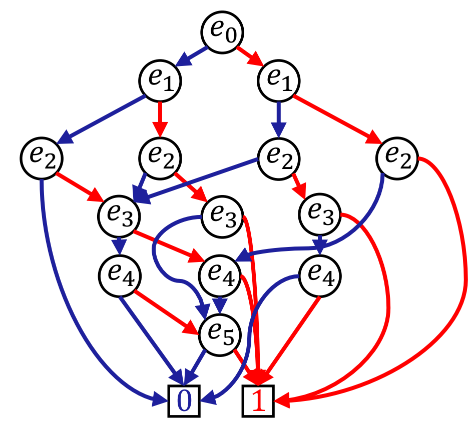


場合分け二分木

```
0 2 // 辺 e0
0 1 // 辺 e1
0 3 // 辺 e2
1 2 // 辺 e3
1 3 // 辺 e4
2 3 // 辺 e5
```

tetrahedron.dat

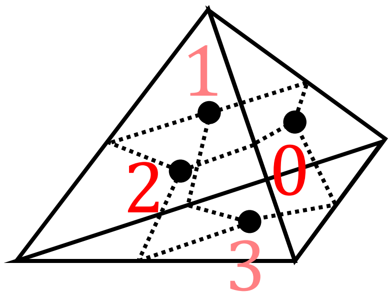
✓ 冗長節点の削除
✓ 等価節点の共有

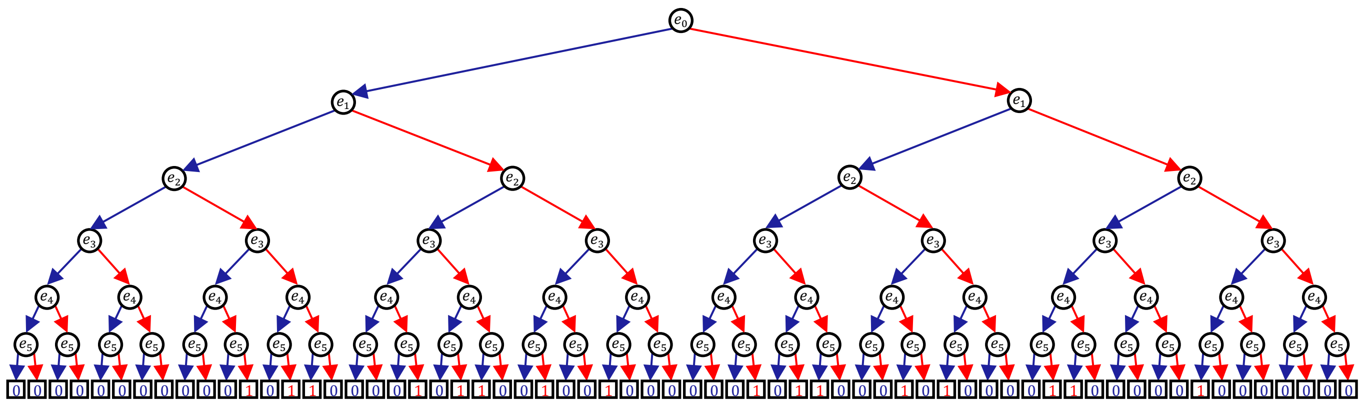


ZDD

辺展開図の列挙（重なり有りも含む）

場合分け二分木は，ZDDを用いて圧縮して表現できる





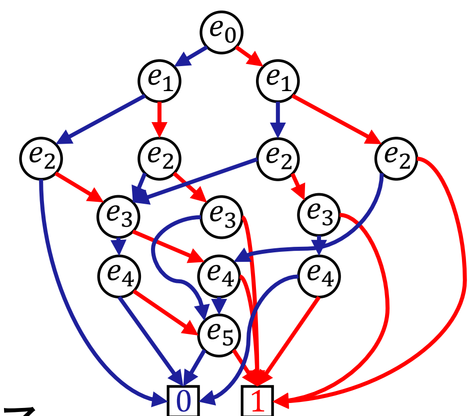
場合分け二分木

0 2 // 辺 e_0
0 1 // 辺 e_1
0 3 // 辺 e_2
1 2 // 辺 e_3
1 3 // 辺 e_4
2 3 // 辺 e_5

tetrahedron.dat

✓冗長節点の削除
✓等価節点の共有

➢ ZDDを構築していくことで
重なりを含む場合は列挙できる

