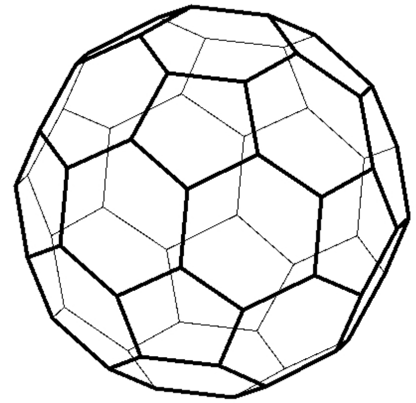
Overlap-free な多面体の完全な分類

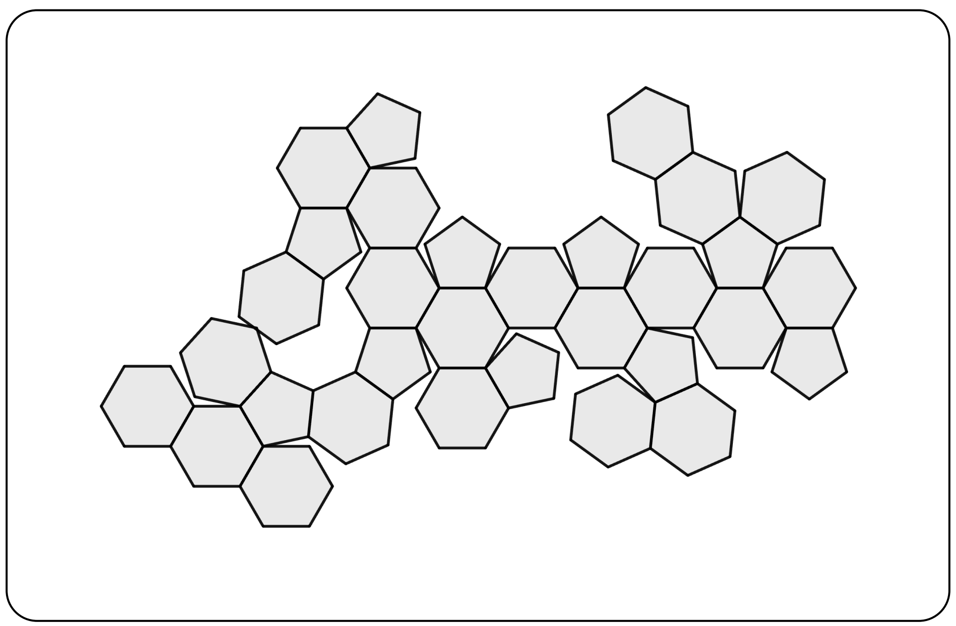
鎌田斗南(JAIST)
塩田拓海(九工大)
上原隆平(JAIST)

第195回AL研究発表会 @ 那覇市IT創造館

研究の背景



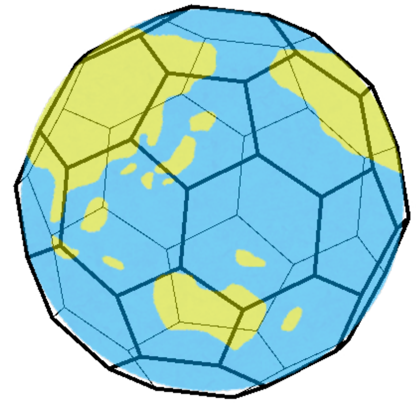
辺展開

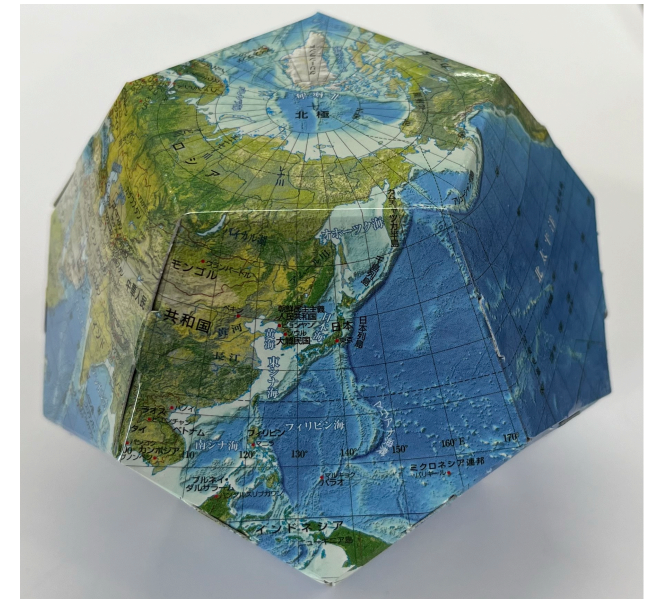


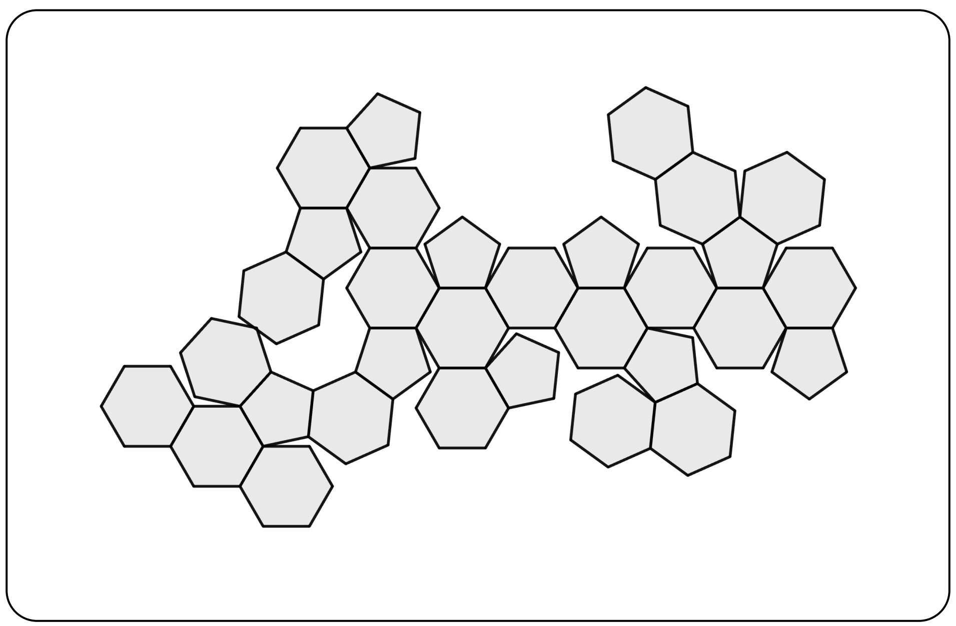
* [T. Shiota and T. Saitoh, WALCOM 2023]による例

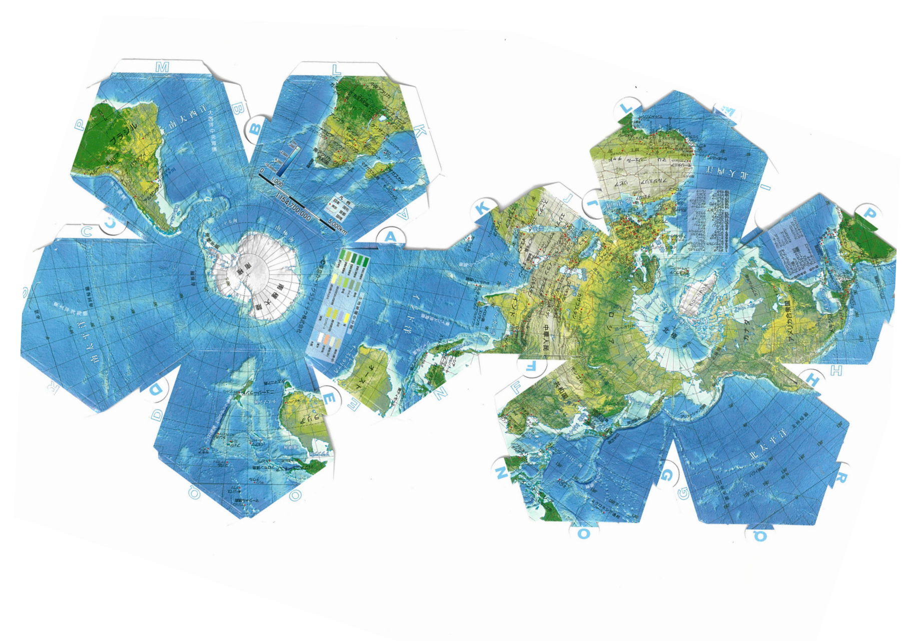
研究の背景

辺展開

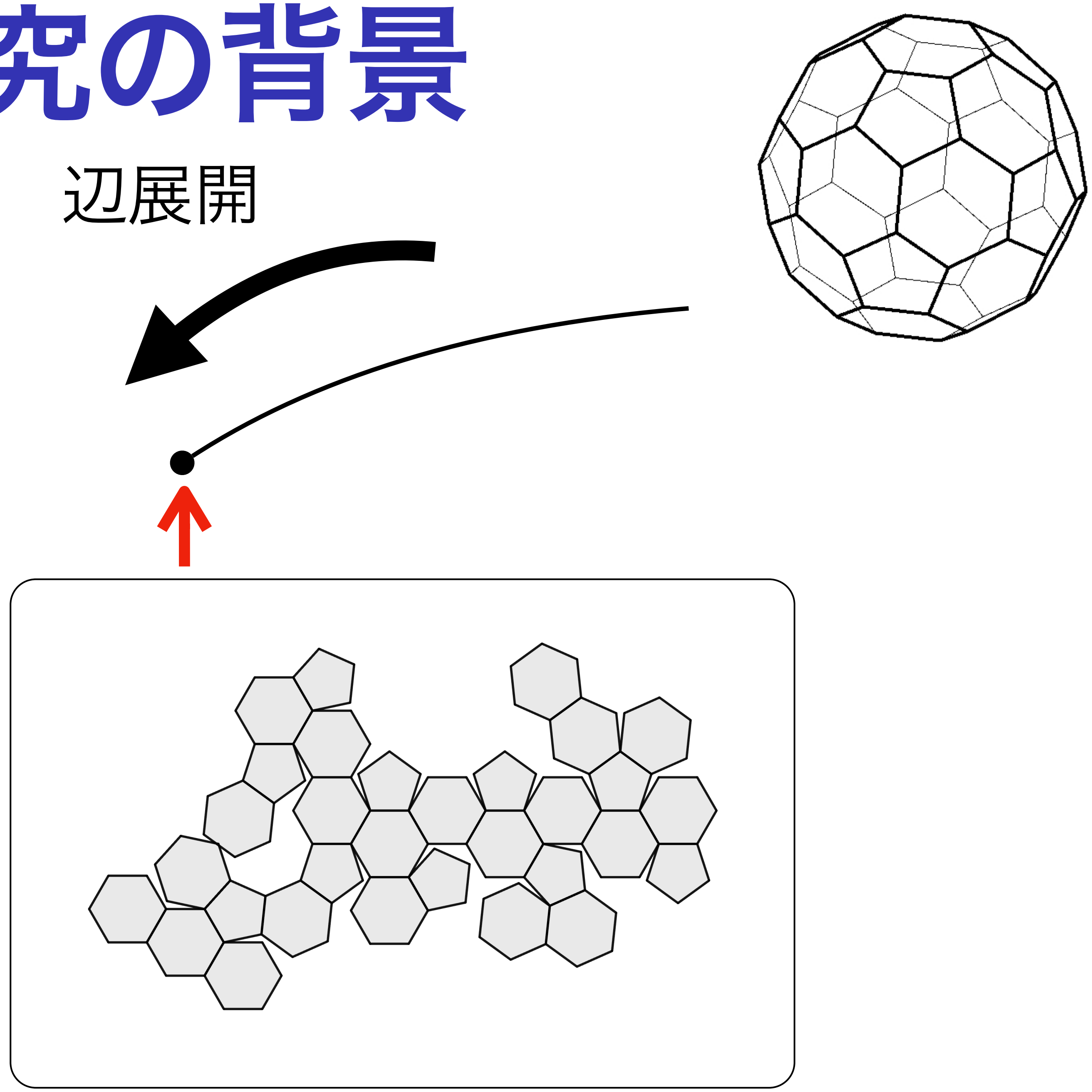






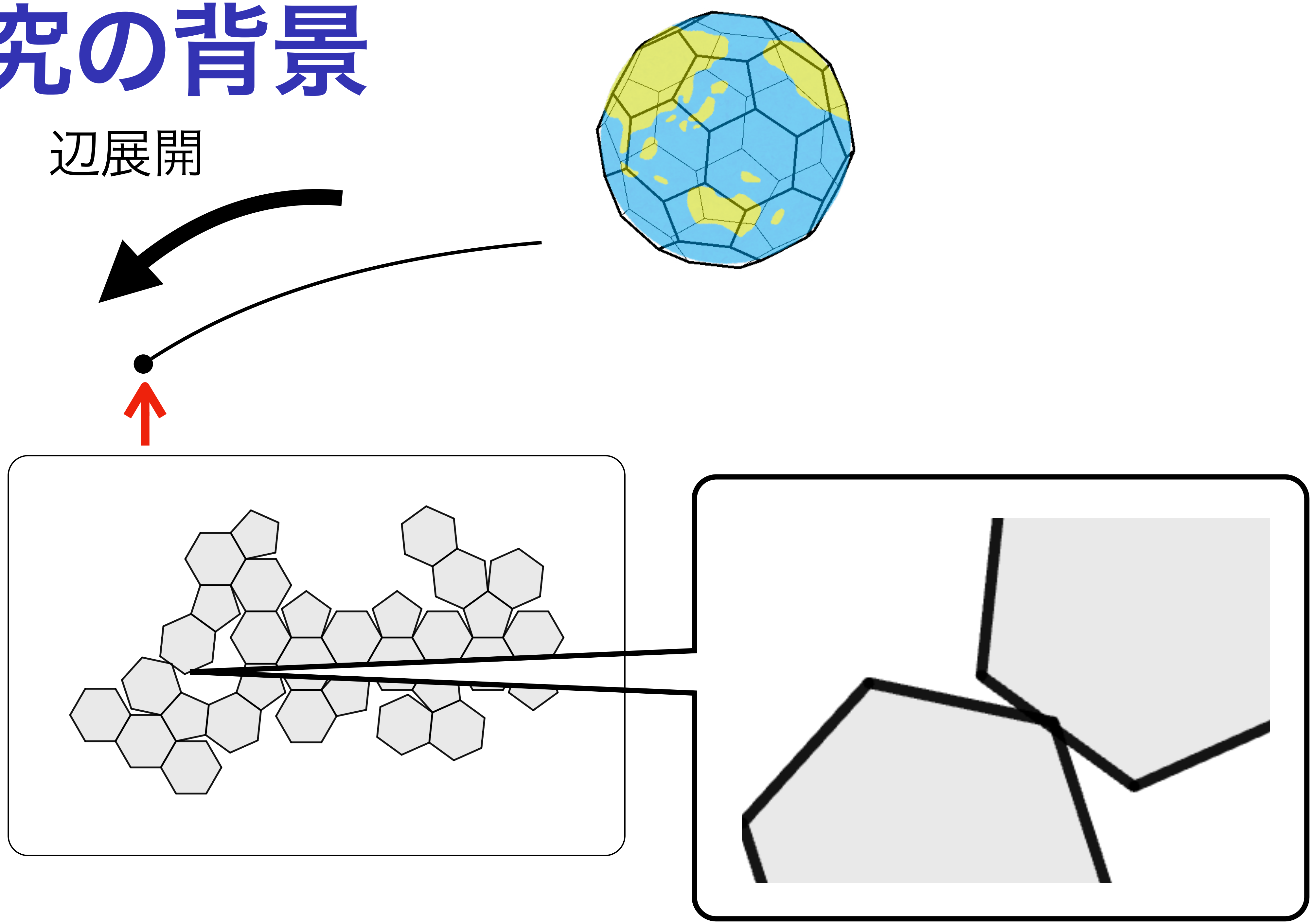


研究の背景



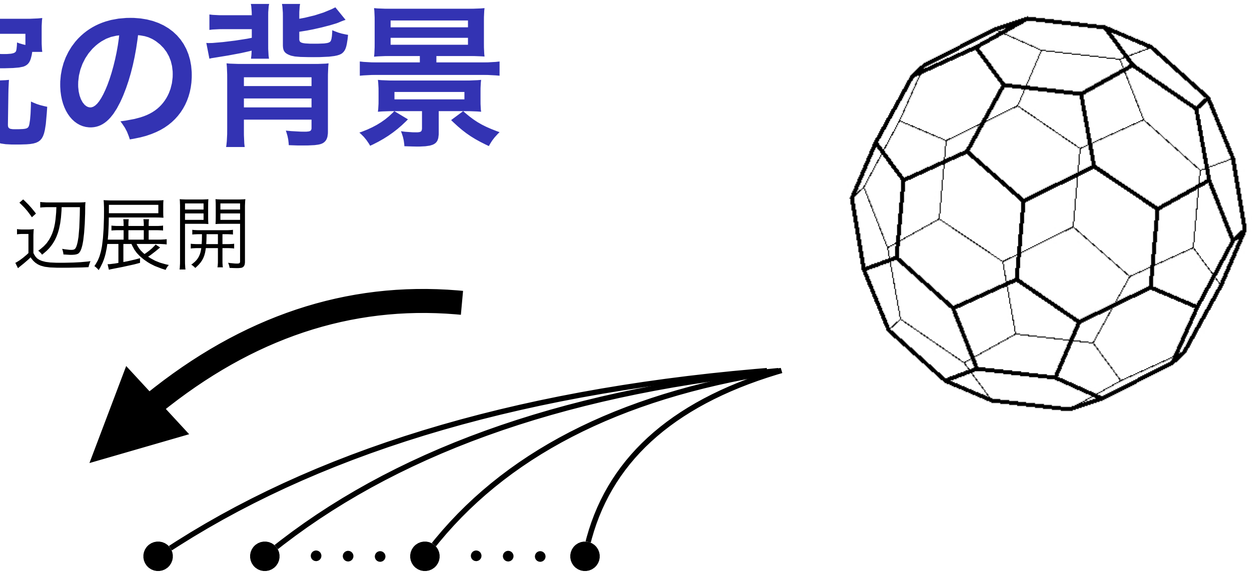
*1 [T. Horiyama and W. Shoji, CCCG 2011] による例

研究の背景

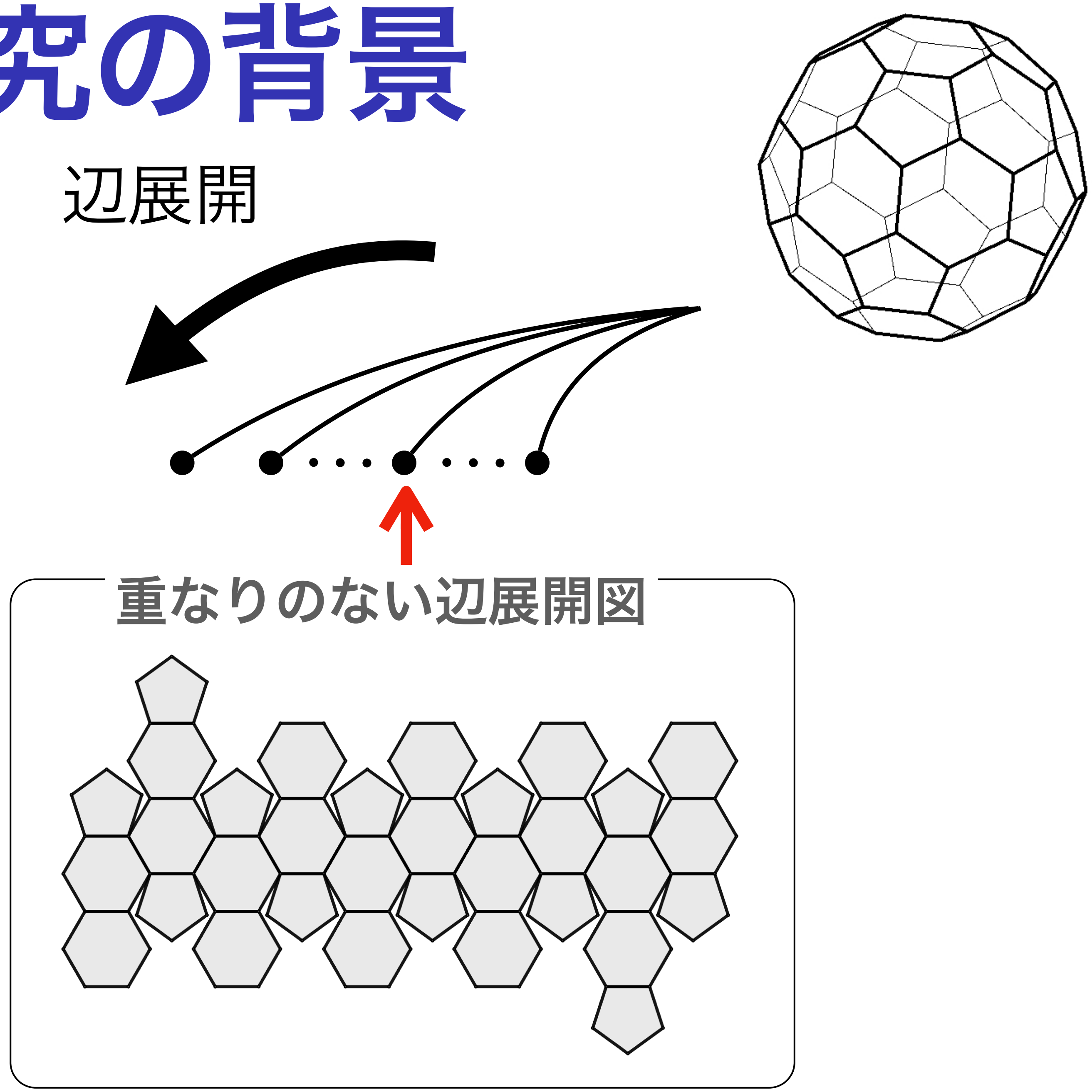


*1 [T. Horiyama and W. Shoji, CCCG 2011] による例

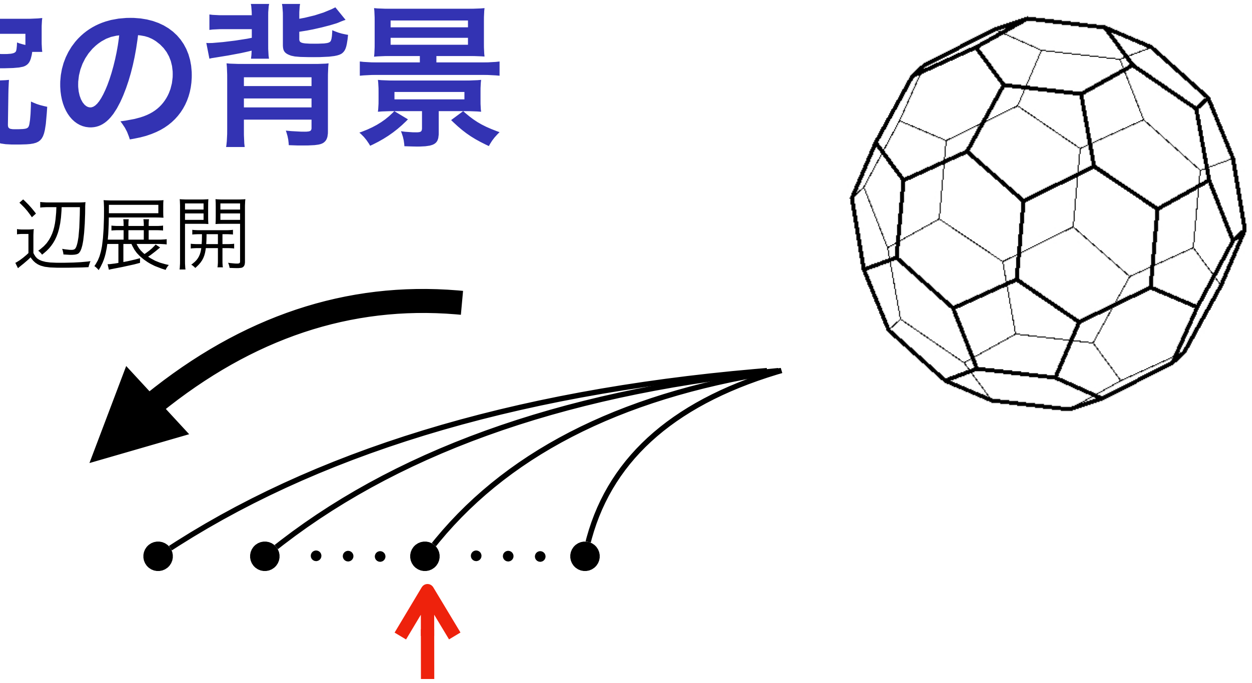
研究の背景



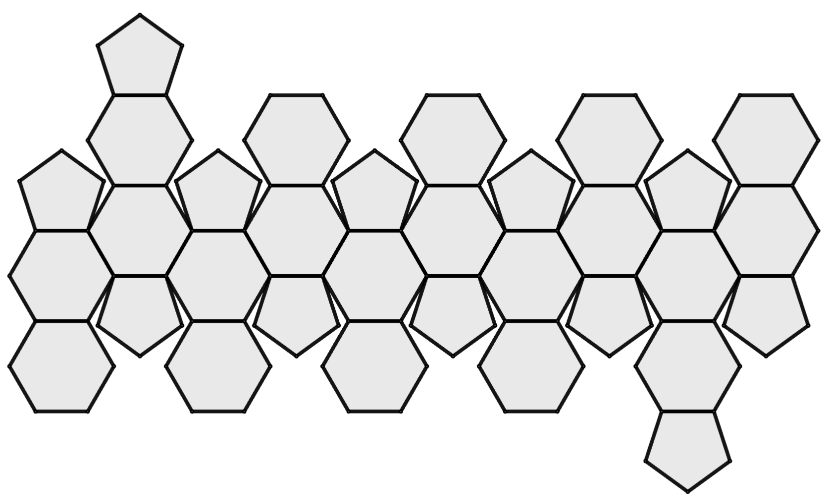
研究の背景



研究の背景



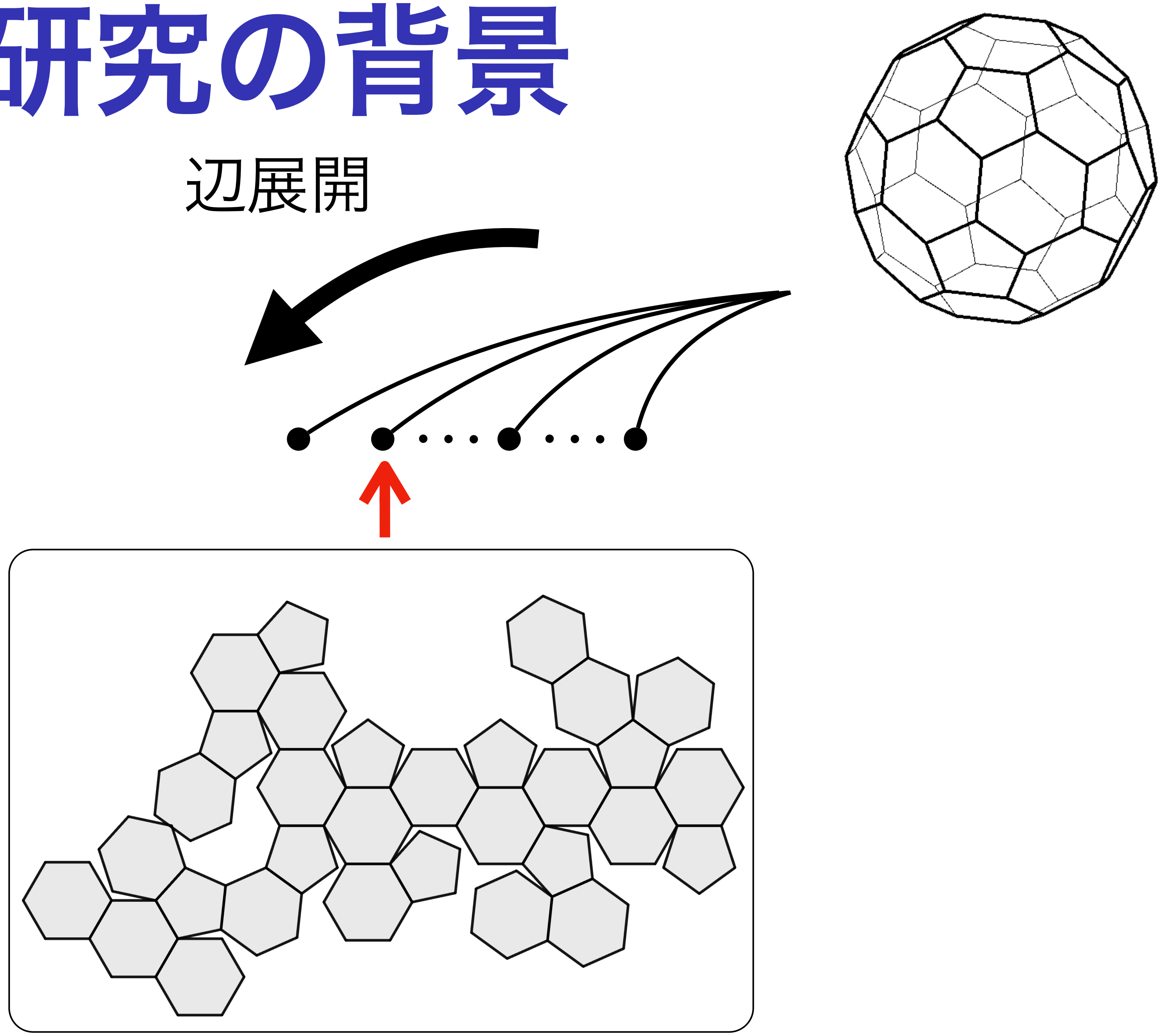
重なりのない辺展開図



末解決問題 [Shephard, 1975]