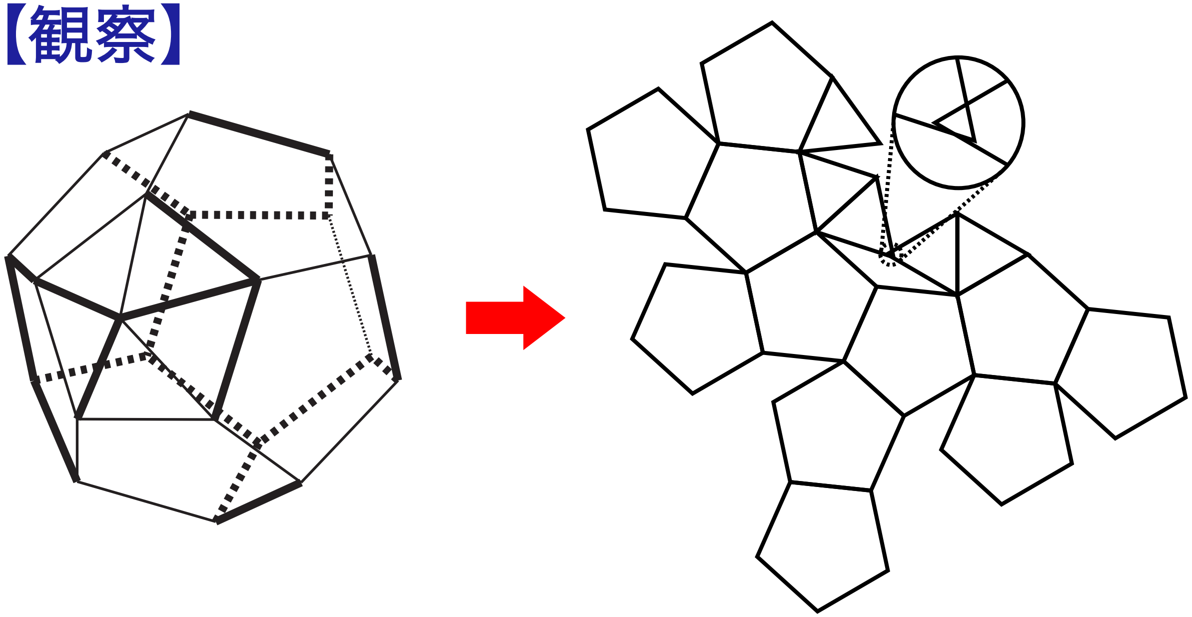


ZDD

重なりを持たない辺展開図の列挙

重なりを含めない場合は...？

【観察】



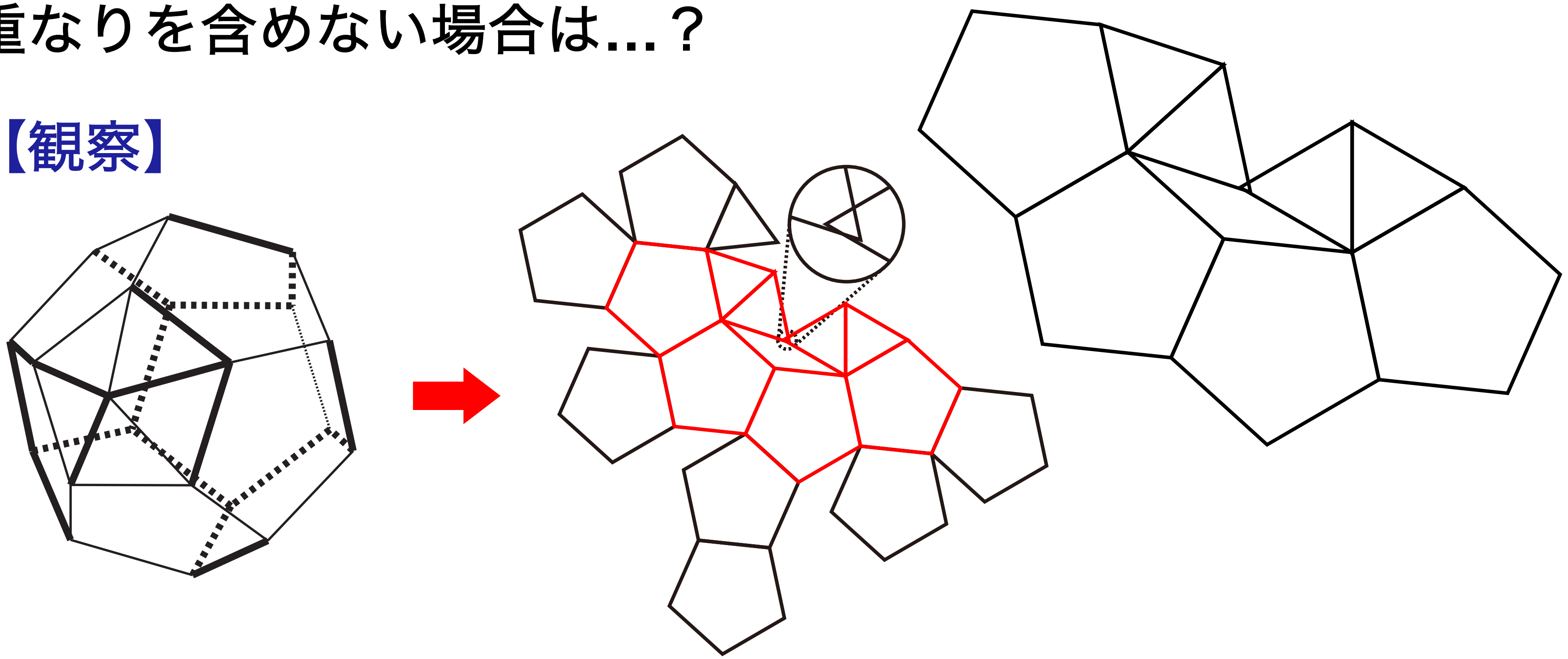
全域木で選ばれる辺の集合：

$$\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, \cdots, e_9, \cdots, e_{23}, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, \cdots\}$$

重なりを持たない辺展開図の列挙

重なりを含めない場合は…？

【観察】



全域木で選ばれる辺の集合：

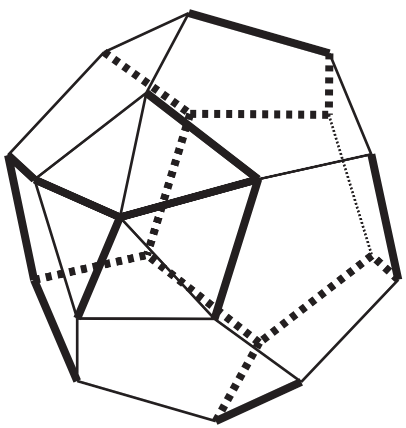
$$\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, \cdots, e_9, \cdots, e_{23}, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, \cdots\}$$