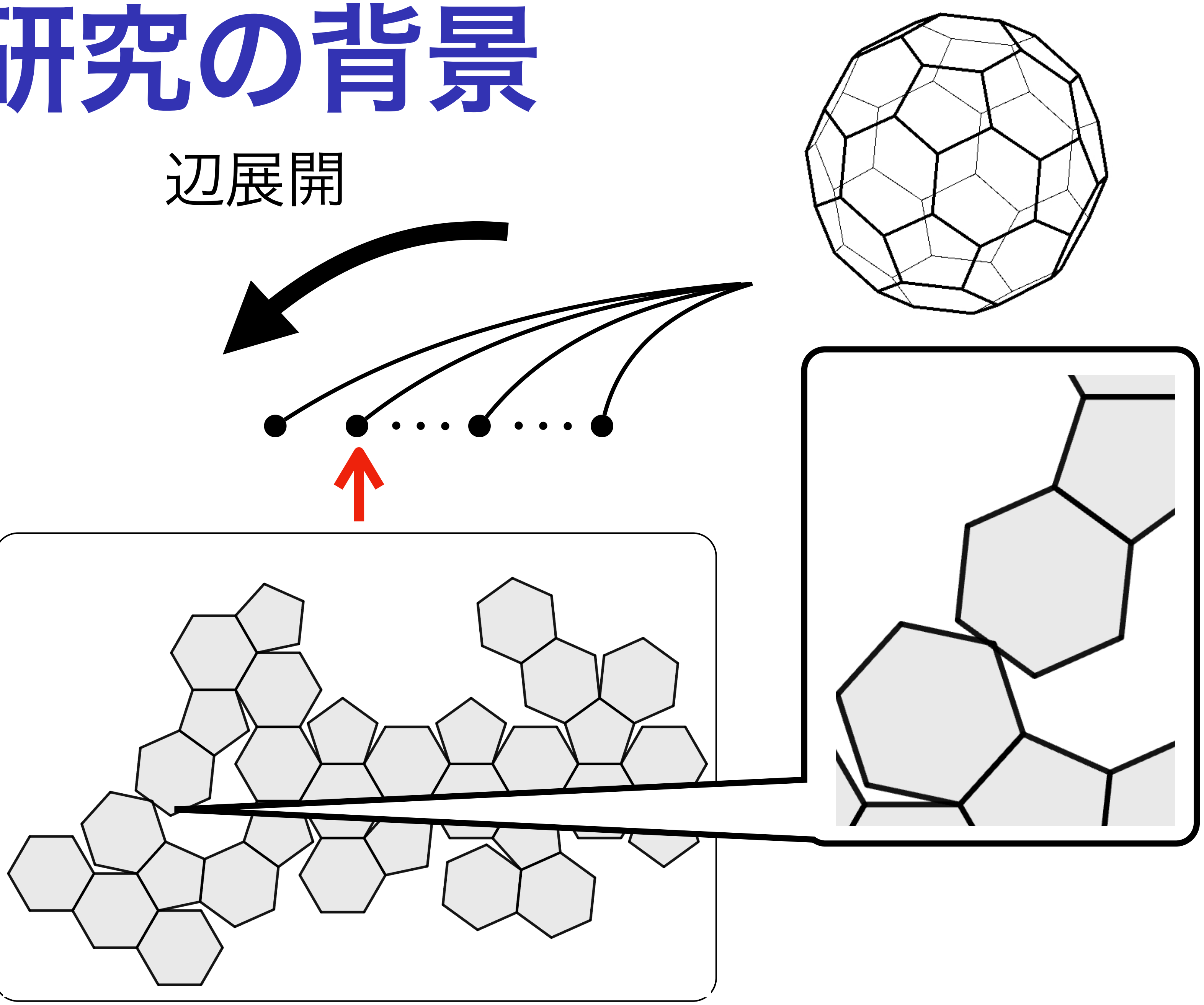
任意の凸多面体に対して，
重なりのない辺展開図は存在するか？

研究の背景

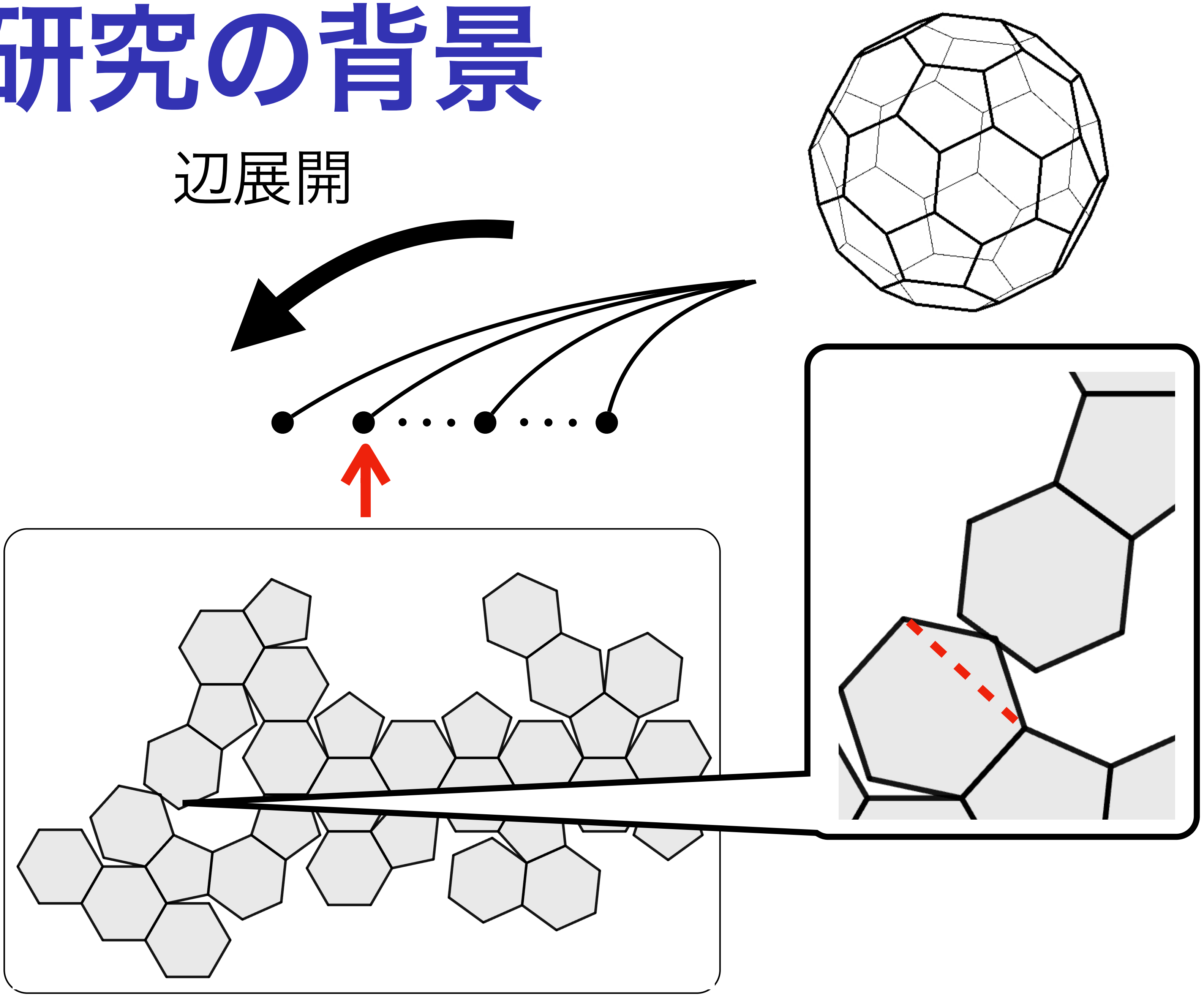


研究の背景

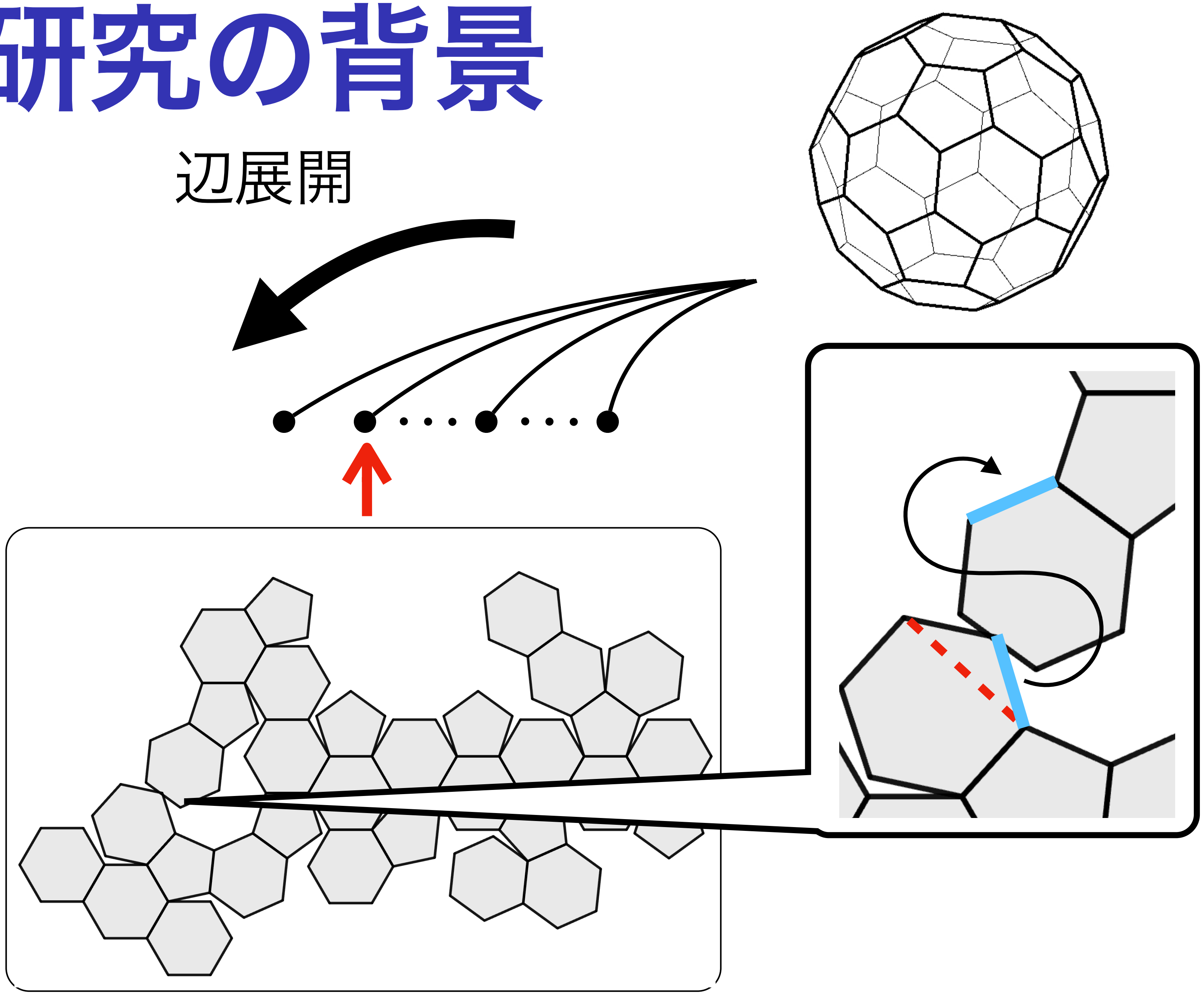
辺展開



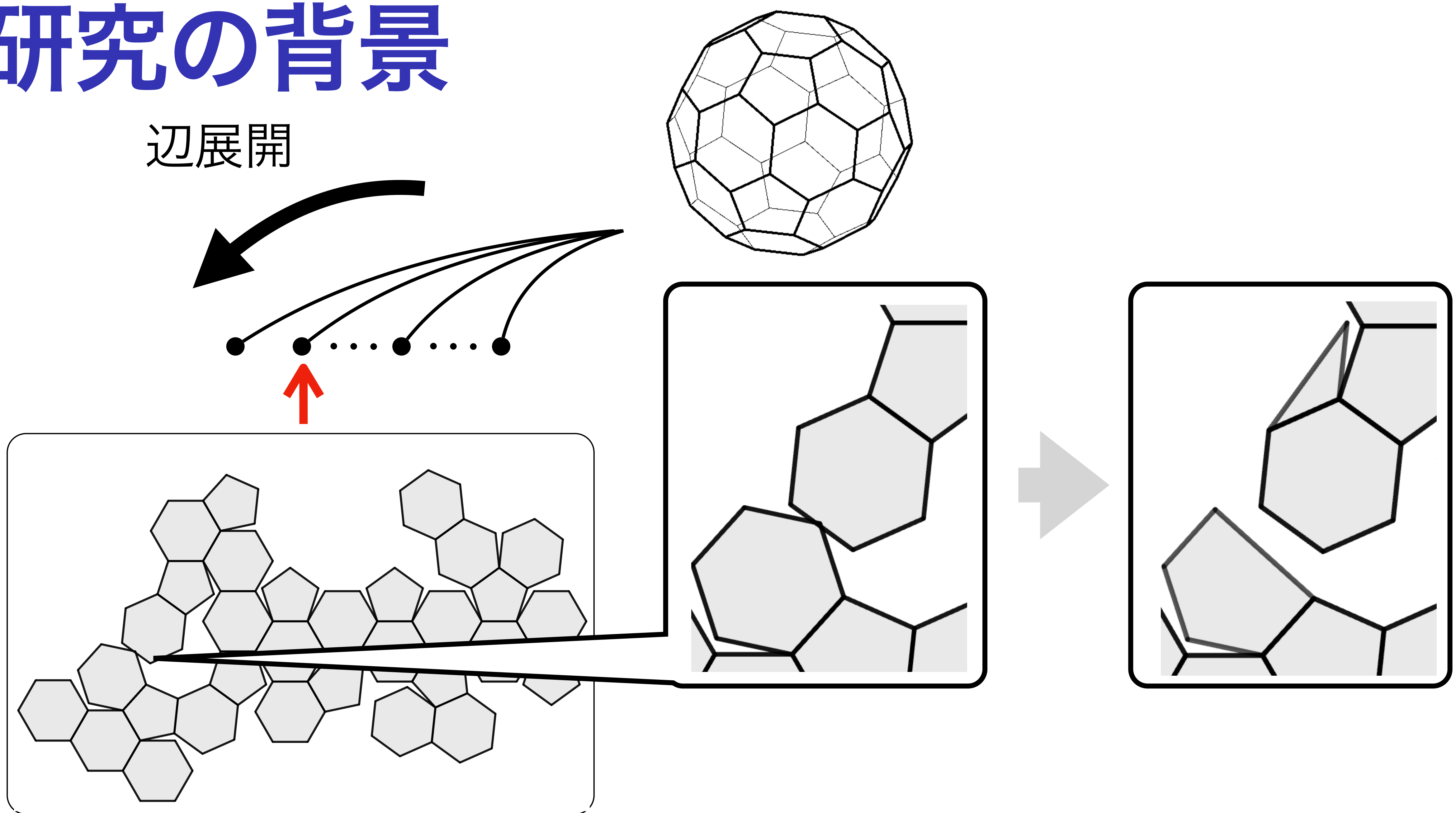
研究の背景



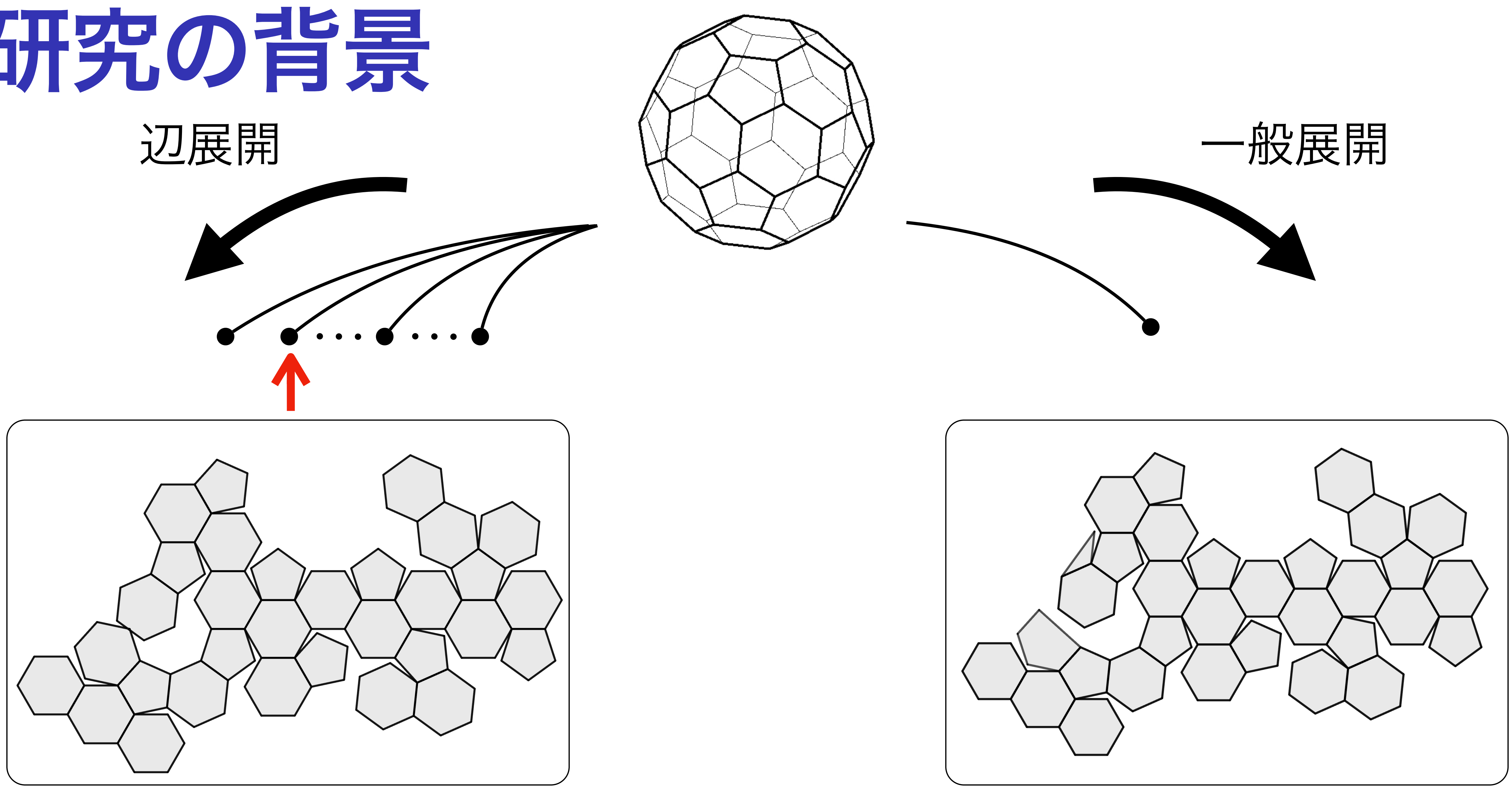
研究の背景



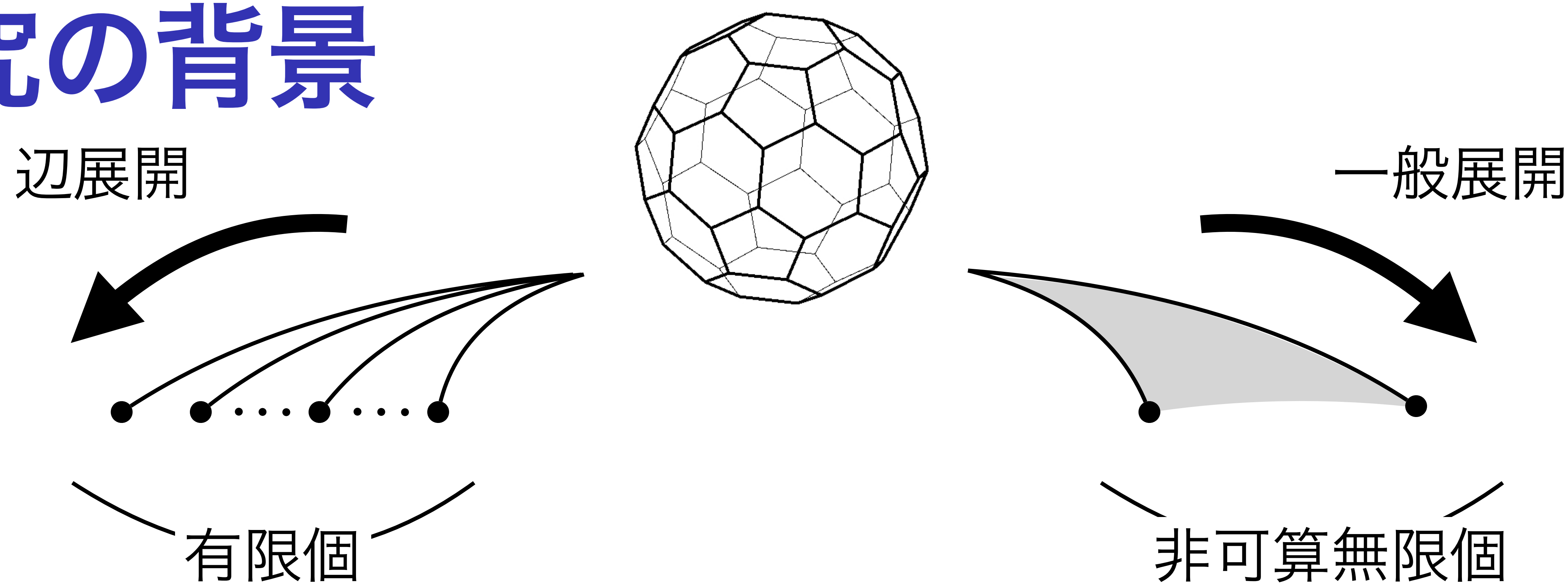
研究の背景



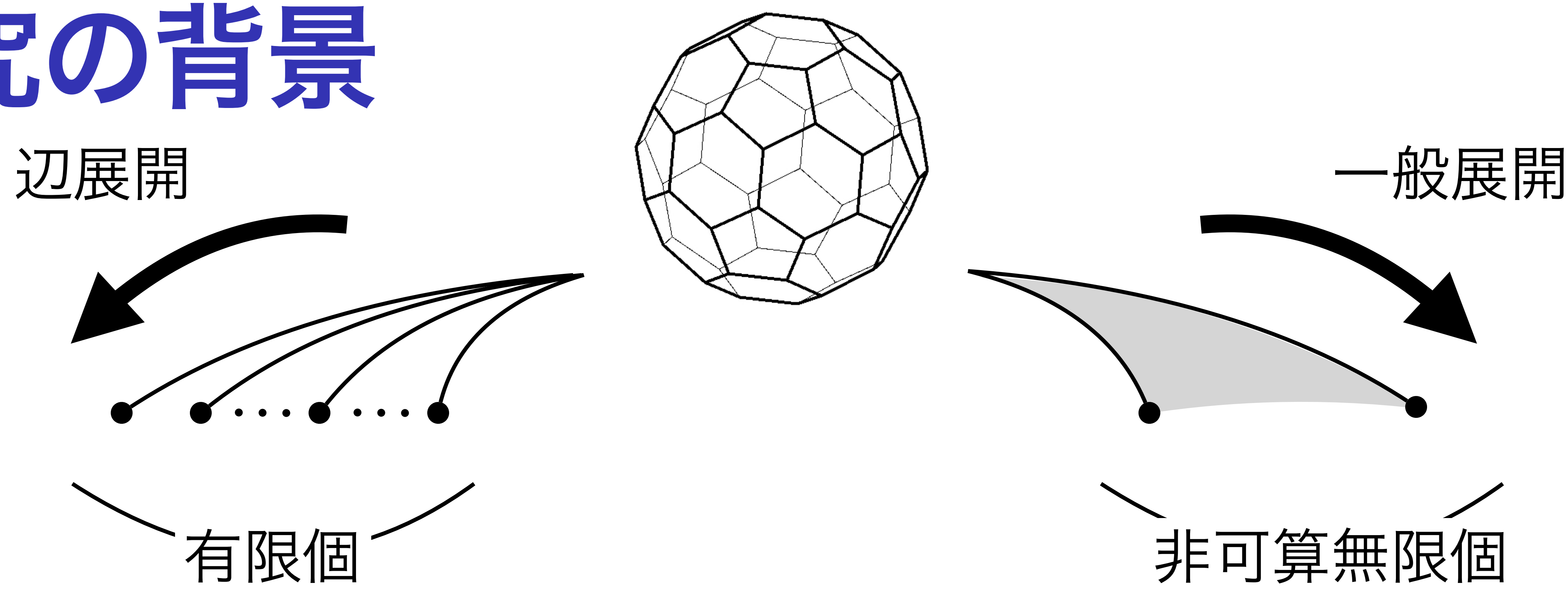
研究の背景



研究の背景



研究の背景

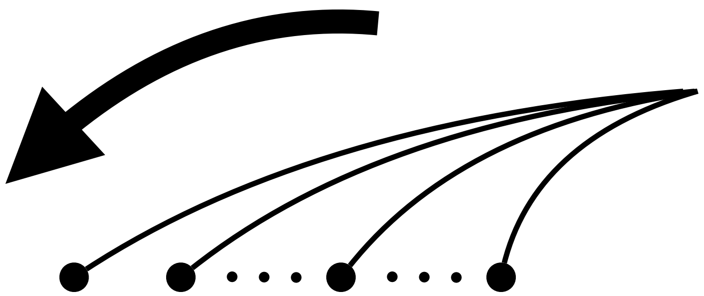


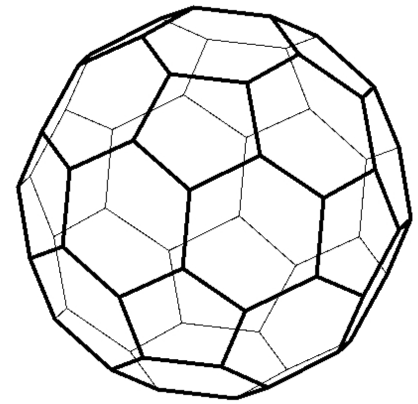
未解決問題 [Shephard, 1975]

任意の凸多面体に対して,
重なりのない辺展開図は存在するか？

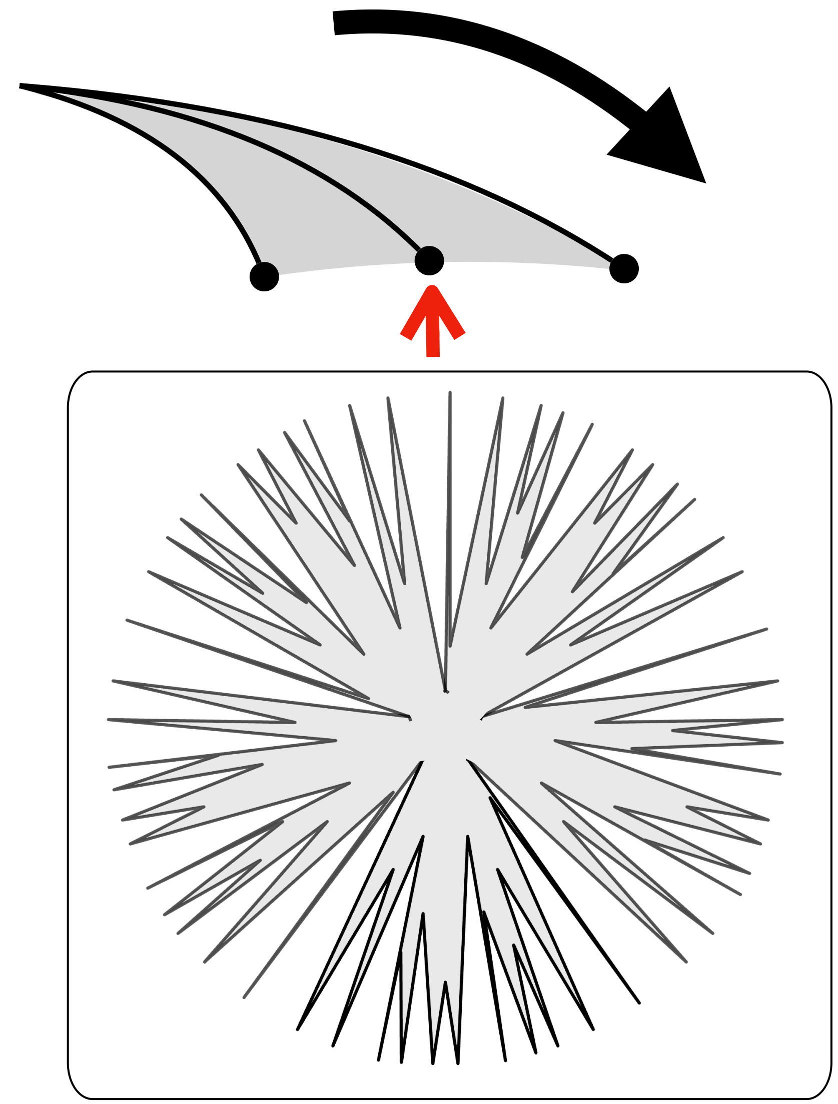
研究の背景

辺展開





一般展開



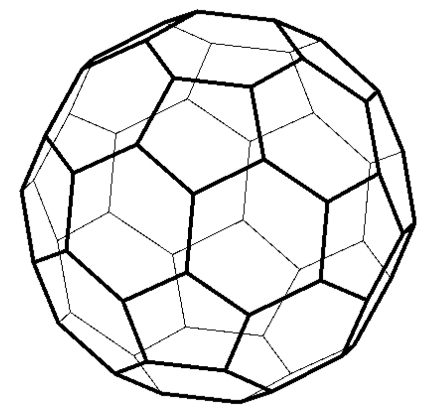
未解決問題 [Shephard, 1975]

任意の凸多面体に対して,
重なりのない辺展開図は存在するか？

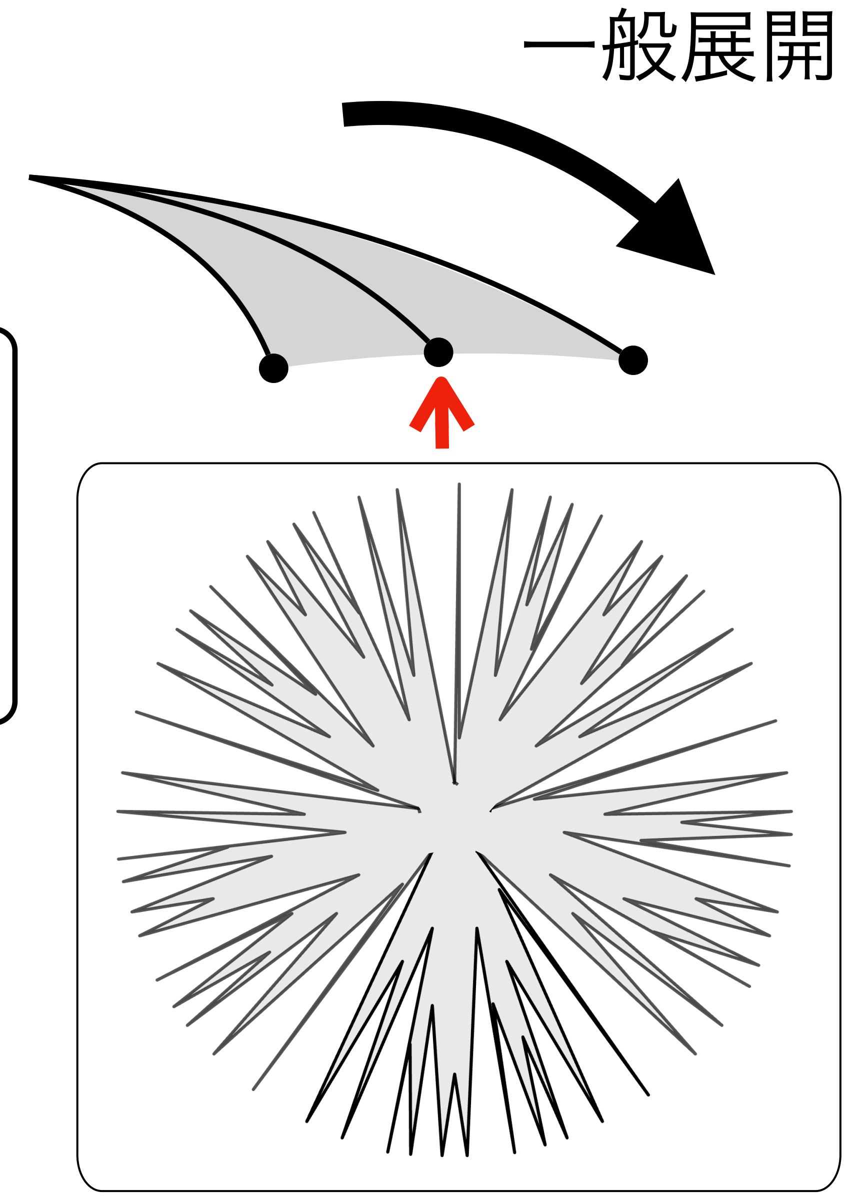
定理 [Sharir and Schorr, 1986]

任意の凸多面体に対して,
重なりのない一般展開図が存在する

研究の背景



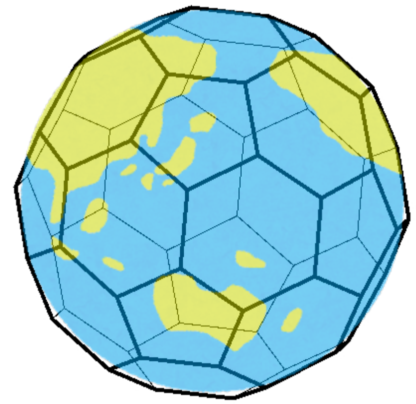
任意の凸多面体が
“重なりのない一般展開図が存在する”
という性質を満たす



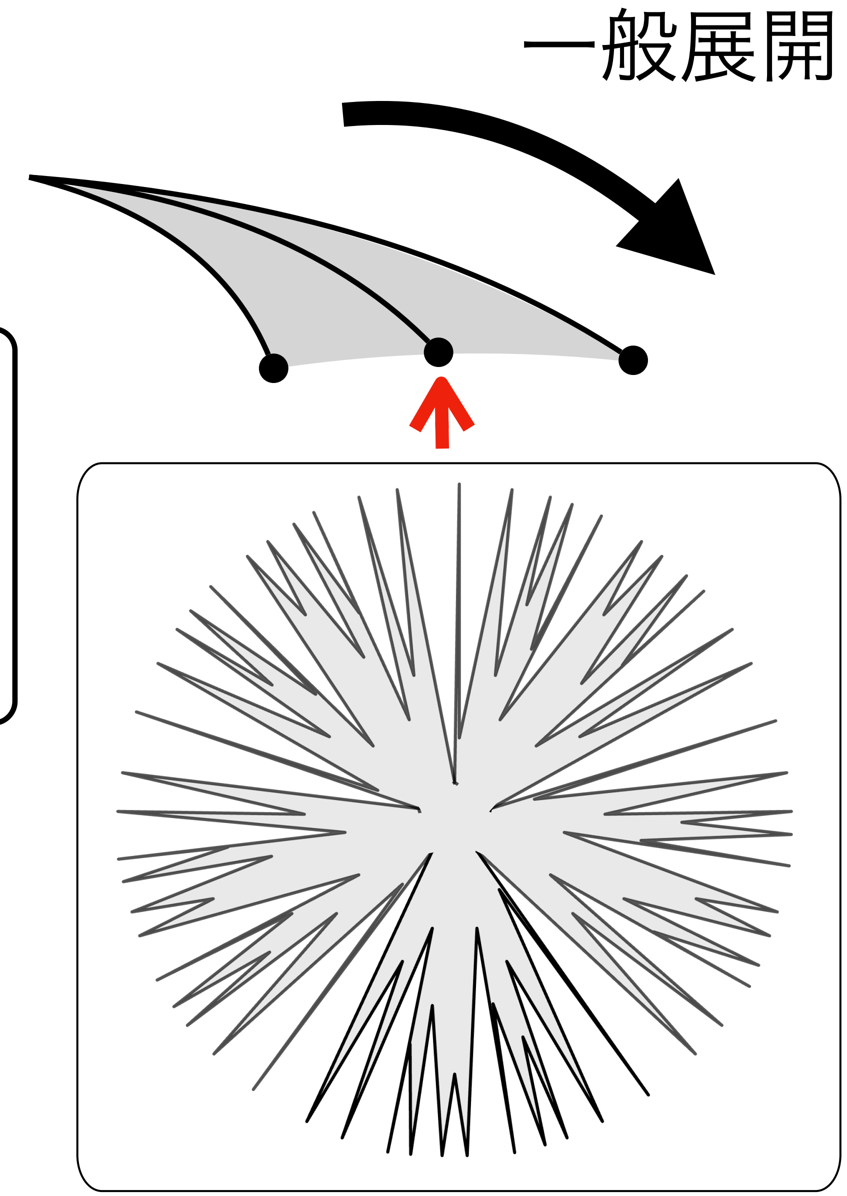
定理 [Sharir and Schorr, 1986]

任意の凸多面体に対して,
重なりのない一般展開図が存在する

研究の背景



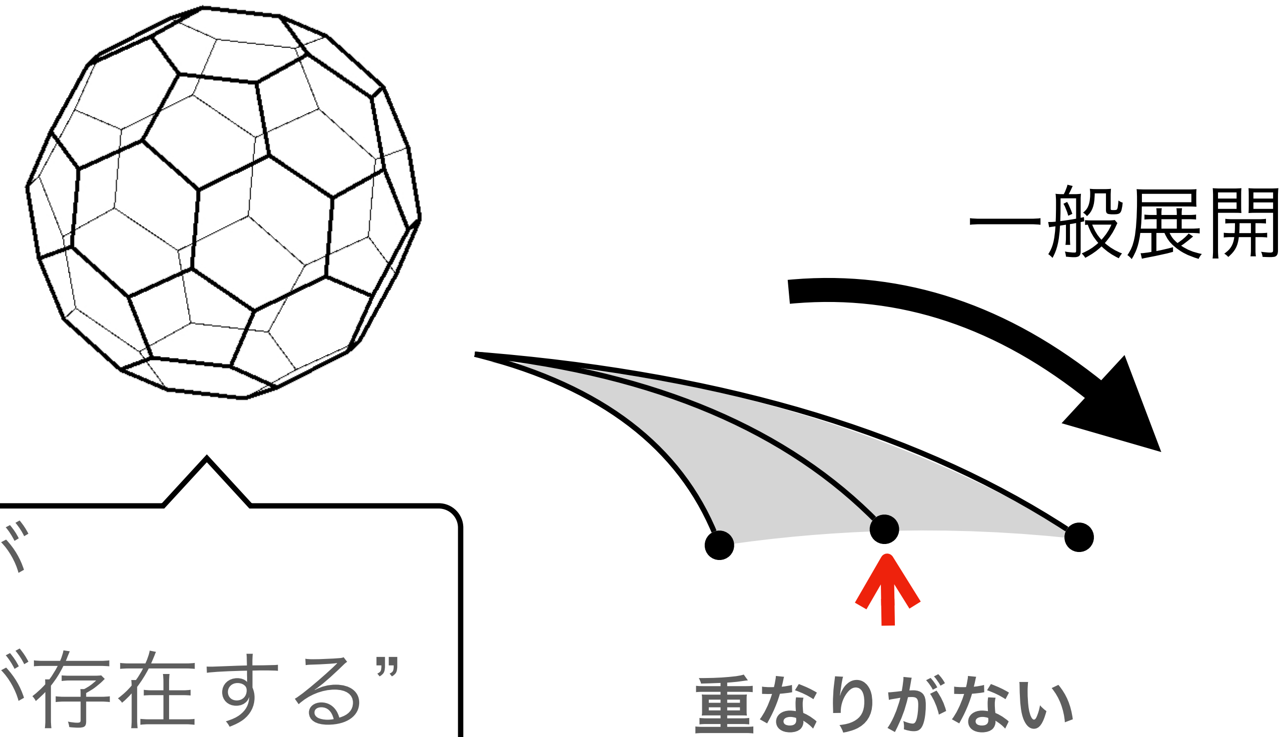
任意の凸多面体が
“重なりのない一般展開図が存在する”
という性質を満たす



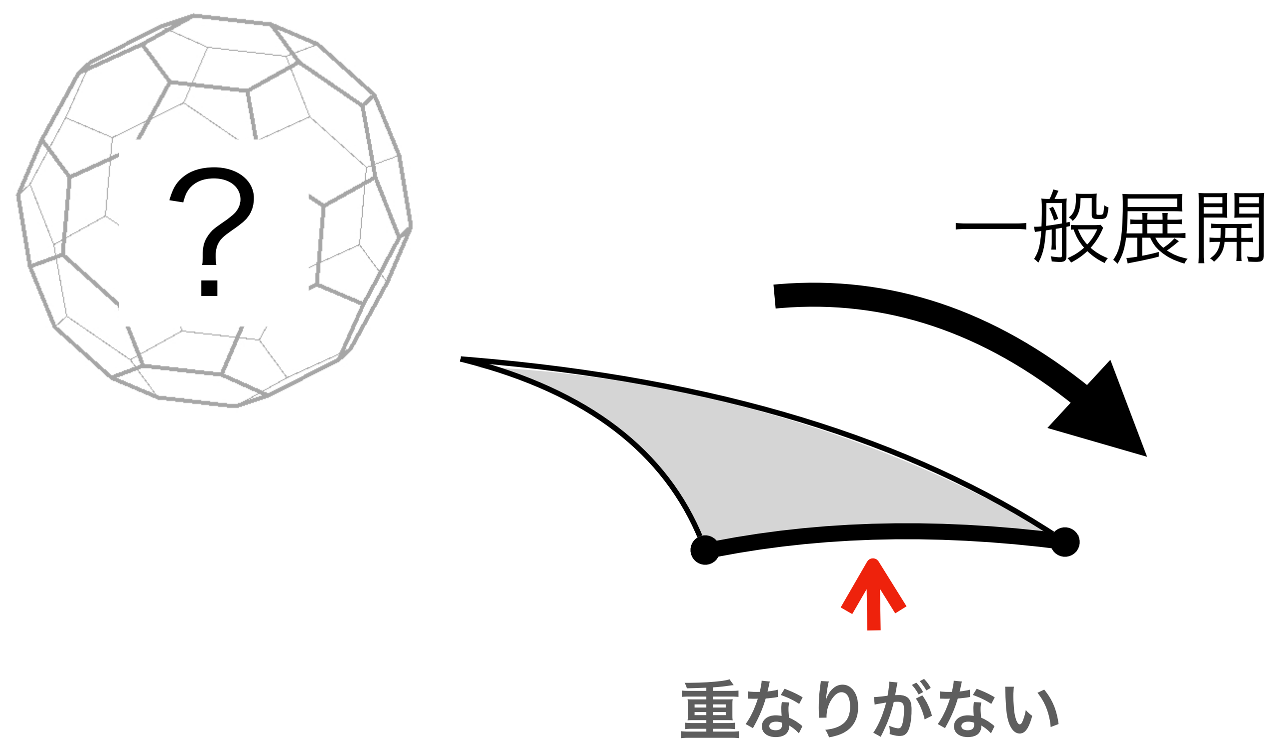
定理 [Sharir and Schorr, 1986]

任意の凸多面体に対して,
重なりのない一般展開図が存在する

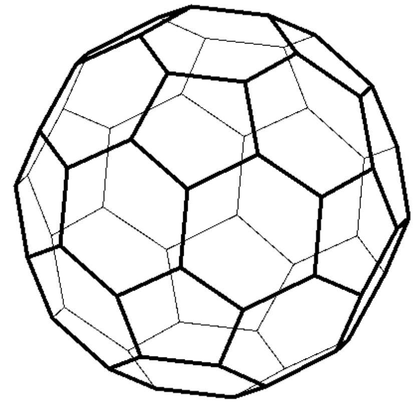
研究の背景

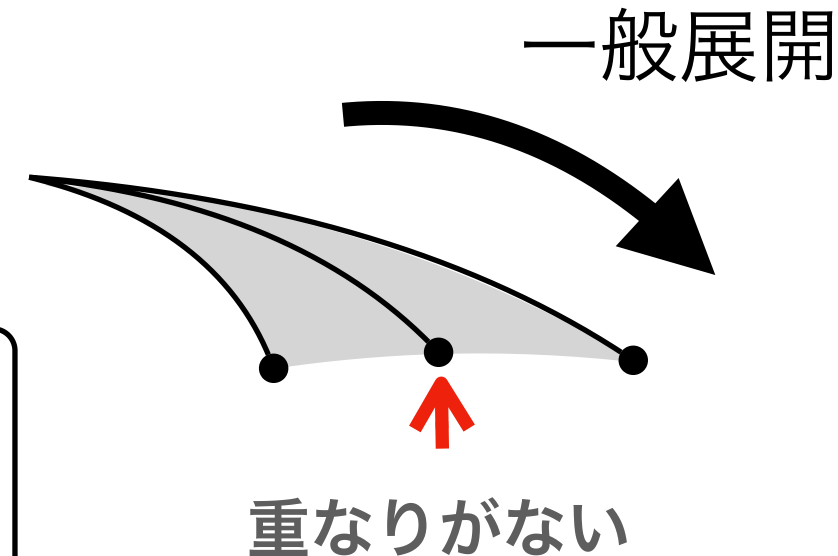


任意の凸多面体が
“重なりのない一般展開図が存在する”
という性質を満たす

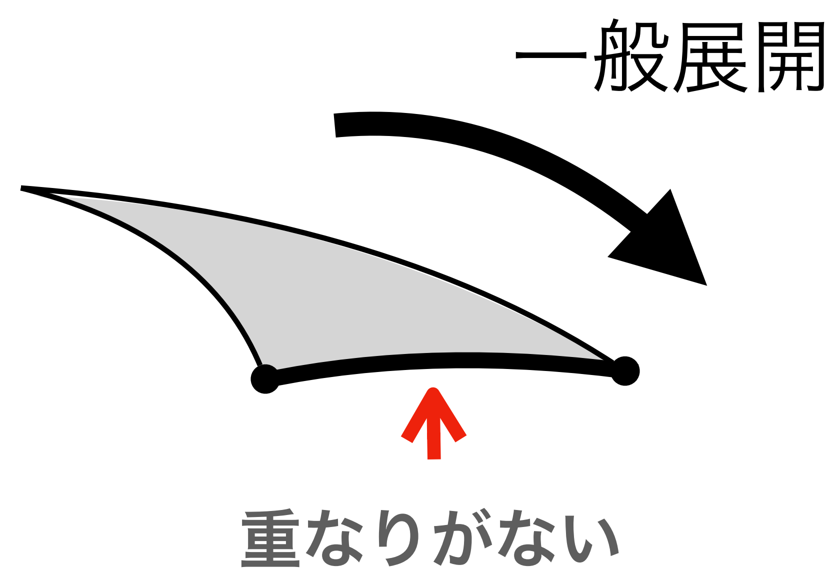


研究の背景





任意の凸多面体が
“重なりのない一般展開図が存在する”
という性質を満たす



どの様な多面体が
“任意の一般展開図が重なりを持たない”
(= Overlap-free)
という性質を満たすか？

本研究の結果

定理

任意の凸多面体 Q に対して,

$$Q \text{ が Overlap-free}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q \text{ が} \left(\begin{array}{c} \text{等面四面体} \\ \text{正三角形二面体} \\ \text{半正三角形二面体} \\ \text{直角二等辺三角形二面体} \end{array} \right) \text{のいずれか}$$