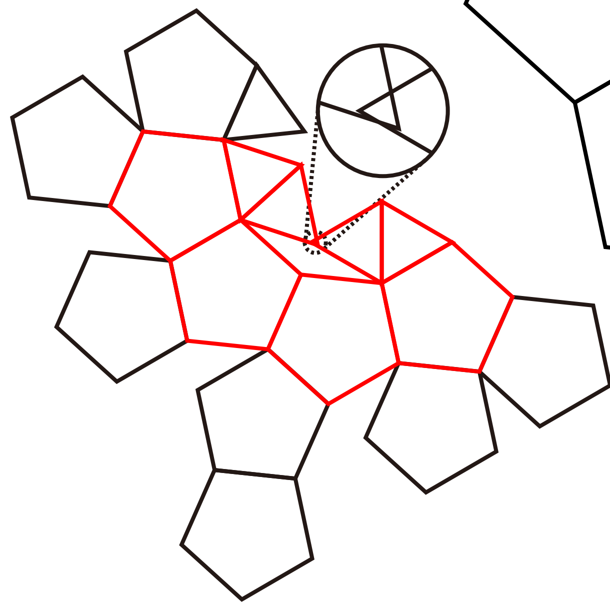
重なりを持たない辺

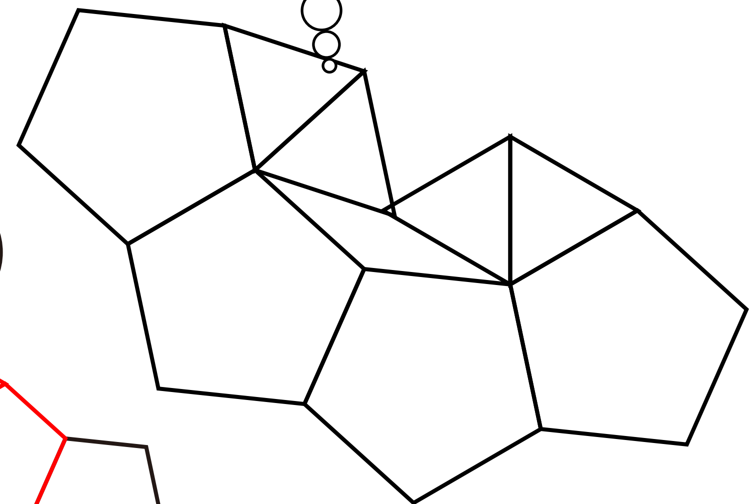
パス状の部分辺展開図

重なりを含めない場合は...？

【観察】







全域木で選ばれる辺の集合：

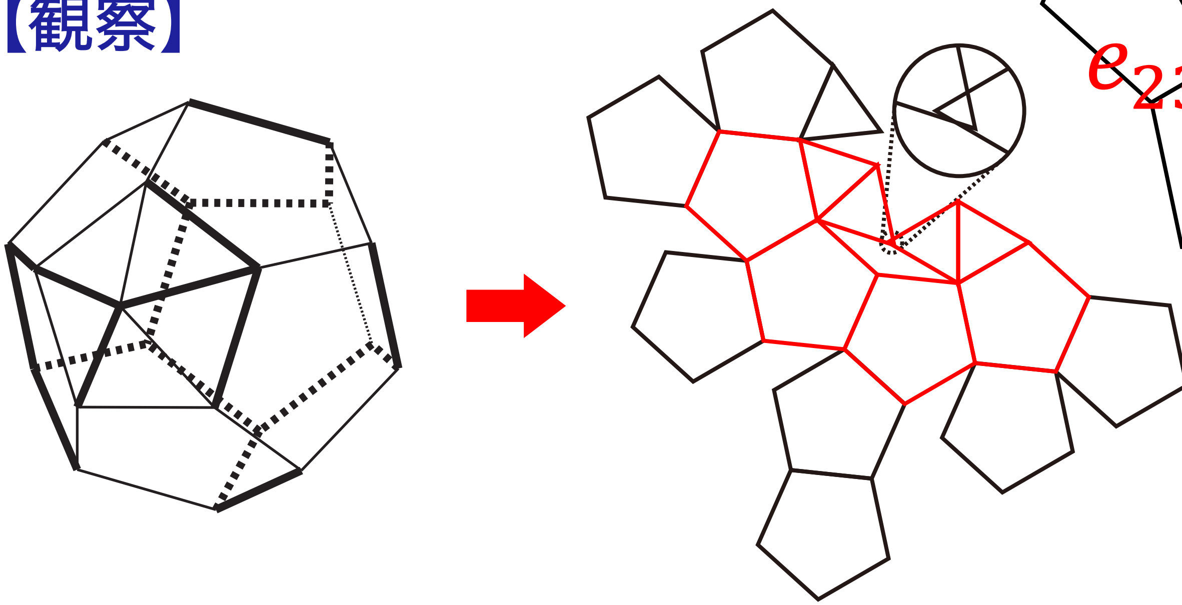
$$\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, \cdots, e_9, \cdots, e_{23}, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, \cdots\}$$