本研究の結果

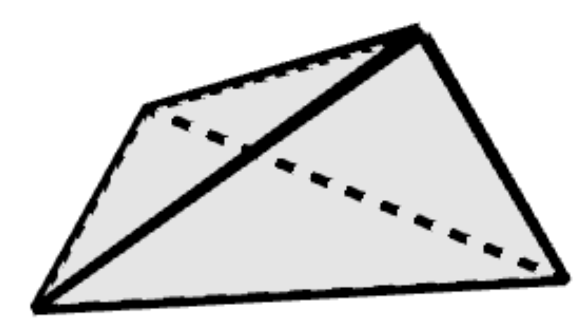
定理

任意の凸多面体 Q に対して,

$$Q \text{ が Overlap-free}$$

$$\Updownarrow$$

$$Q \text{ が} \left(\begin{array}{c} \underline{\textbf{等面四面体}} \\ \text{正三角形二面体} \\ \text{半正三角形二面体} \\ \text{直角二等辺三角形二面体} \end{array} \right) \text{のいずれか}$$



本研究の結果

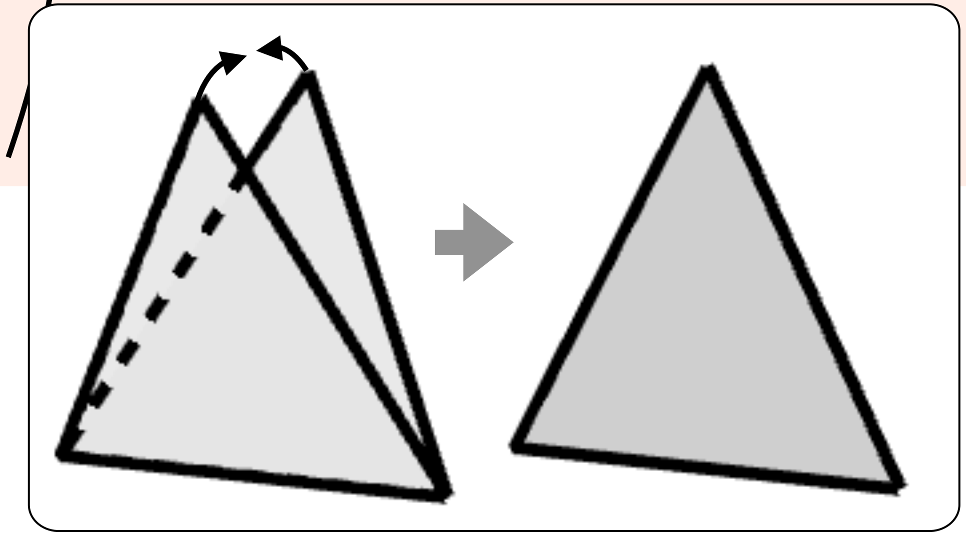
定理

任意の凸多面体 Q に対して,

Q が Overlap-free

$$\Updownarrow$$

Q が（
等面四面体
正三角形**二面体**
半正三角形**二面体**
直角二等辺三角形**二面体**
）のいずれか



本研究の結果

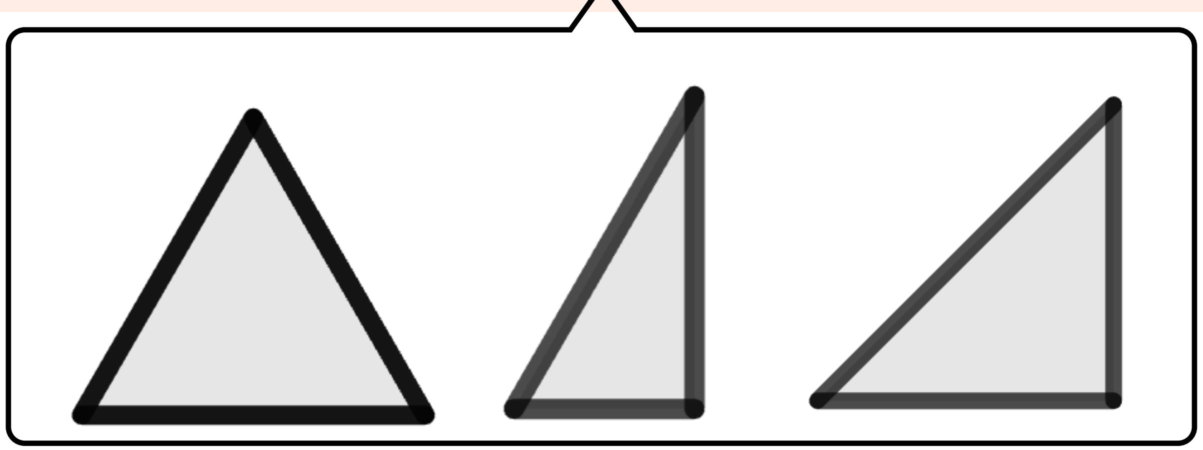
定理

任意の凸多面体 Q に対して,

Q が Overlap-free

$$\Updownarrow$$

Q が $\left(\begin{array}{c} \text{等面四面体} \\ \text{正三角形二面体} \\ \text{半正三角形二面体} \\ \text{直角二等辺三角形二面体} \end{array} \right)$ のいずれか



本研究の結果

定理

任意の凸多面体 Q に対して,

Q が Overlap-free

$\Updownarrow$

定理 [Akiyama, 2008]

Q が $\left(\begin{array}{c}\text{等面四面体}\\\text{正三角形二面体}\\\text{半正三角形二面体}\\\text{直角二等辺三角形二面体}\end{array}\right)$ のいずれか

$\Updownarrow$

Q が Stamper

本研究の結果

定理

任意の凸多面体 Q に対して,

$$Q \text{ が Overlap-free} \Leftrightarrow Q \text{ が Stamper}$$

本研究の結果

定理

任意の凸多面体 Q に対して,

Q が Overlap-free $\Leftrightarrow$ Q が Stamper

補題

任意の凸多面体 Q に対して,

Q が Stamper でない $\Rightarrow$ Q が Overlap-free でない

補題

任意の凸多面体 Q に対して,

Q が Overlap-free でない $\Rightarrow$ Q が Stamper でない

本研究の結果

定理

任意の凸多面体 Q に対して,

$$Q \text{ が Overlap-free} \Leftrightarrow Q \text{ が Stamper}$$

補題

任意の凸多面体 Q に対して,

$$Q \text{ が Stamper でない} \Rightarrow Q \text{ が Overlap-free でない}$$

本研究の結果

定理

任意の凸多面体 Q に対して,

Q が Overlap-free $\Leftrightarrow$ Q が Stamper

補題

任意の凸多面体 Q に対して,

Q が Stamper でない $\Rightarrow$ Q が Overlap-free でない

等面四面体
正三角形二面体
半正三角形二面体
直角二等辺三角形二面体
でない

“重なりのある展開図が存在する”

必要性の証明 - 方針 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

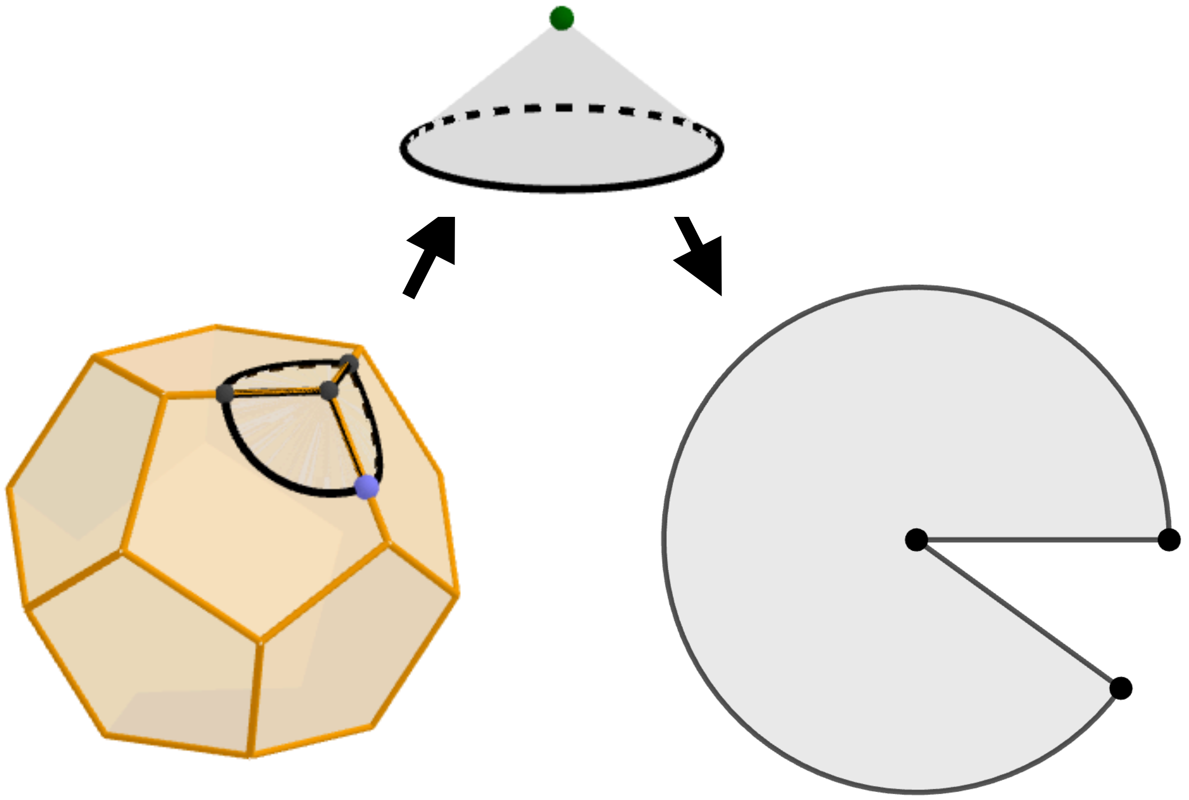
必要性の証明 - 方針 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

- 頂点を切り出して扇形を作る.



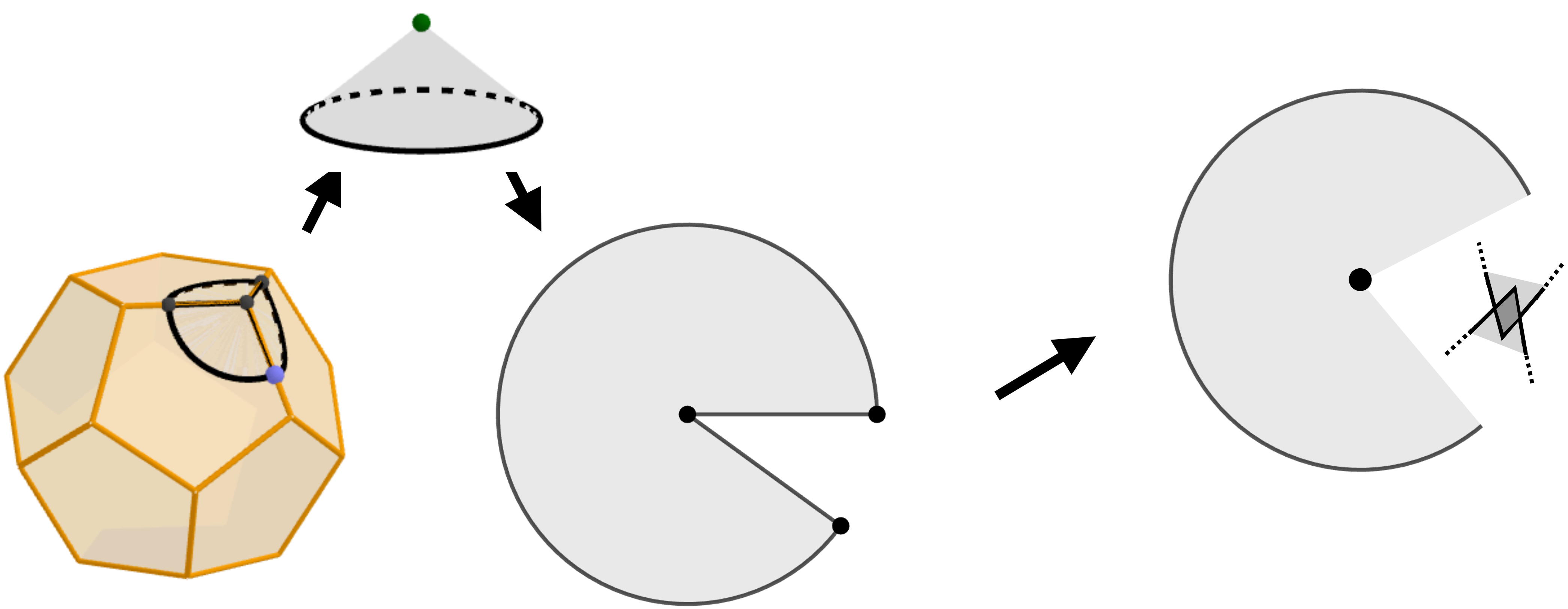
必要性の証明 - 方針 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

- 頂点を切り出して扇形を作る.
- 重なりを持つ様に"編集"する.



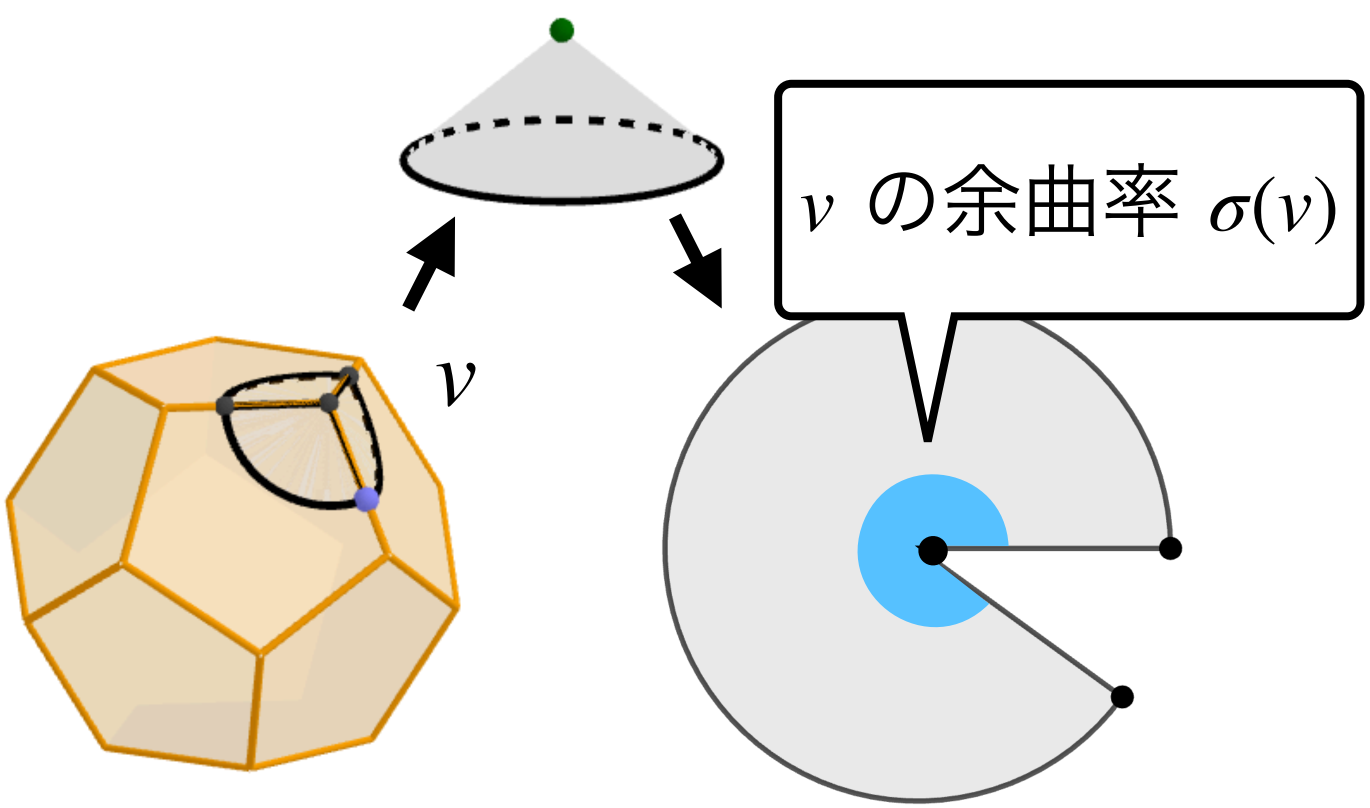
必要性の証明 - 方針 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

- 頂点を切り出して扇形を作る.
- 重なりを持つ様に"編集"する.



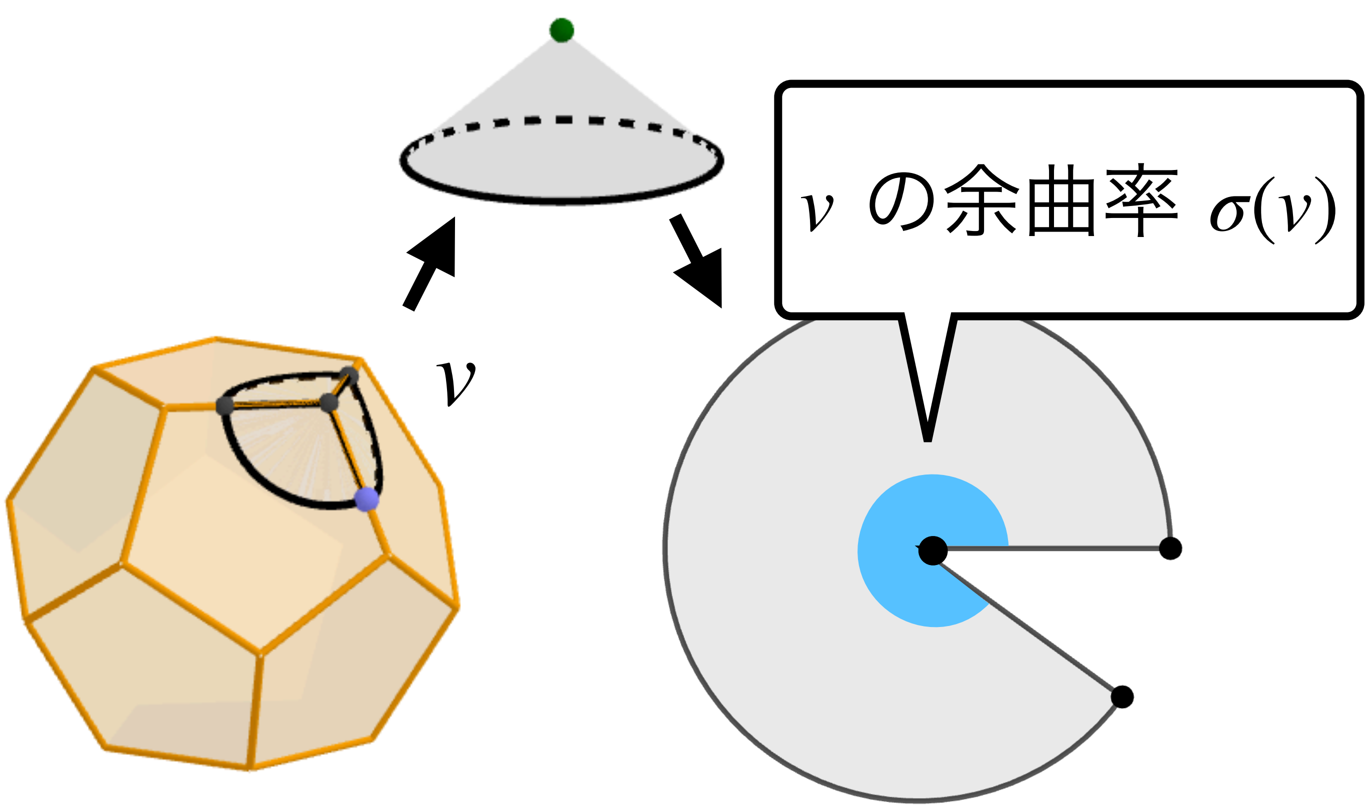
必要性の証明 - 方針 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

- 頂点を切り出して扇形を作る.
- 重なりを持つ様に"編集"する.



補題 (Descarte の定理)

多面体 Q の頂点数 n に対して,

$$\sum_{v \in V(Q)} \sigma(v) = 2(n-2)\pi$$

必要性の証明 - 方針 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

n : Q の頂点数

$n = 3$

$n = 4$

$n > 4$

全ての凸多面体

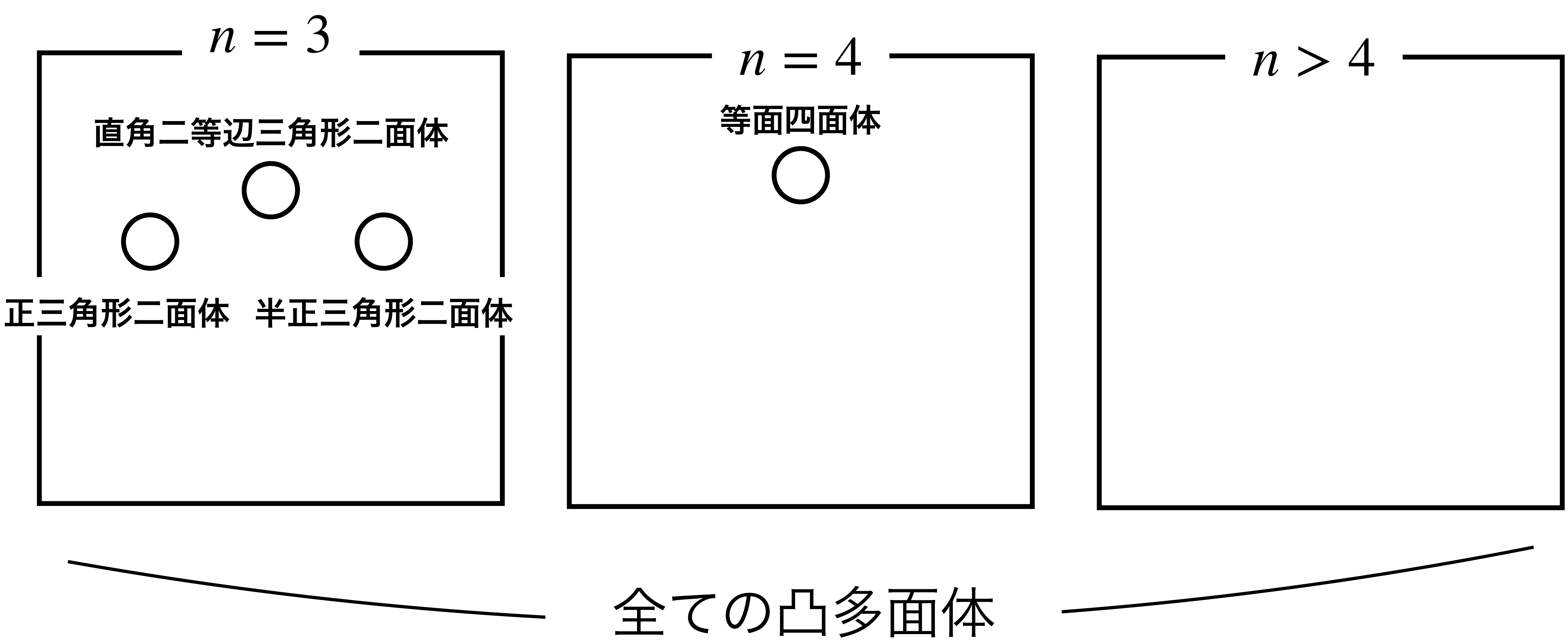
必要性の証明 - 方針 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

n : Q の頂点数



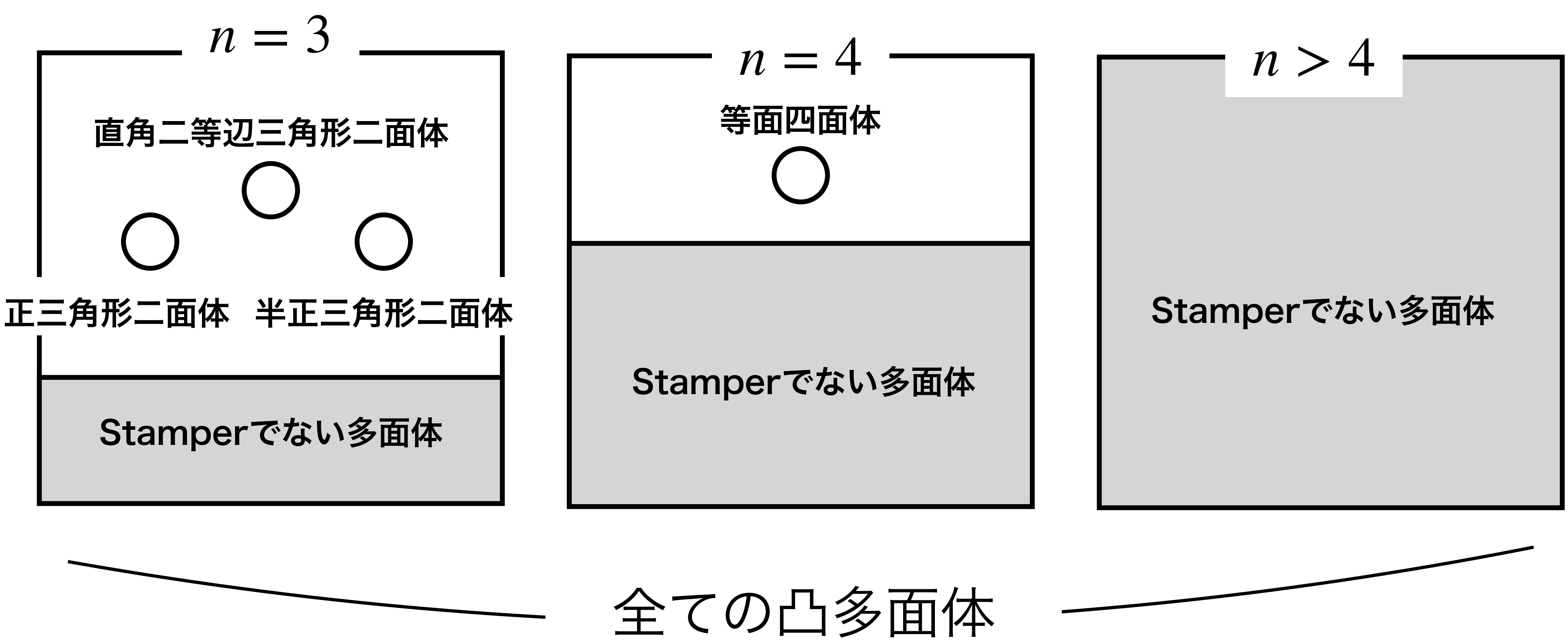
必要性の証明 - 方針 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

n : Q の頂点数



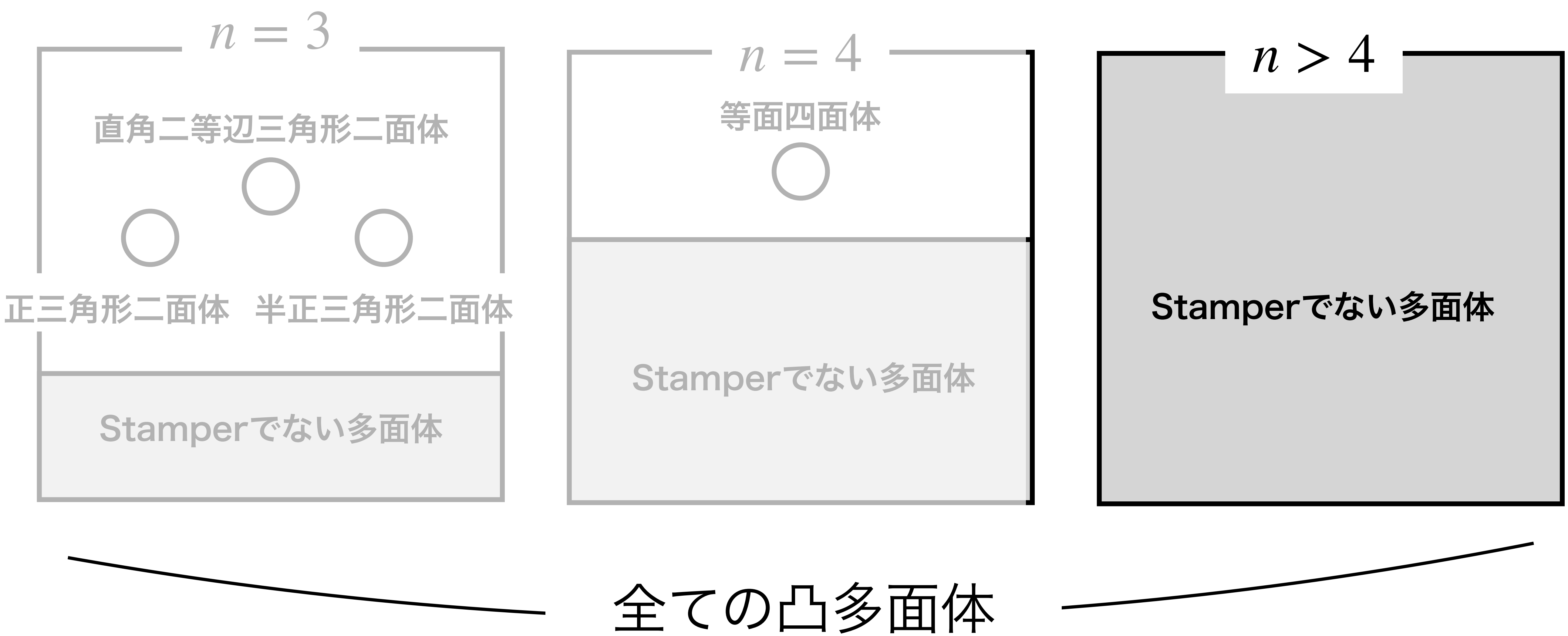
必要性の証明 - 方針 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

n : Q の頂点数



必要性の証明 - 証明 -

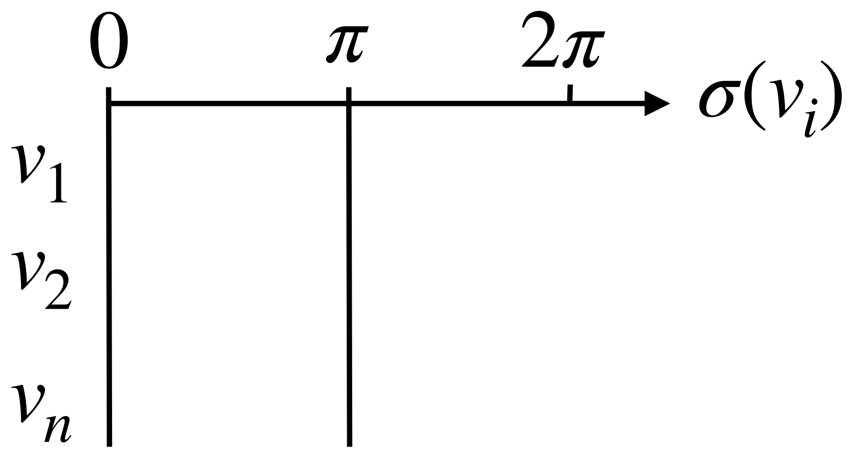
補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] Q の頂点数 n が $n > 4$ の場合:

Q の頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする

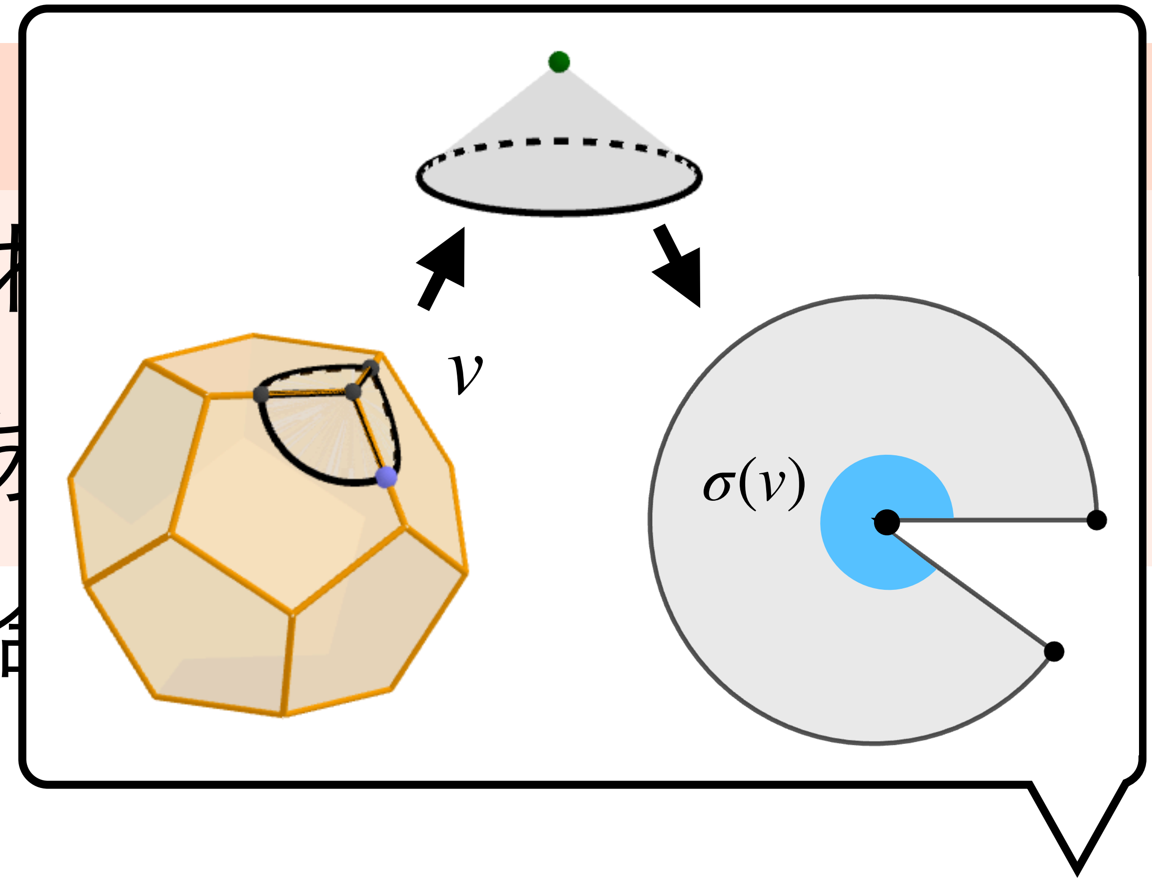


必要性の証明 - 証明 -

補題

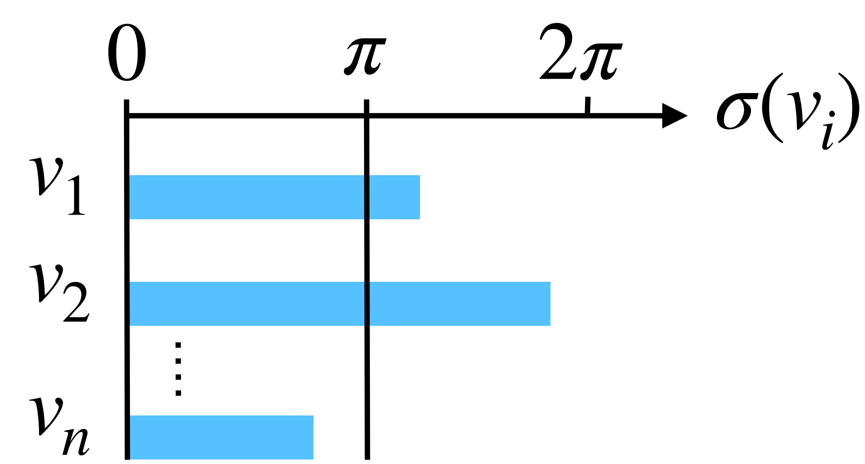
多面体 Q が Stamper でなけれ

重なりのあ



[証明]　Q の頂点数 n が $n > 4$ の場合

Q の頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする



必要性の証明 - 証明 -

補題

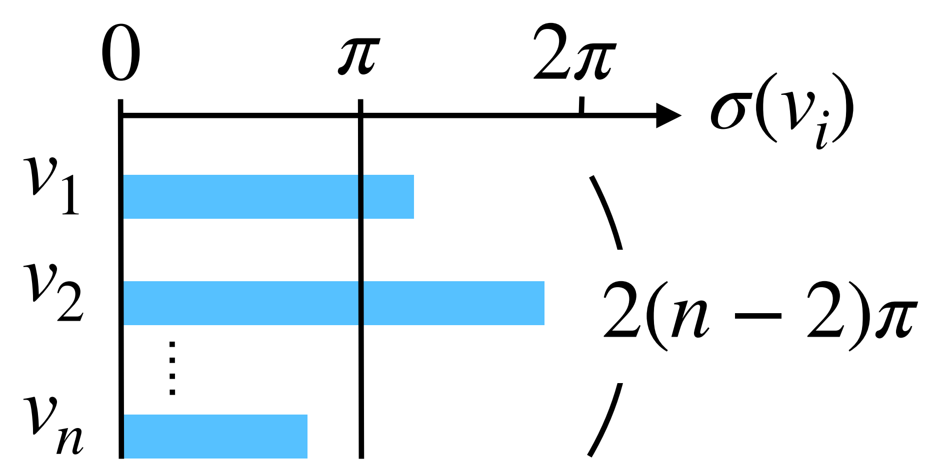
多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] Q の頂点数 n が $n > 4$ の場合:

Q の頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする

⇒ Descarte の定理より, $\displaystyle\sum_{v \in V(Q)} \sigma(v) = 2(n-2)\pi$



必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

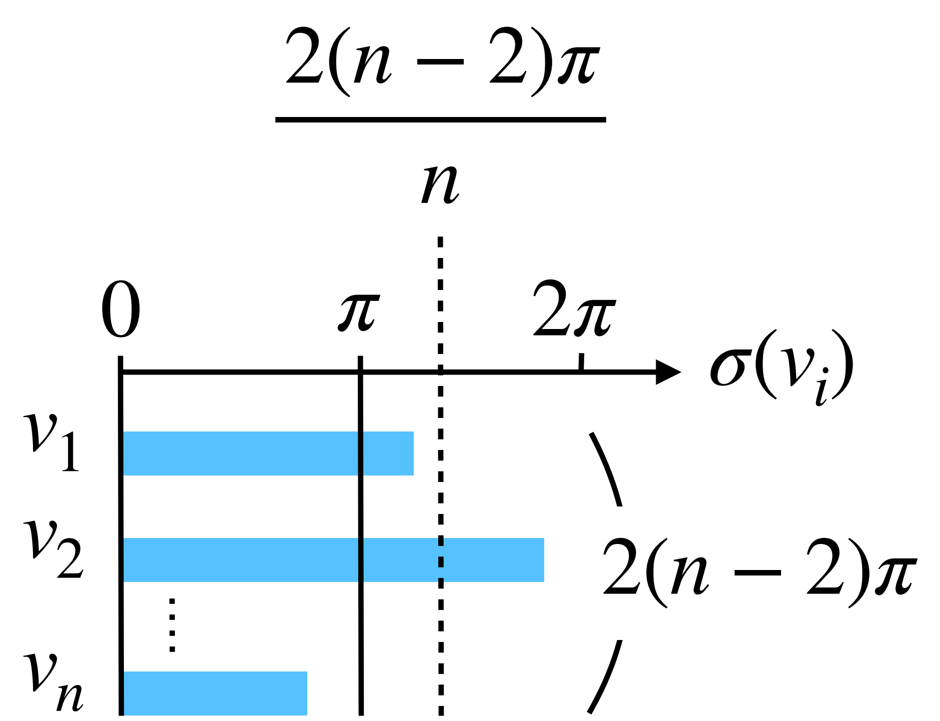
重なりのある展開図をもつ.

[証明] Q の頂点数 n が $n > 4$ の場合:

Q の頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする

⇒ Descarte の定理より, $\displaystyle\sum_{v \in V(Q)} \sigma(v) = 2(n-2)\pi$

⇒ $\sigma(v_i)$ の平均値は $\dfrac{2(n-2)\pi}{n} > \pi$



必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

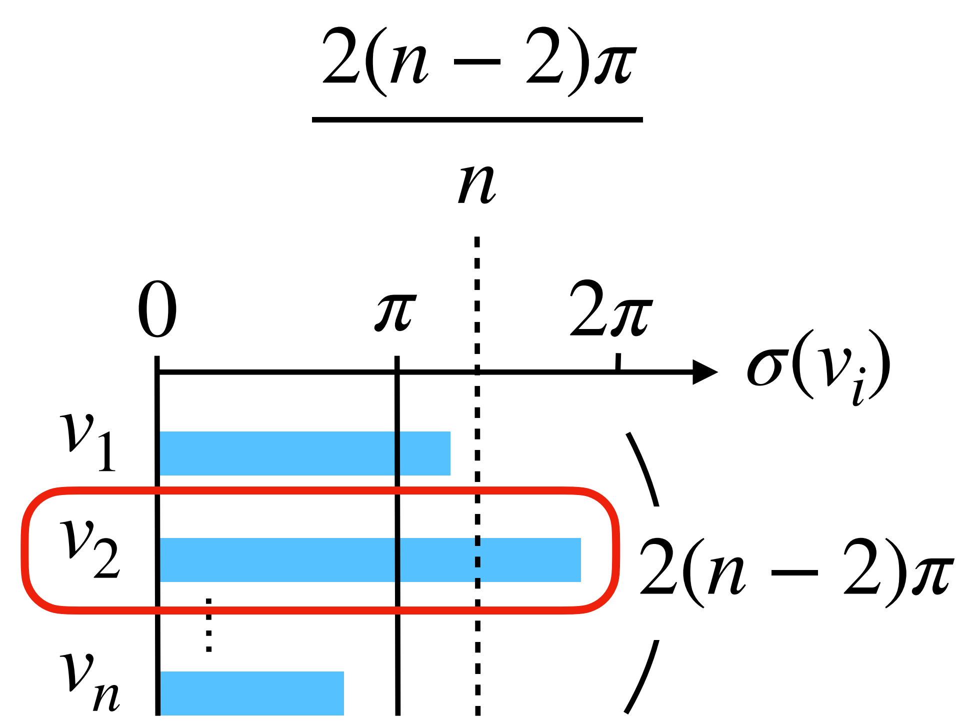
[証明]　Q の頂点数 n が $n > 4$ の場合:

Q の頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_n$ とする

$\Rightarrow$ Descarte の定理より, $\sum_{v \in V(Q)} \sigma(v) = 2(n-2)\pi$

$\Rightarrow$ $\sigma(v_i)$ の平均値は $\dfrac{2(n-2)\pi}{n} > \pi$

$\Rightarrow$ $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が一つ以上存在する



[続く]

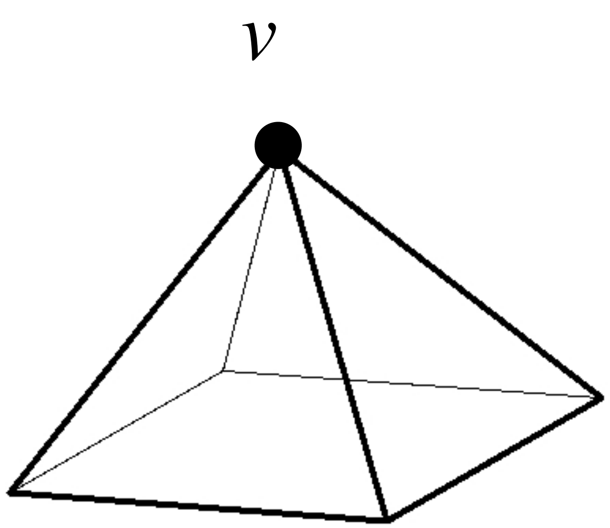
必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.



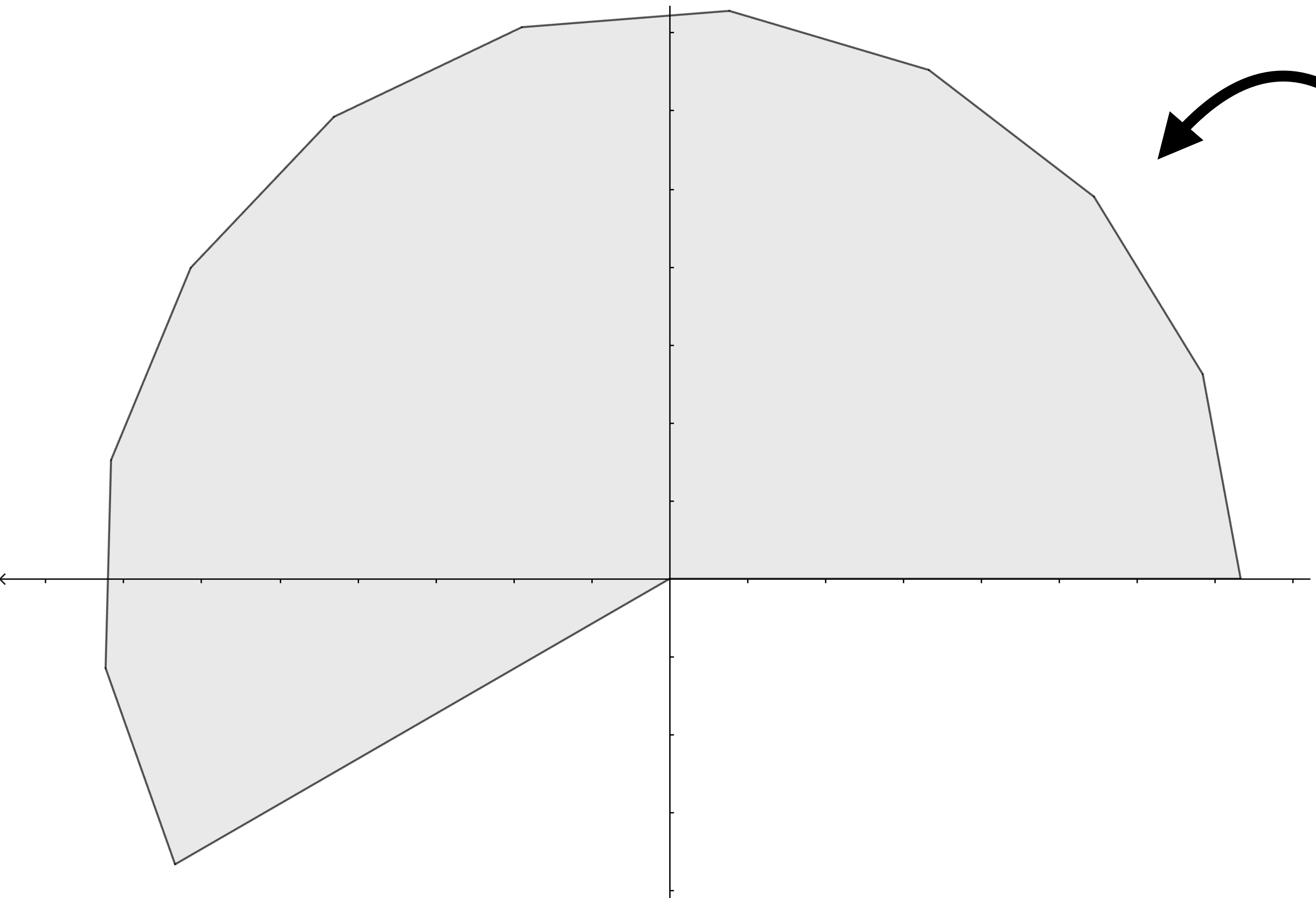
必要性の証明 - 証明 -

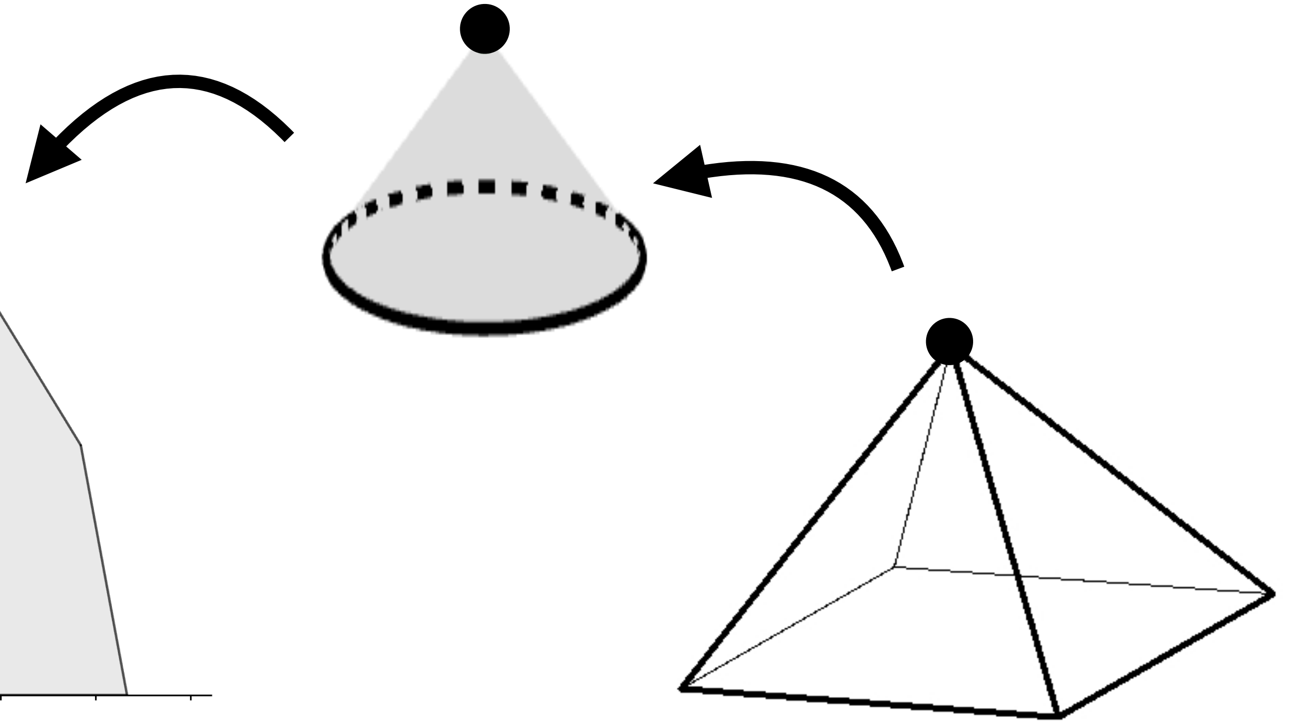
補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.