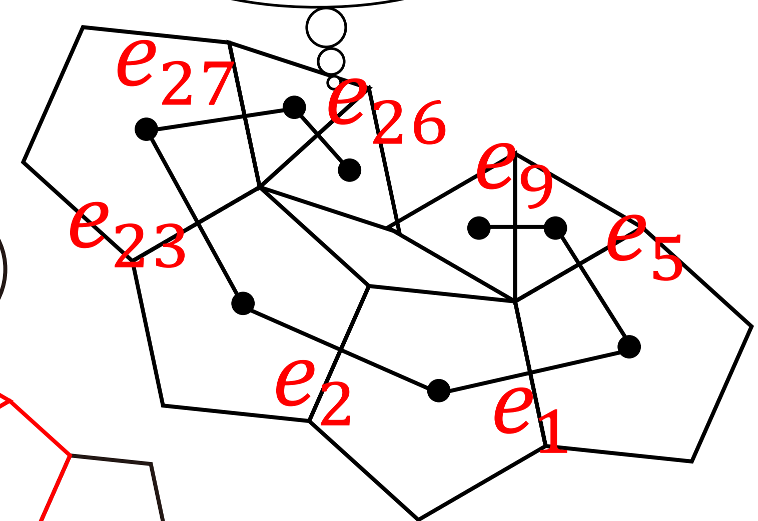
重なりを持たない辺

パス状の部分辺展開図

重なりを含めない場合は…？

【観察】





全域木で選ばれる辺の集合：

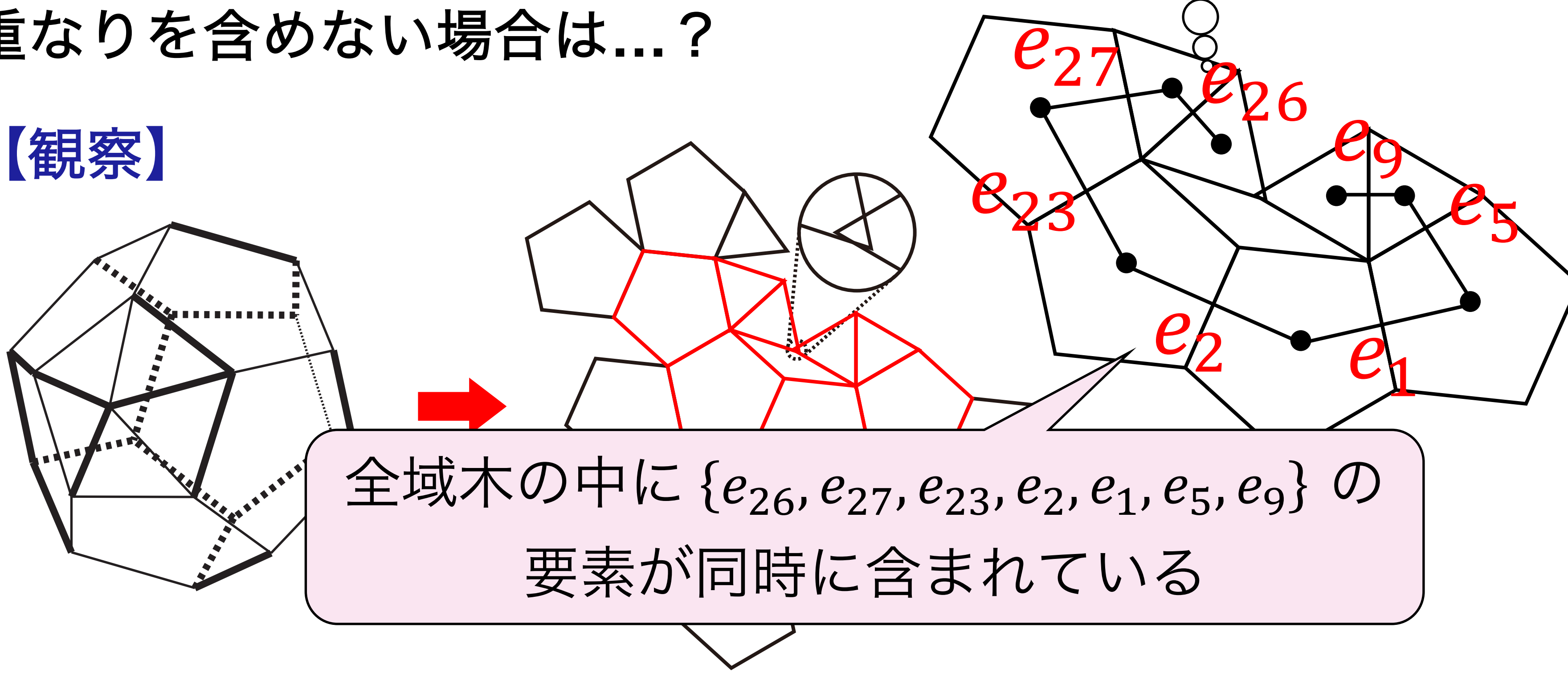
$$\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, \cdots, e_9, \cdots, e_{23}, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, \cdots\}$$

重なりを持たない辺

パス状の部分辺展開図

重なりを含めない場合は...？

【観察】



全域木の中に $\{e_{26}, e_{27}, e_{23}, e_2, e_1, e_5, e_9\}$ の要素が同時に含まれている

全域木で選ばれる辺の集合：

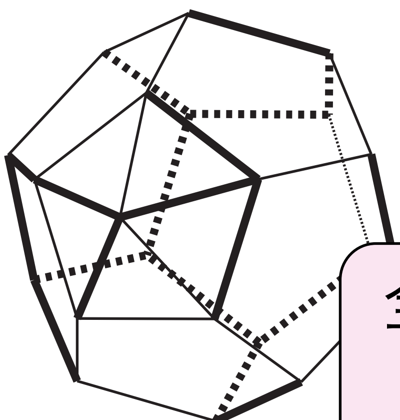
$$\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, \cdots, e_9, \cdots, e_{23}, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, \cdots\}$$