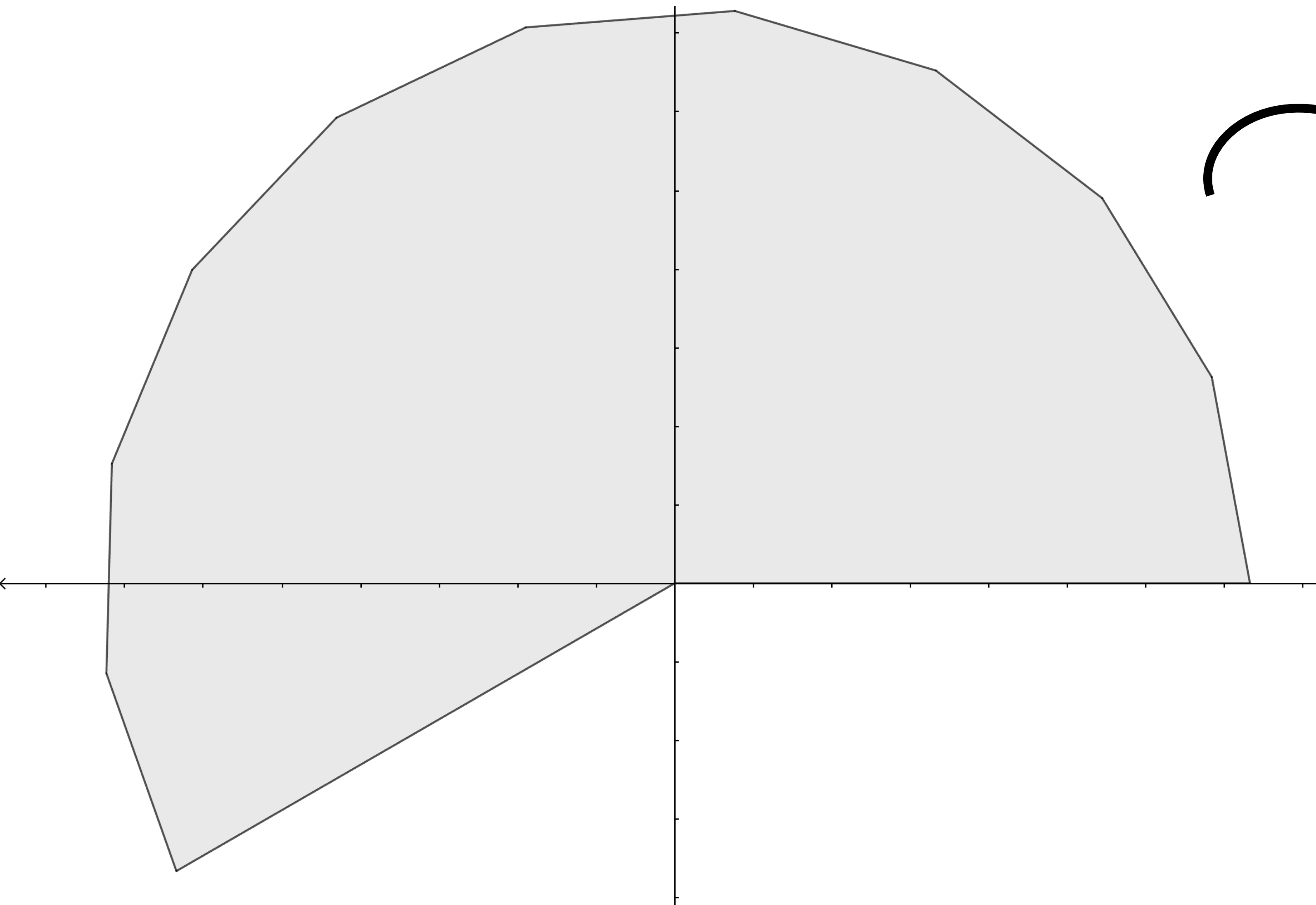
必要性の証明 - 証明 -

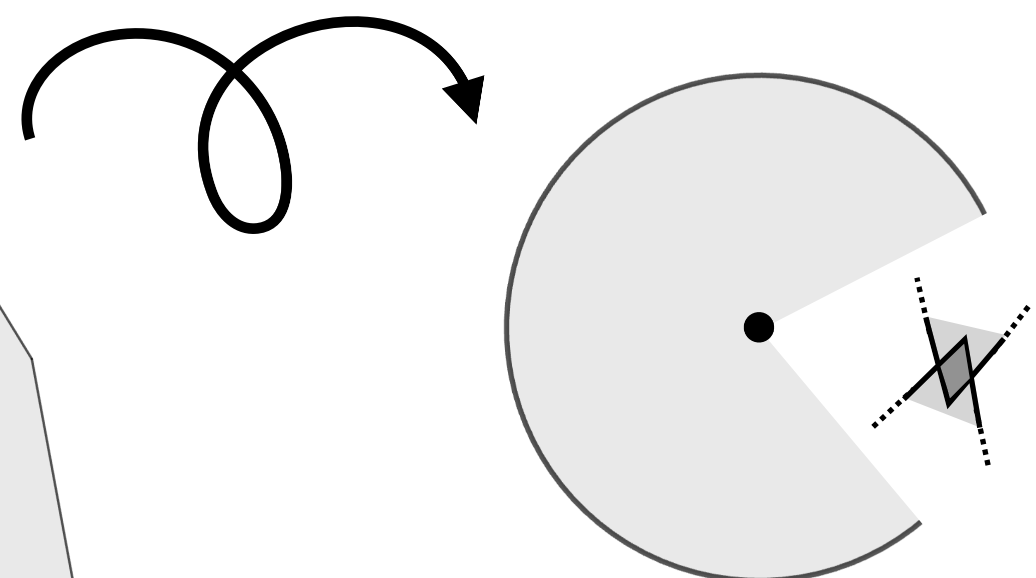
補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.





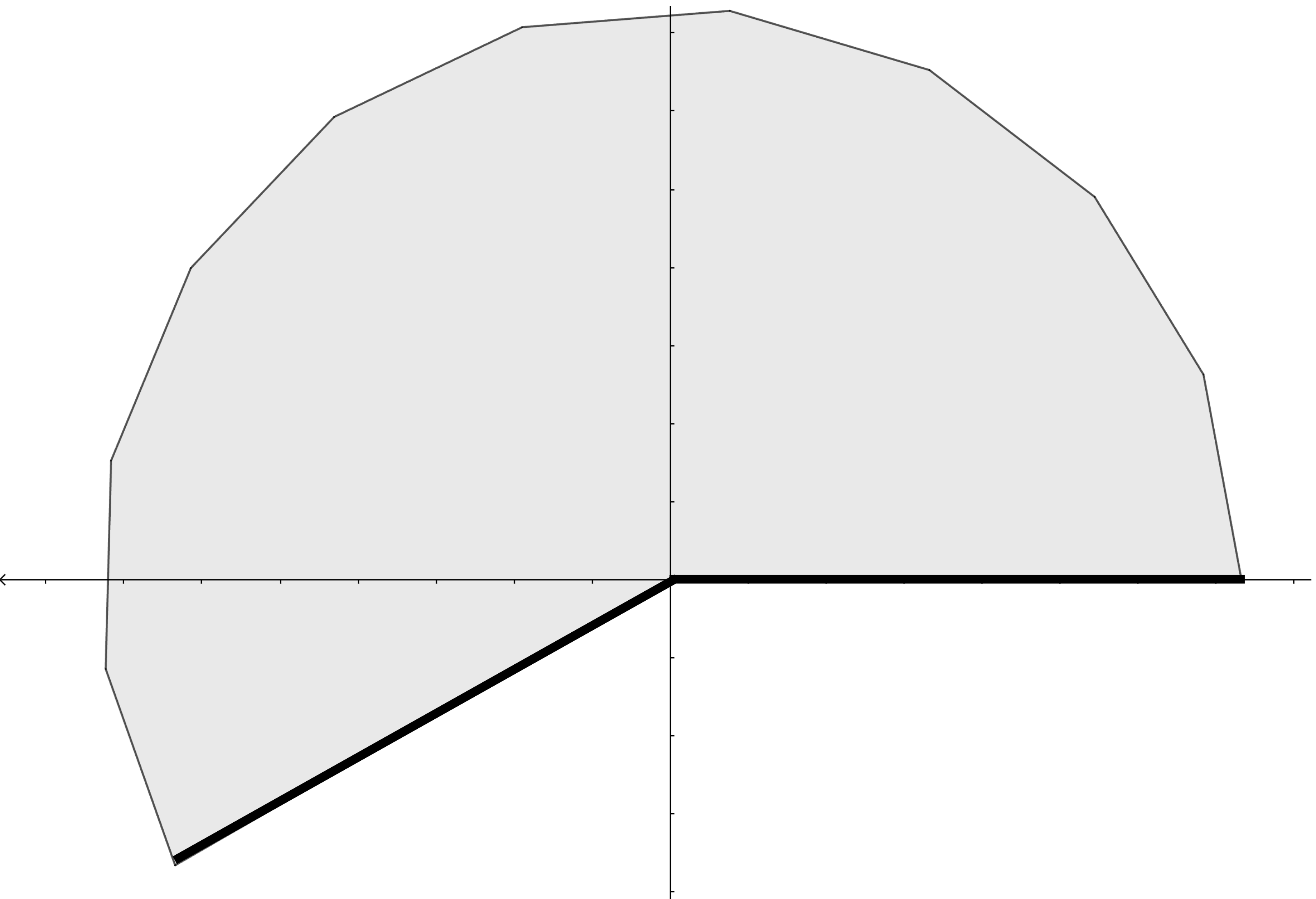
必要性の証明 - 証明 -

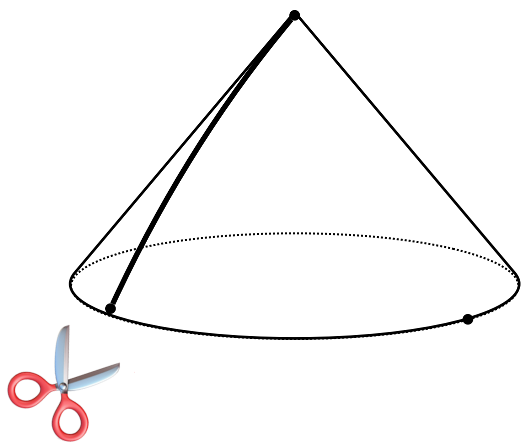
補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.





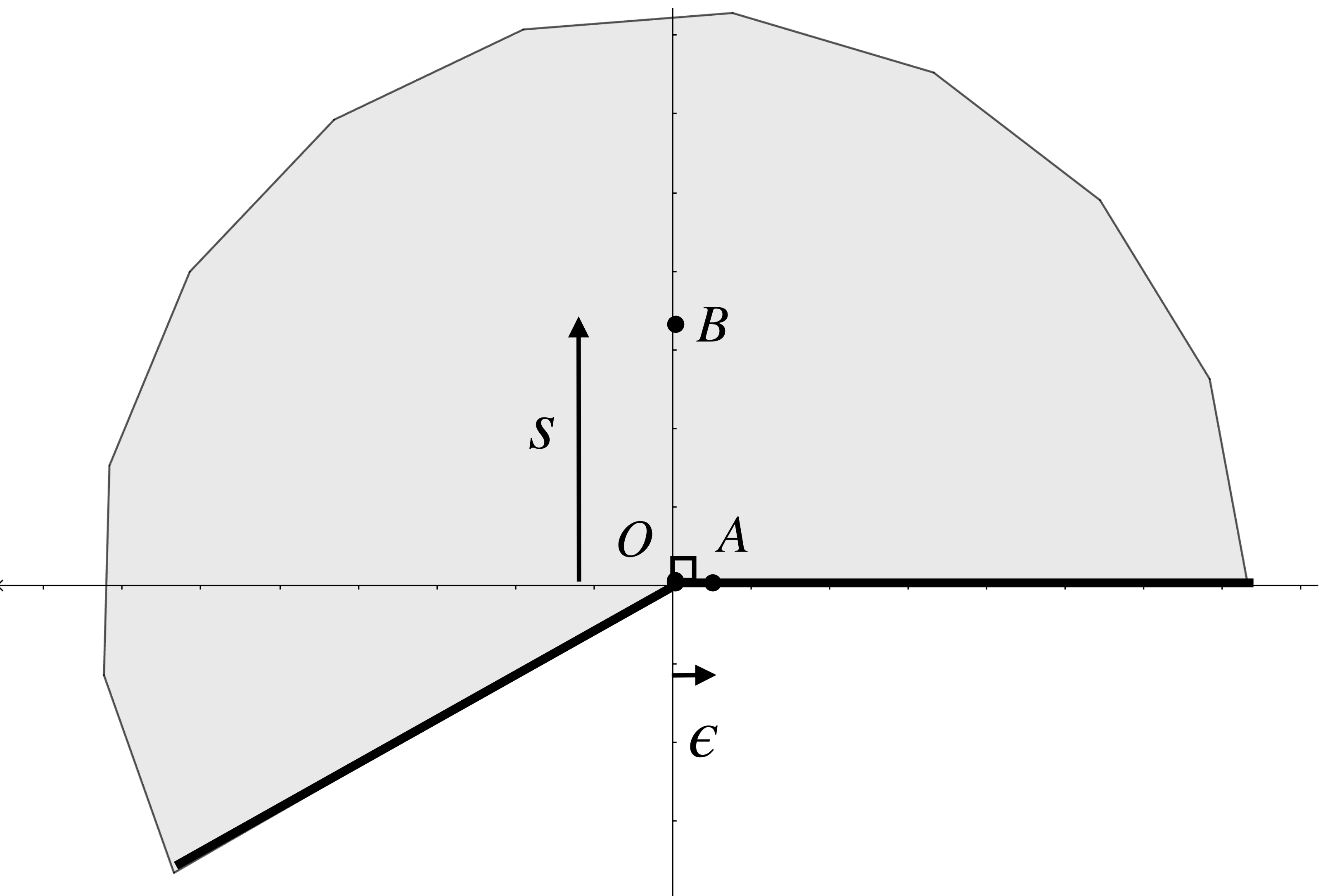
必要性の証明 - 証明 -

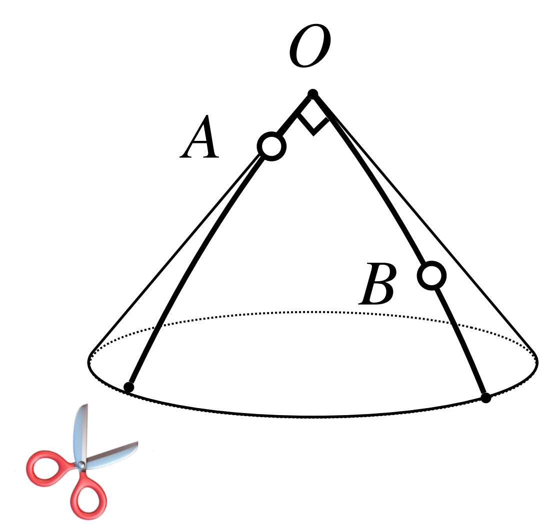
補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.





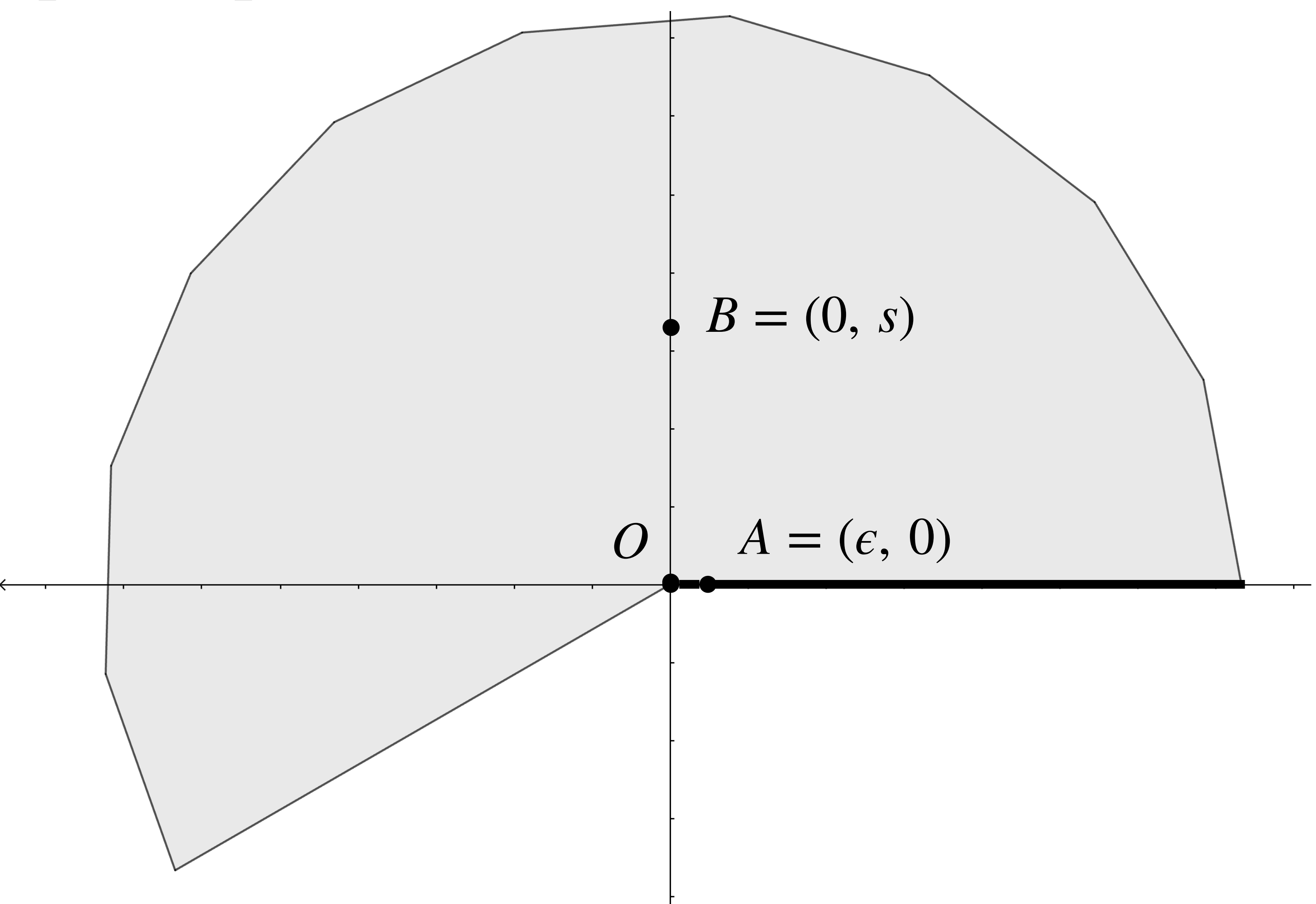
必要性の証明 - 証明 -

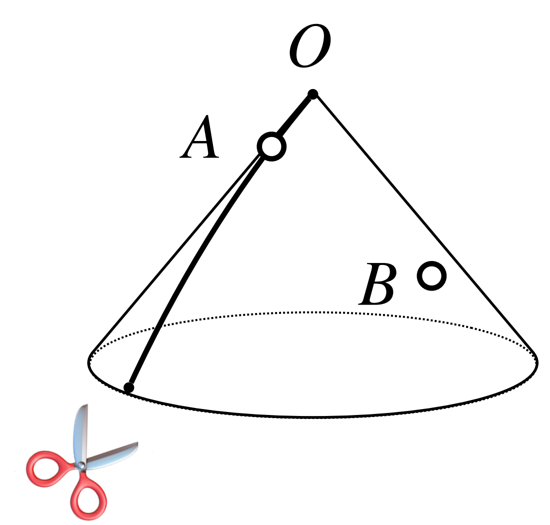
補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.





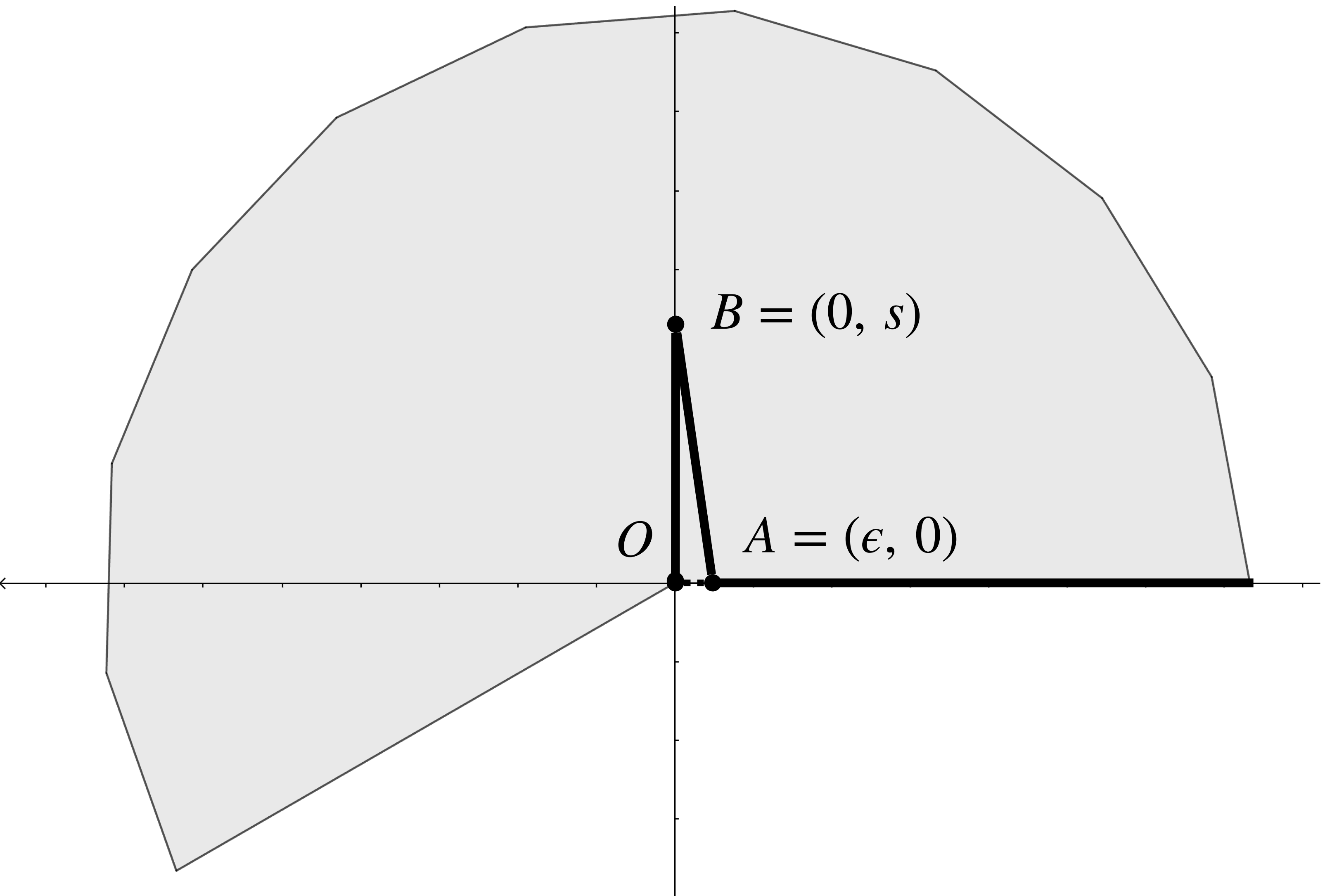
必要性の証明 - 証明 -

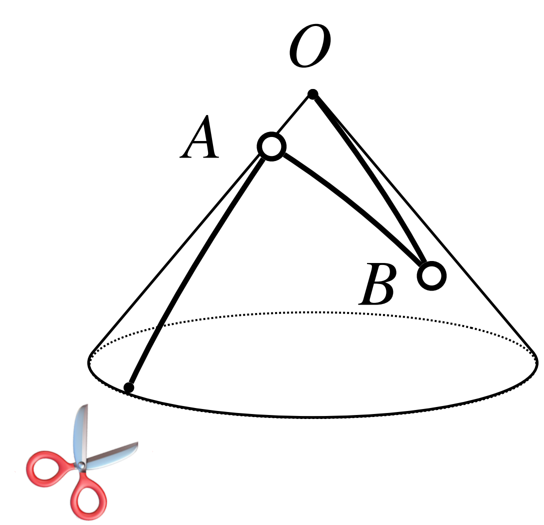
補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.