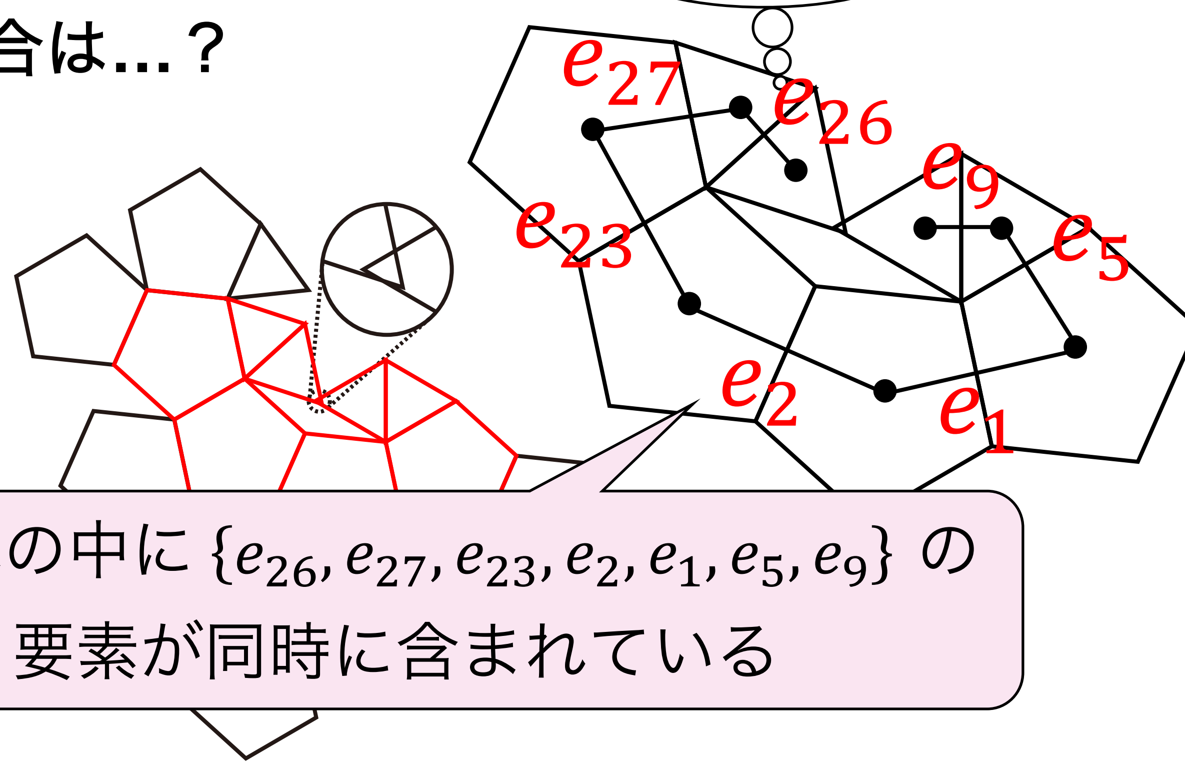
重なりを持たない辺

パス状の部分辺展開図

重なりを含めない場合は…？

【観察】





全域木の中に $\{e_{26}, e_{27}, e_{23}, e_{2}, e_{1}, e_{5}, e_{9}\}$ の要素が同時に含まれている

全域木で選ばれる辺の集合：

$\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, \cdots, e_9, \cdots, e_{23}, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, \cdots\}$