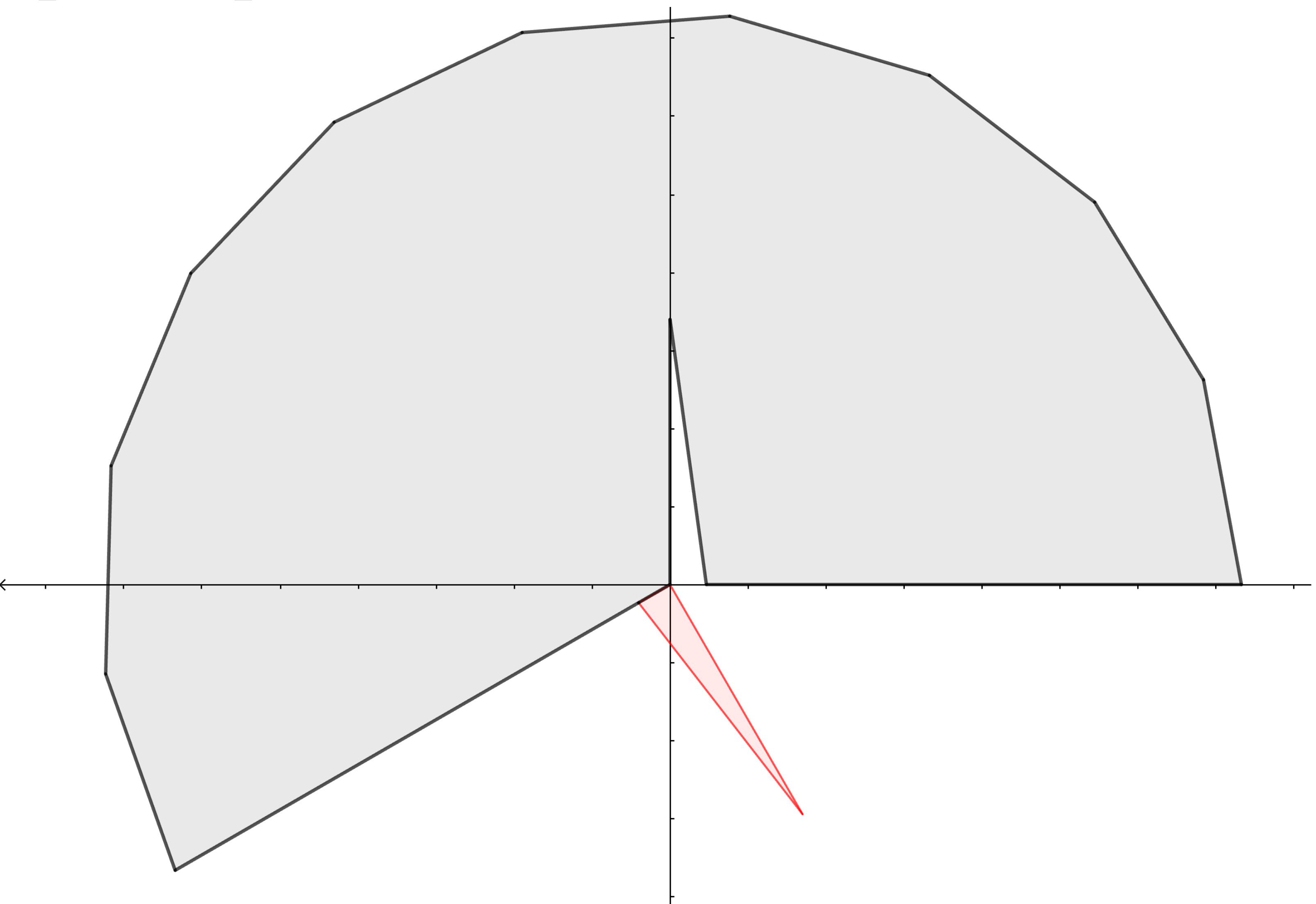
必要性の証明 - 証明 -

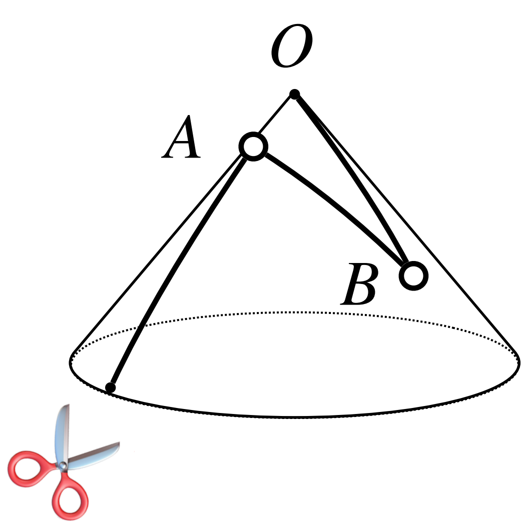
補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合，$\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.





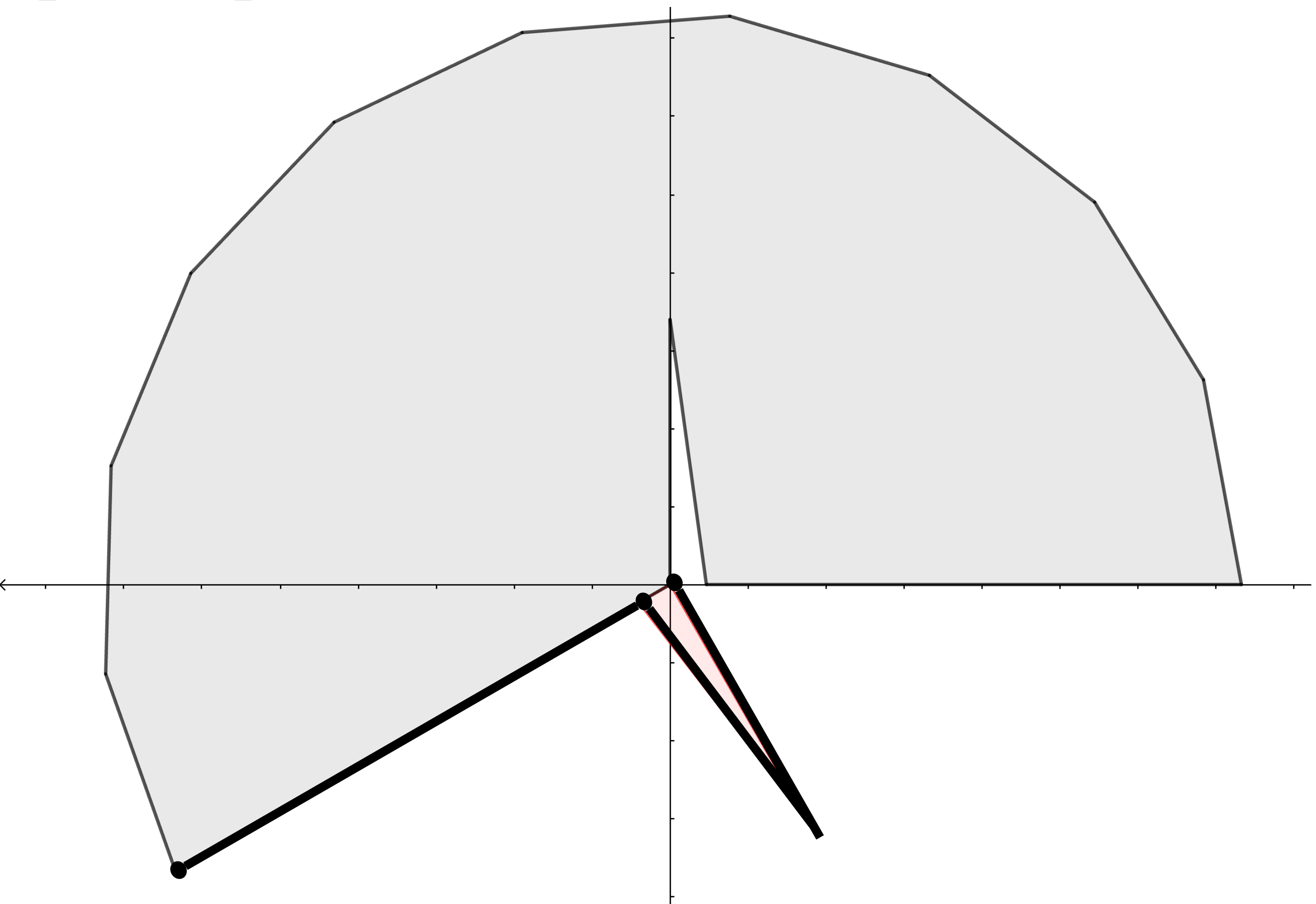
必要性の証明 - 証明 -

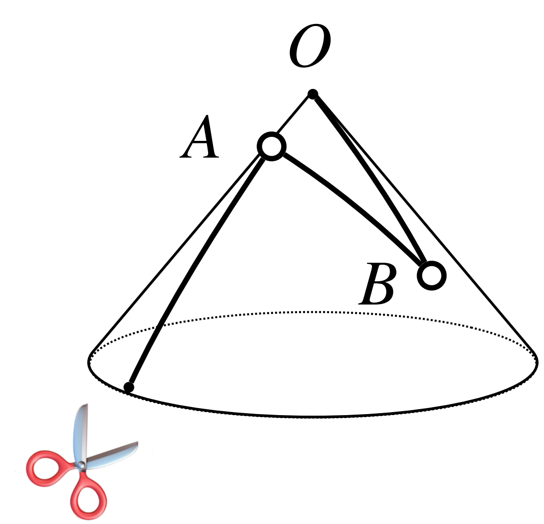
補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.





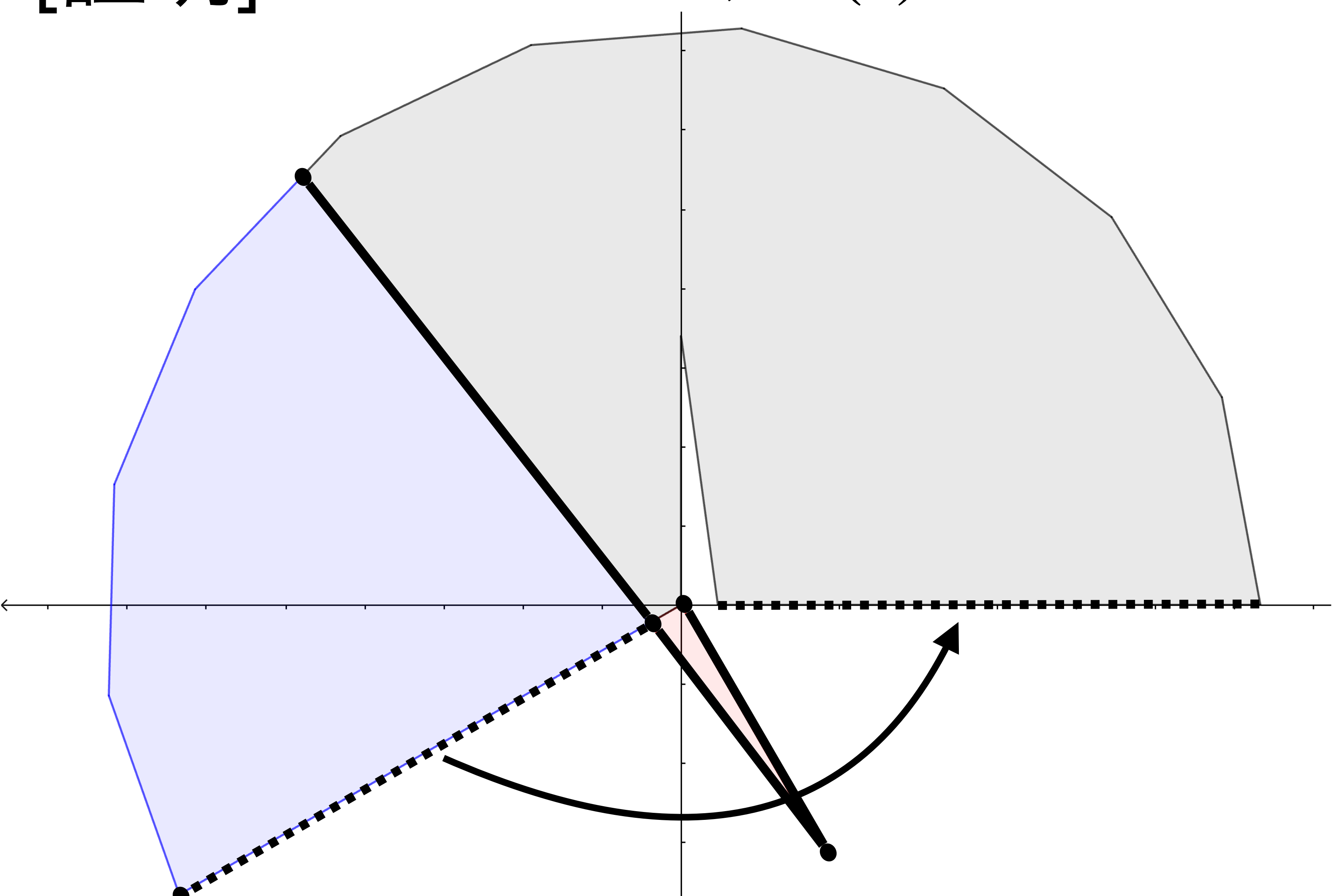
必要性の証明 - 証明 -

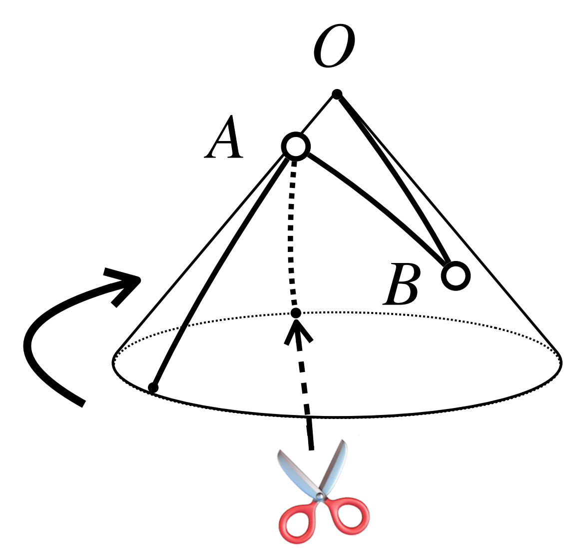
補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.





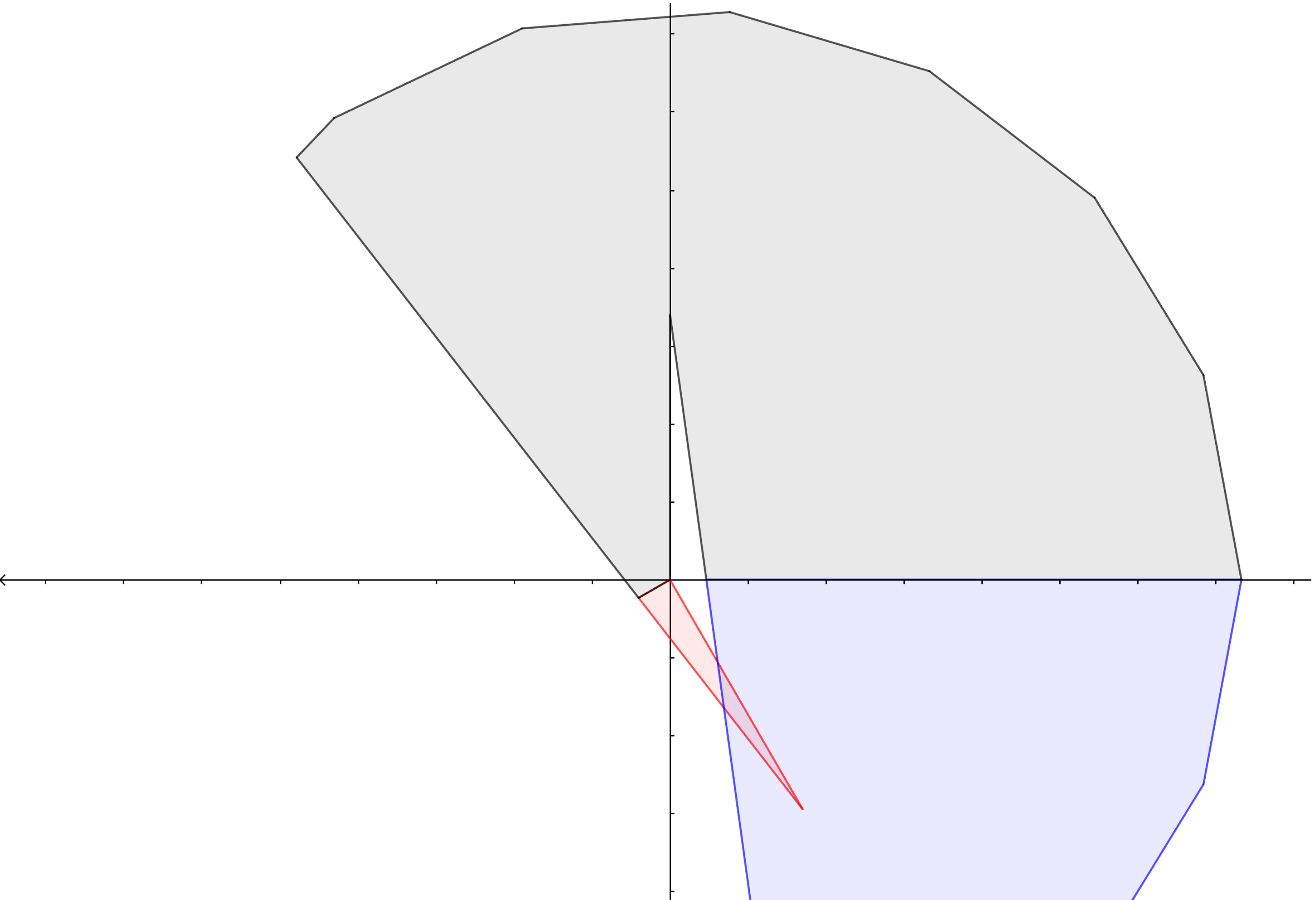
必要性の証明 - 証明 -

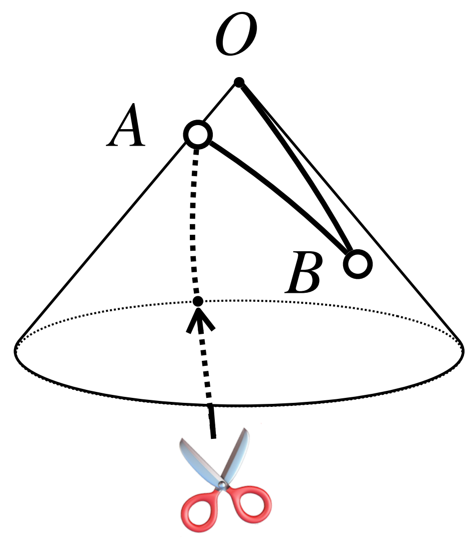
補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.





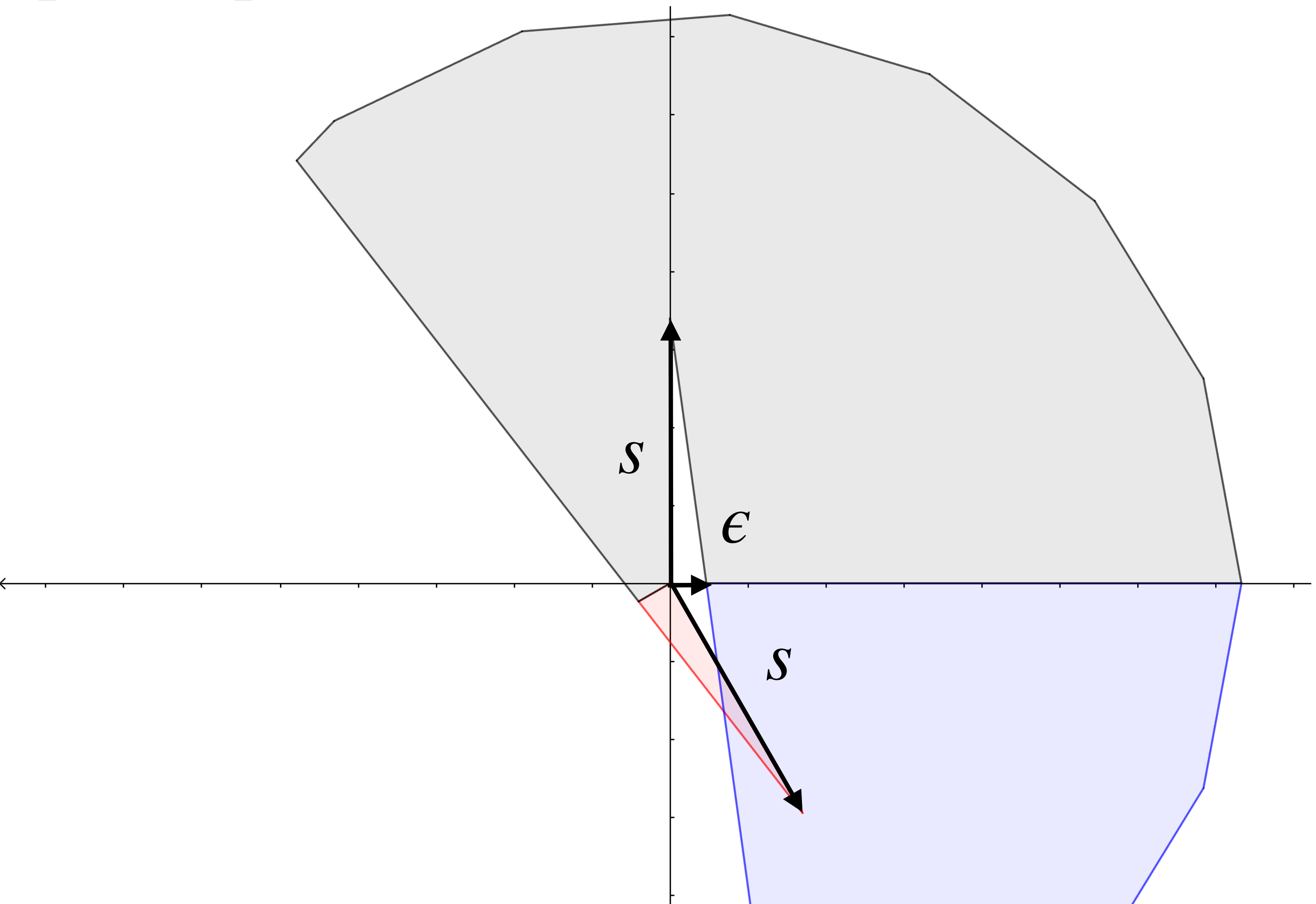
必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.



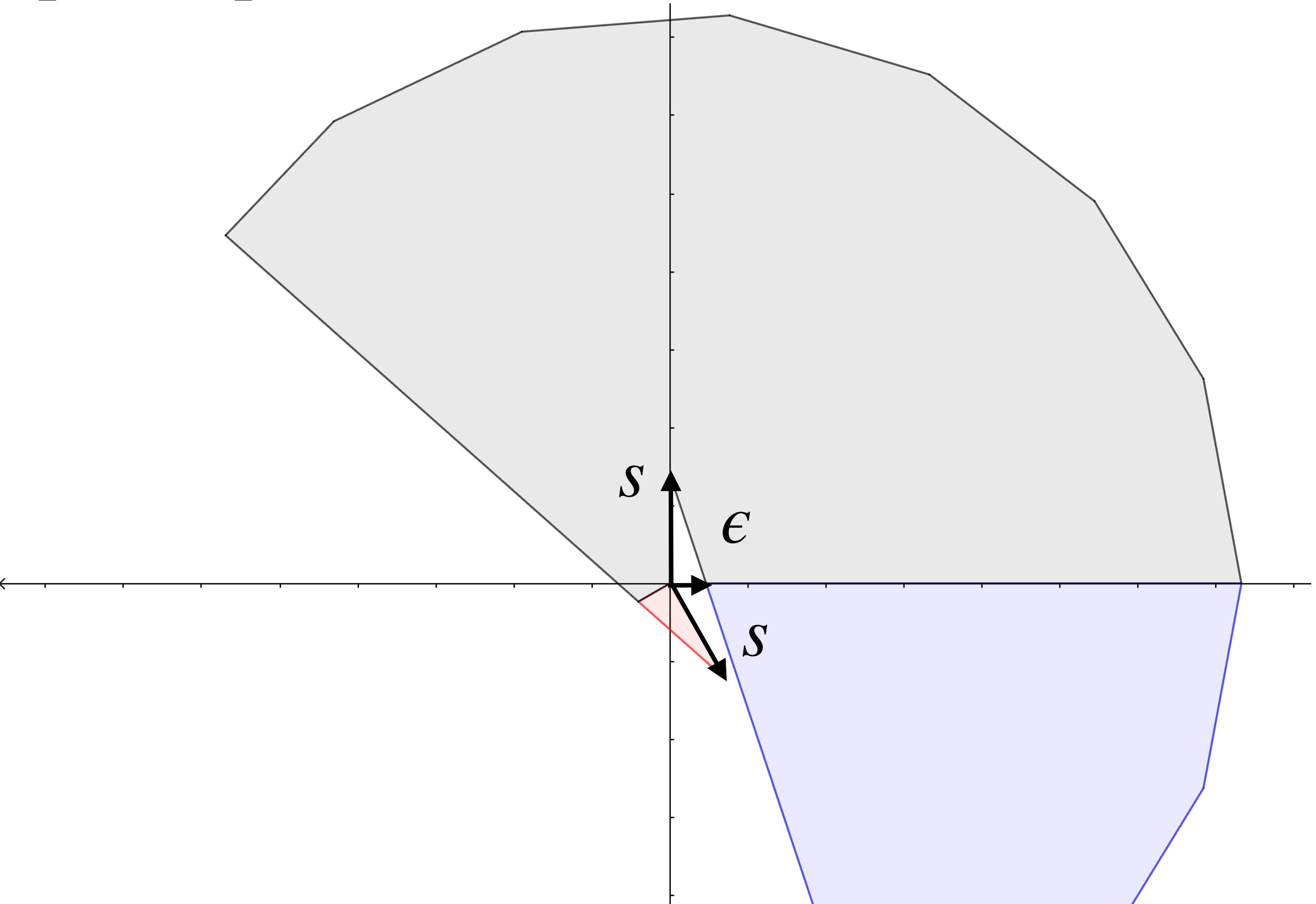
必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.