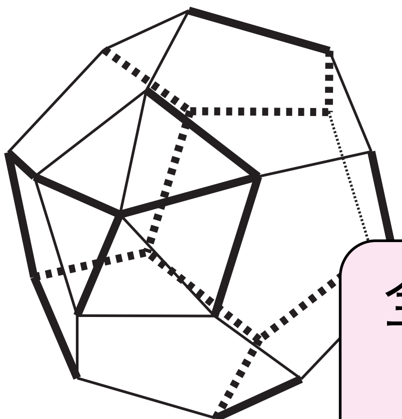
➡ 辺展開図は重なりを持つ

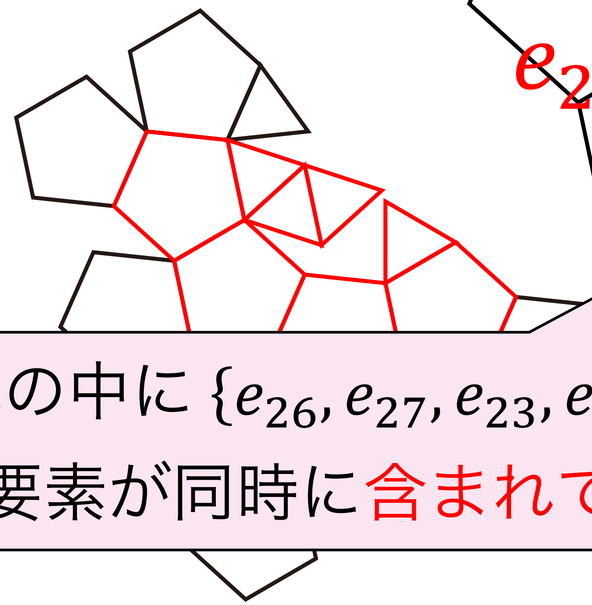
重なりを持たない辺

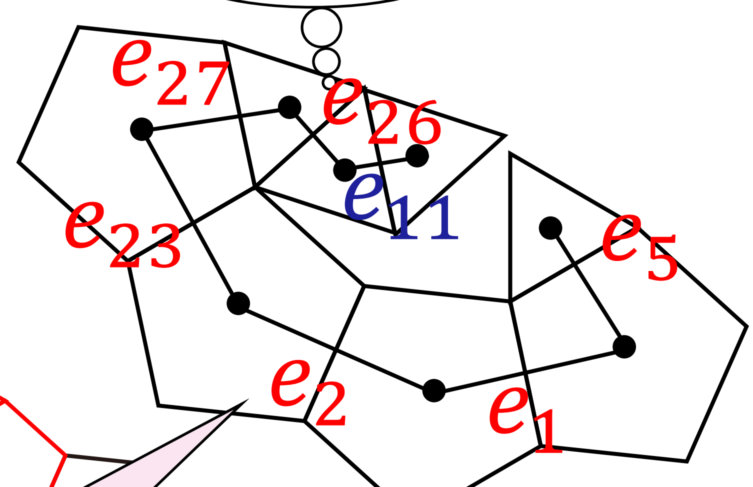
パス状の部分辺展開図

重なりを含めない場合は…？

【観察】







全域木の中に $\{e_{26}, e_{27}, e_{23}, e_2, e_1, e_5, e_9\}$ の要素が同時に含まれていない

全域木で選ばれる辺の集合：

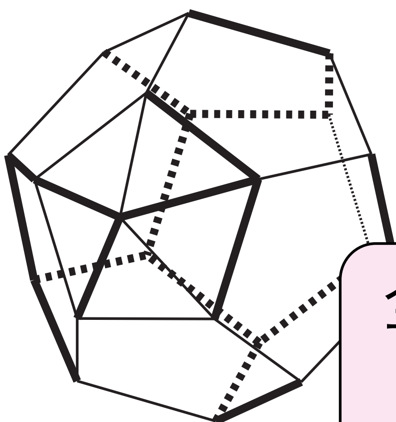
$\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, \cdots, e_{11}, \cdots, e_{23}, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, \cdots\}$

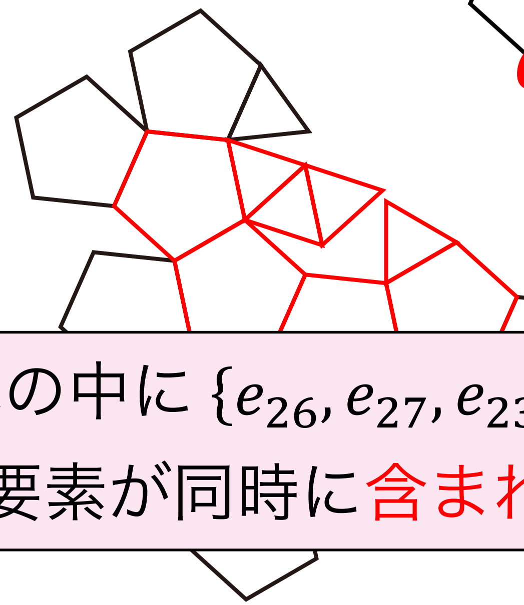
重なりを持たない辺

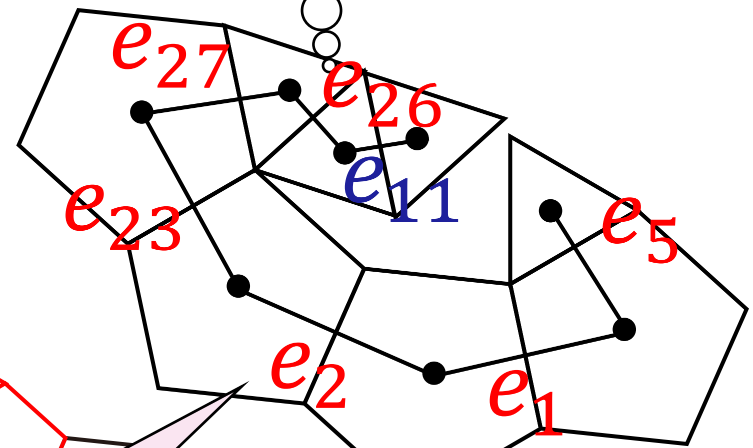
パス状の部分辺展開図

重なりを含めない場合は…？

【観察】







全域木の中に $\{e_{26}, e_{27}, e_{23}, e_2, e_1, e_5, e_9\}$ の要素が同時に含まれていない

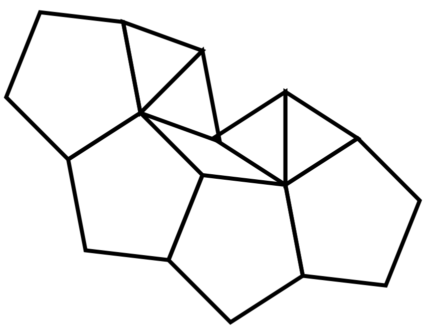
全域木で選ばれる辺の集合：

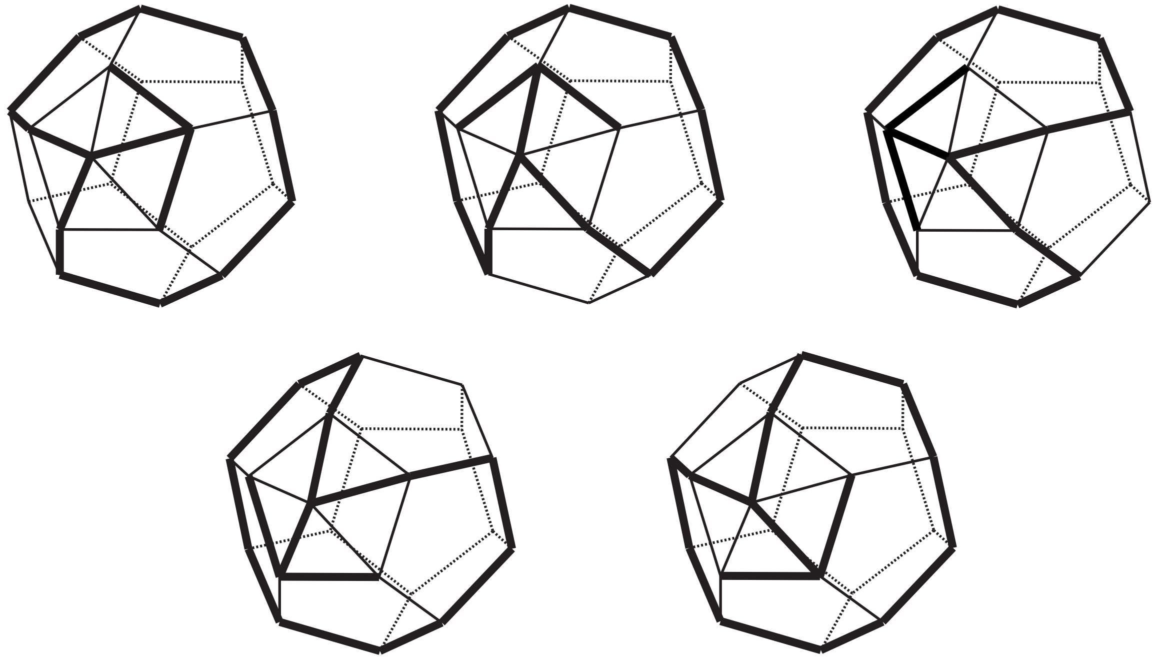
$\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, \cdots, e_{11}, \cdots, e_{23}, e_{24}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, \cdots\}$

➡ 辺展開図は重なりを持たない

重なりを持つパス状の部分辺展開図

重なりを持つパス状の部分辺展開図は，色々な場所に出現



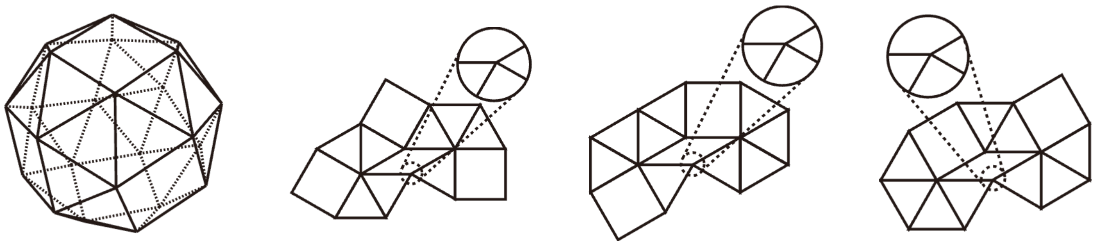


重なりを持つパス状の部分辺展開図が全て欲しい

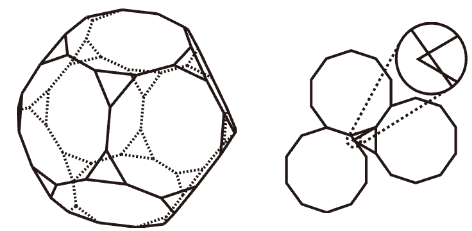
➡ 回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023] を使う

重なりを持つパス状の部分辺展開図

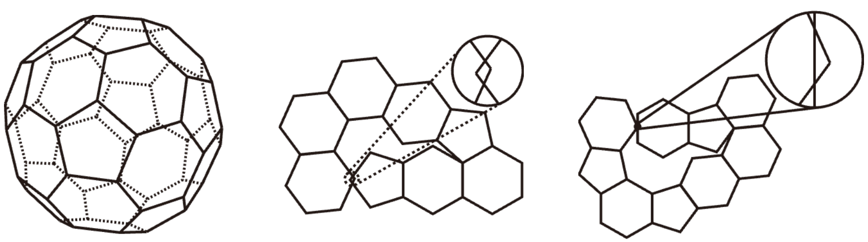
【例】重なりを持つパス状の部分辺展開図（対称形を除く）



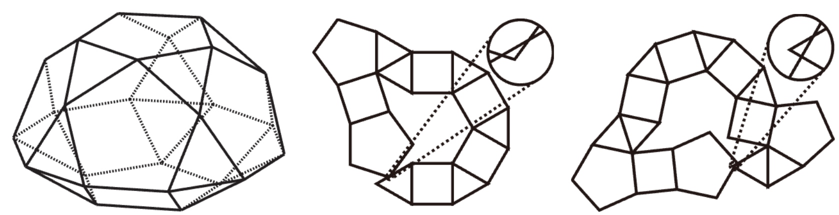
変形立方体



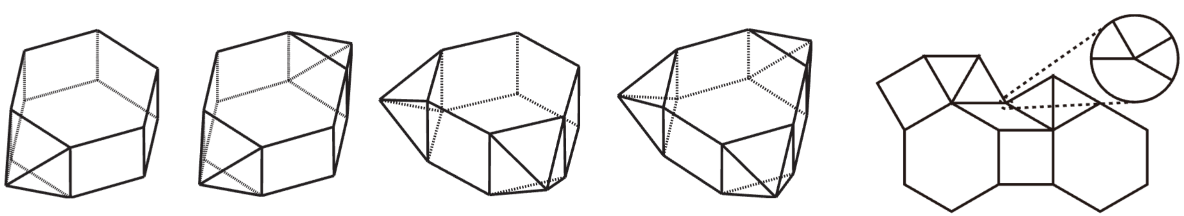
切頂十二面体



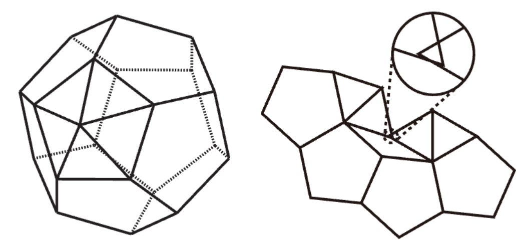
切頂二十面体



J24



J54～J57

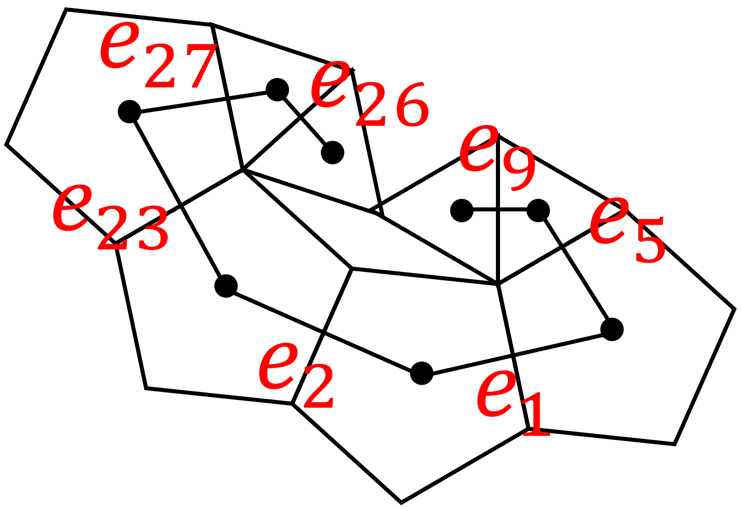


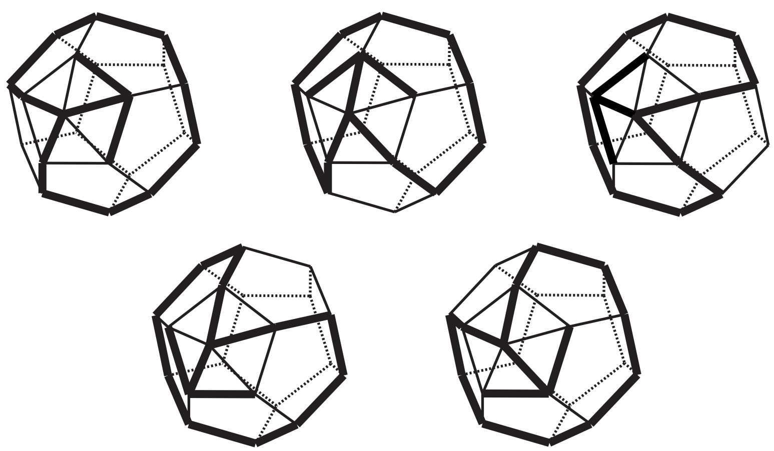
J58

重なりを持たない辺展開図の列挙

- ✓ 重なりを持つパス状の部分辺展開図から禁止リストを作成

9 0 1 8 15 27 16 // 禁止リスト0
9 5 1 2 23 27 26 // 禁止リスト1
10 12 8 1 2 22 11 // 禁止リスト2
10 5 8 15 23 22 26 // 禁止リスト3
11 0 2 23 15 12 16 // 禁止リスト4

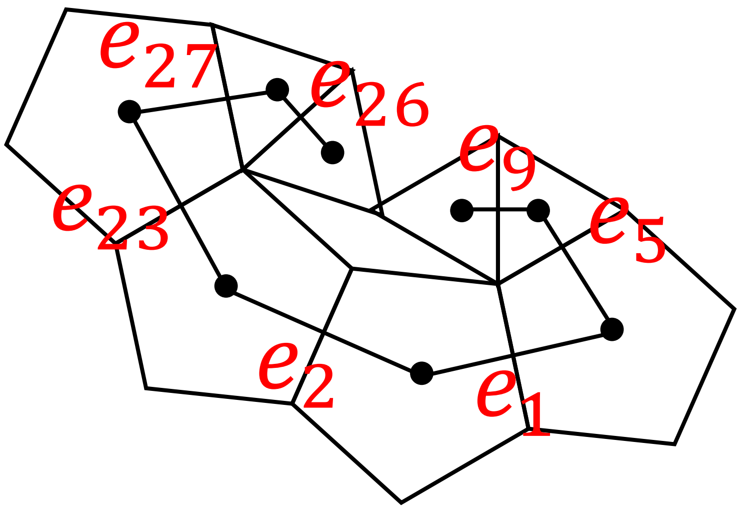


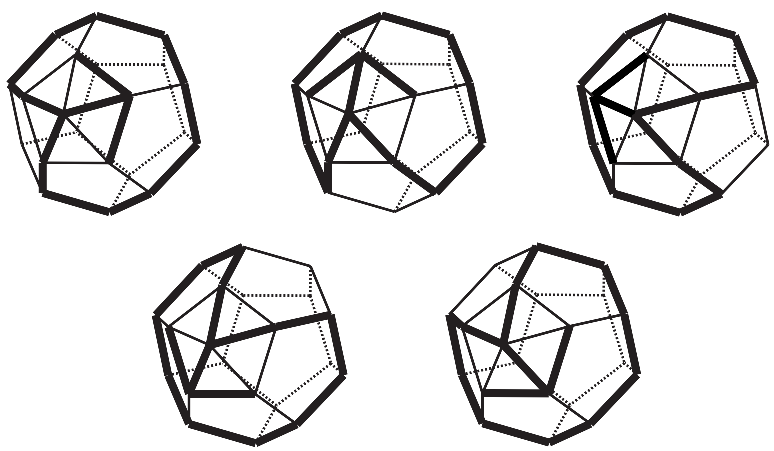


重なりを持たない辺展開図の列挙

✓ 重なりを持つパス状の部分辺展開図から禁止リストを作成

9 0 1 8 15 27 16 // 禁止リスト0
9 5 1 2 23 27 26 // 禁止リスト1
10 12 8 1 2 22 11 // 禁止リスト2
10 5 8 15 23 22 26 // 禁止リスト3
11 0 2 23 15 12 16 // 禁止リスト4





➤ ZDDを構築していく際に, zddSubset という機能を使って取り除いていく

まとめ

ジョンソンの立体 J54〜J58 に対して，重なりを持たない辺展開図の個数を求め，列挙することができた.

立体番号	#(辺展開図) [HS13]	#(重なりを持たない辺展開図)	割合(%)
J54	75,973	75,749	99.7
J55	709,632	705,144	99.4
J56	707,232	702,520	99.3
J57	6,531,840	6,457,860	98.9
J58	92,724,962	92,219,782	99.4

【今後の課題】

- 高速化のアイデアを用いて，より多くの多面体に対して重なりを持たない辺展開図の列挙を行う.