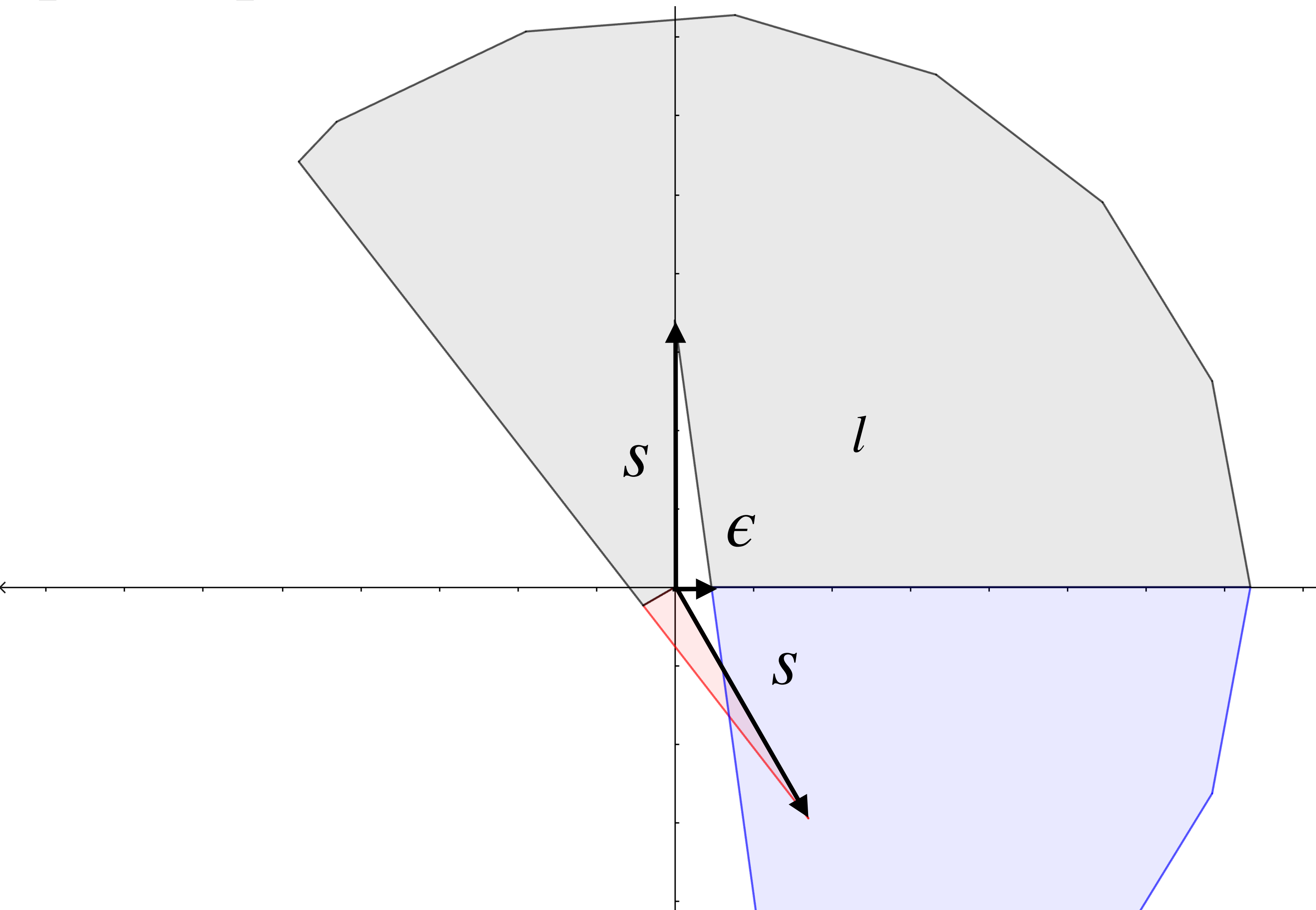
必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.



重なりが生じるための条件：

$$s > \epsilon \cdot \frac{\sin\left(\sigma(v) + \frac{\pi}{2}\right) + 1}{\cos\left(\sigma(v) + \frac{\pi}{2}\right)}$$

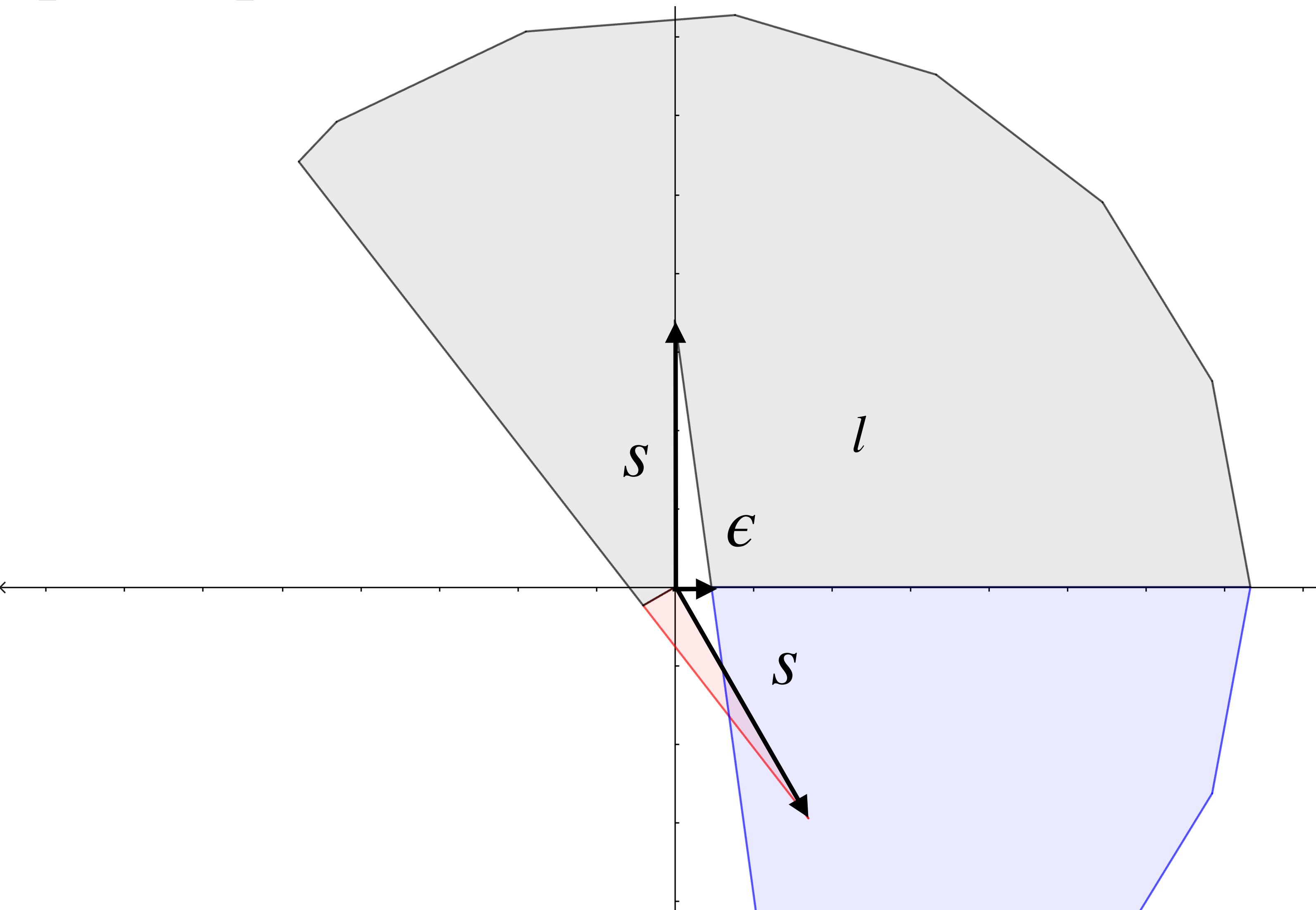
必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n > 4$ の場合, $\sigma(v) > \pi$ を満たす v が存在する.



重なりが生じるための条件：

$$s > \epsilon \cdot \frac{\sin\left(\sigma(v) + \frac{\pi}{2}\right) + 1}{\cos\left(\sigma(v) + \frac{\pi}{2}\right)}$$

s を固定して $\epsilon \to 0$

とすれば OK

□

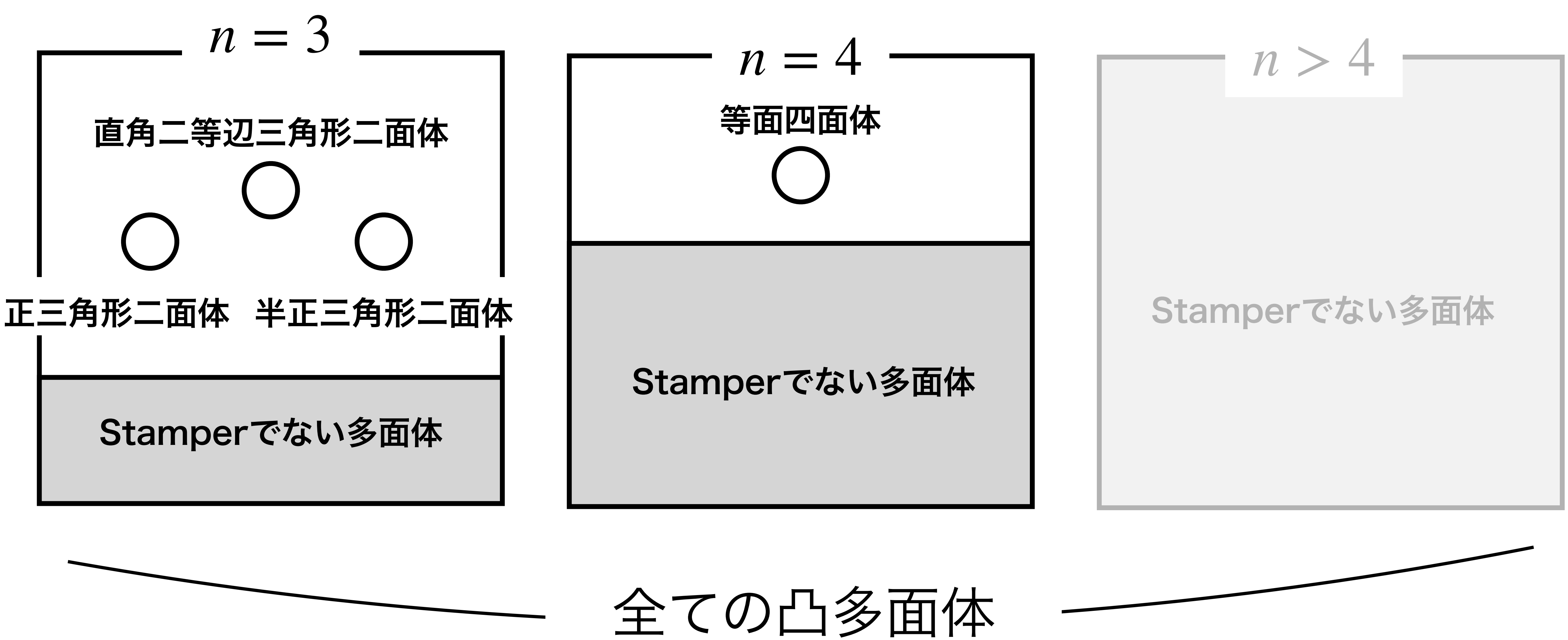
必要性の証明 - 方針 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

n : Q の頂点数



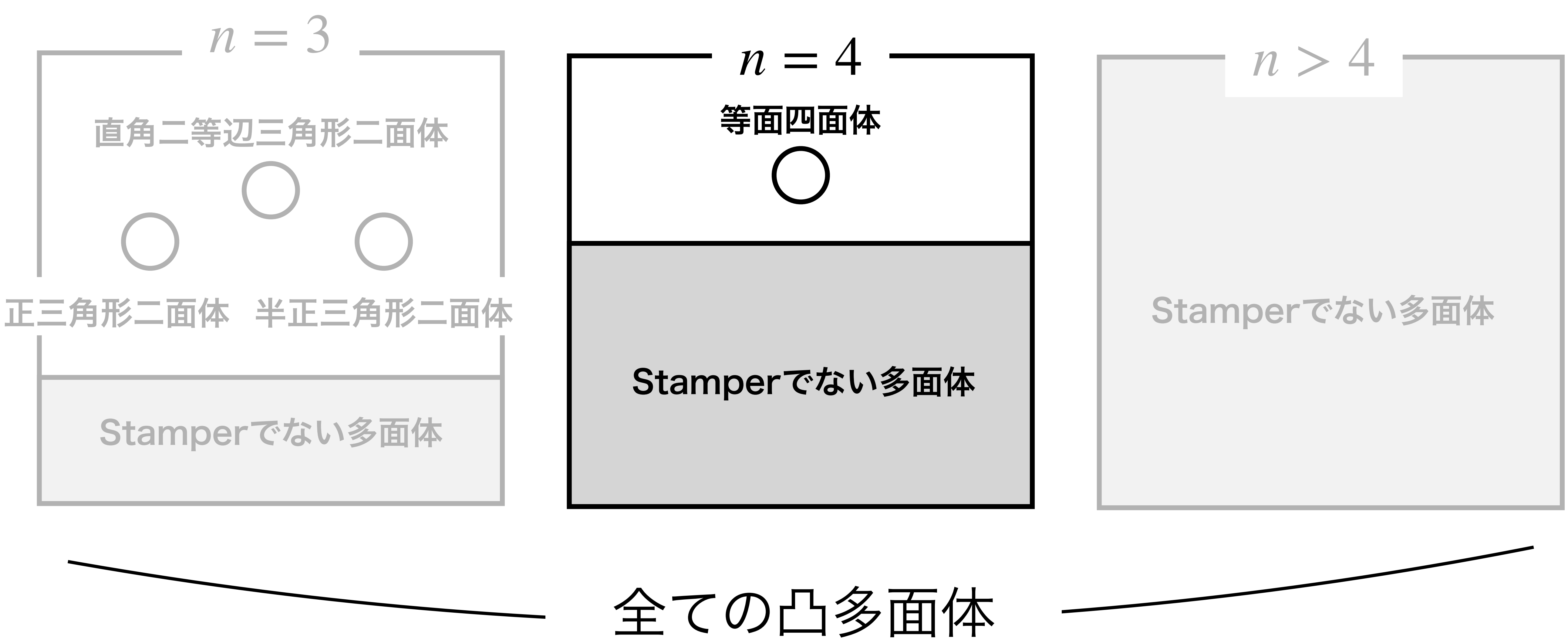
必要性の証明 - 方針 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

n : Q の頂点数



必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n=4$ の場合:

$n=4$

等面四面体

○

Stamperでない多面体

Descarte の定理より,

$\sigma(v_1)+\sigma(v_2)+\sigma(v_3)+\sigma(v_4)=4\pi$

$\sigma(v_i)$ の平均値は π

一つ以上の v_i が

$\pi<\sigma(v_i)$

全ての v_i が

$\sigma(v_i)=\pi$

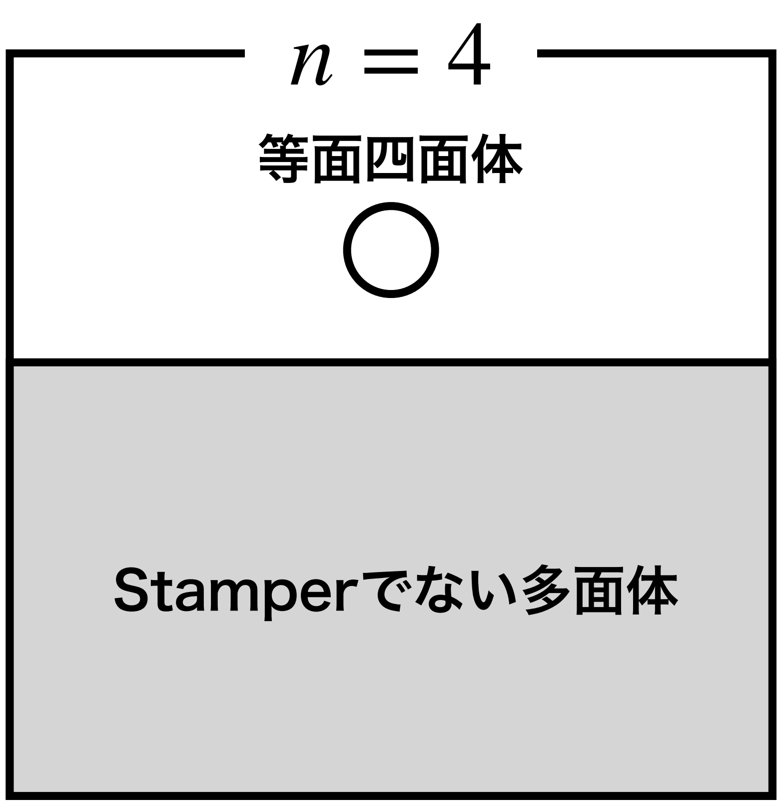
必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n = 4$ の場合:



Descarte の定理より,
$\sigma(v_1) + \sigma(v_2) + \sigma(v_3) + \sigma(v_4) = 4\pi$

$\sigma(v_i)$ の平均値は π

一つ以上の v_i が
$\pi < \sigma(v_i)$

全ての v_i が
$\sigma(v_i) = \pi$

Q は 等面四面体

必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n = 4$ の場合:

$n = 4$

等面四面体

○

Stamperでない多面体

Descarte の定理より,

$\sigma(v_1) + \sigma(v_2) + \sigma(v_3) + \sigma(v_4) = 4\pi$

$\sigma(v_i)$ の平均値は π

一つ以上の v_i が

$\pi < \sigma(v_i)$

$n > 4$ の場合に帰着

全ての v_i が

$\sigma(v_i) = \pi$

Q は 等面四面体

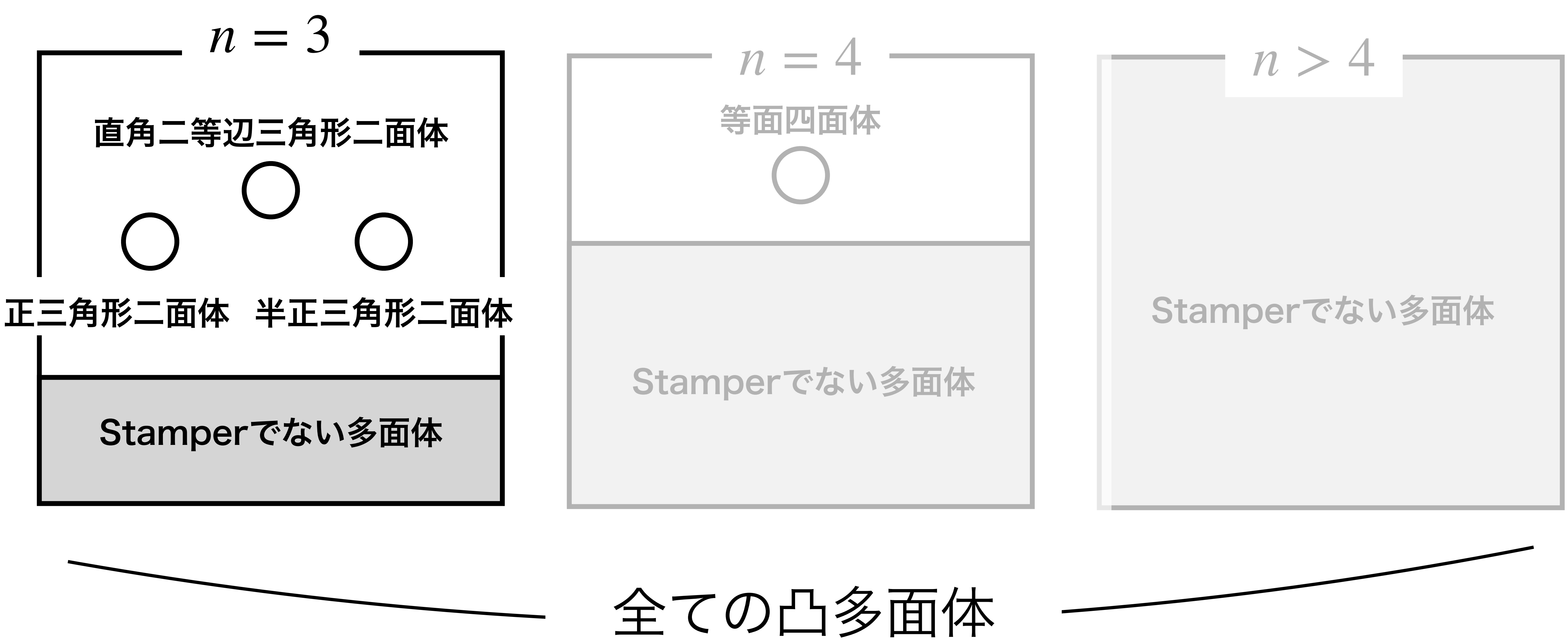
□

必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.



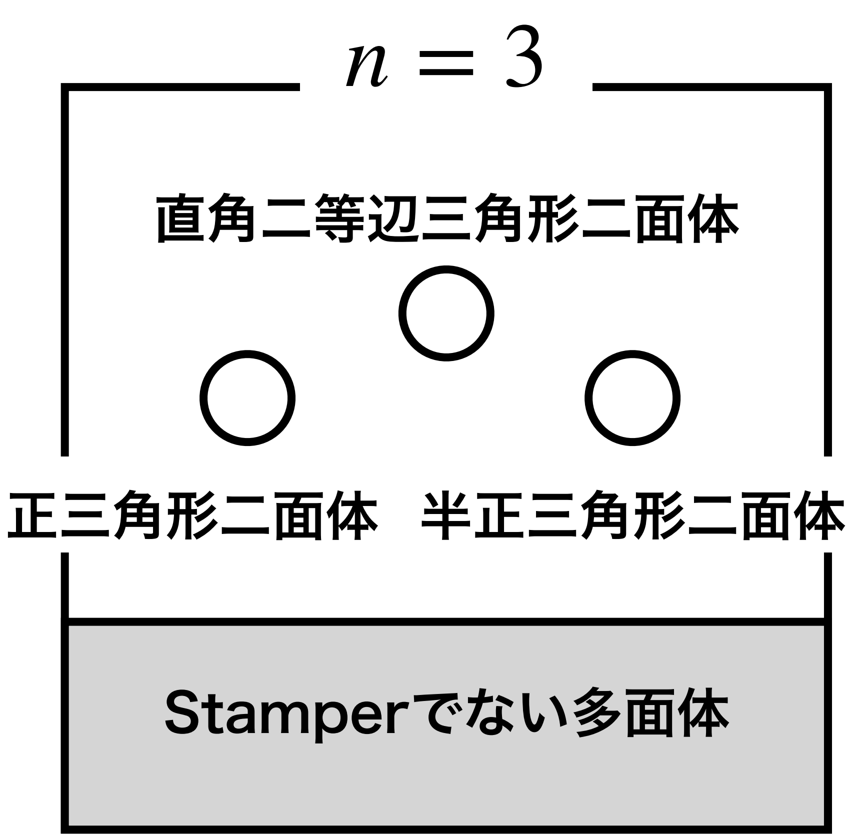
必要性の証明 - 証明 -

補題

多面体 Q が Stamper でなければ,

重なりのある展開図をもつ.

[証明] $n=3$ の場合:



Descarte の定理より,
$\sigma(v_1)+\sigma(v_2)+\sigma(v_3)=2\pi$

→ Stamper

一つ以上の v_i が $\dfrac{\pi}{2} < \sigma(v) < \dfrac{2\pi}{3}$

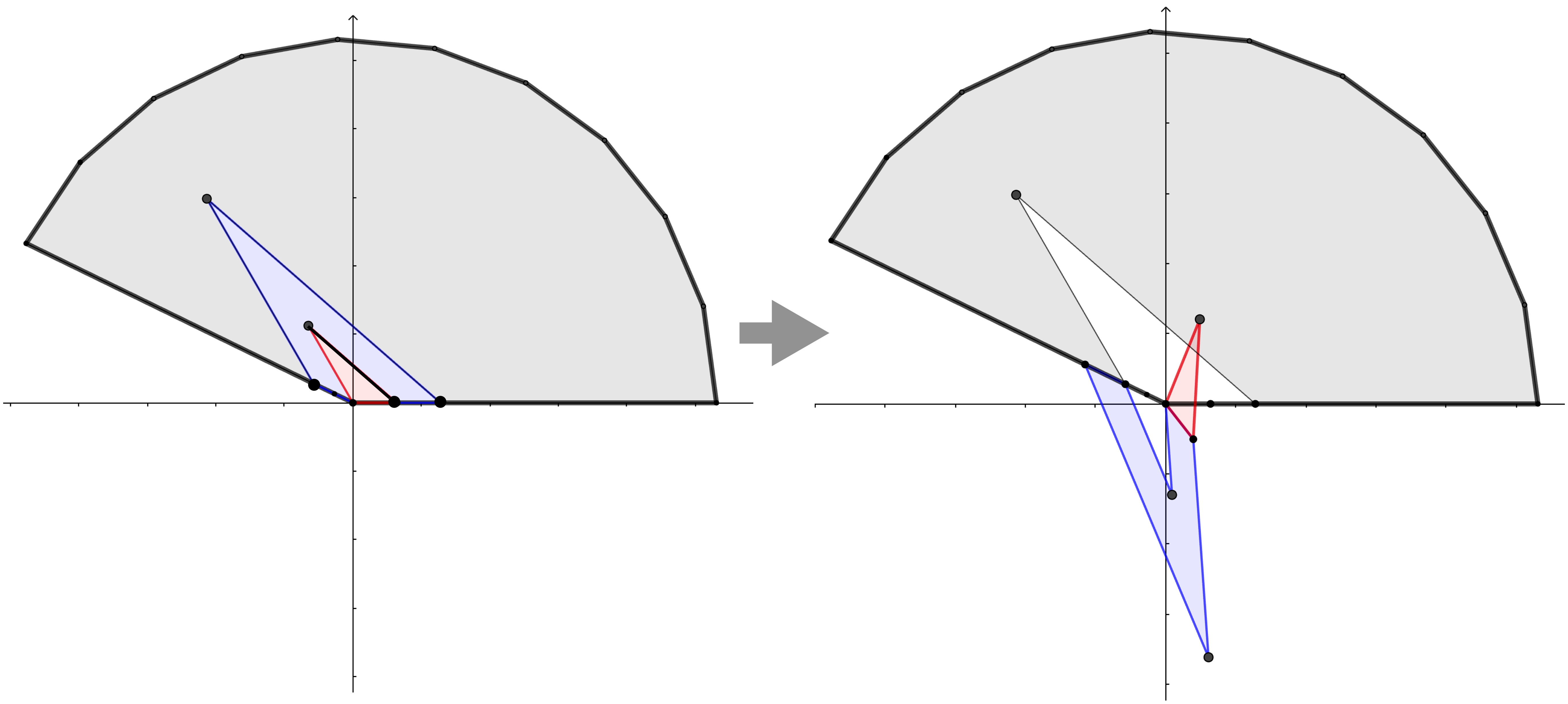
一つ以上の v_i が $\dfrac{2\pi}{3} < \sigma(v) < \pi$

一つ以上の v_i が $\pi < \sigma(v_i)$

$n>4$ の場合に帰着

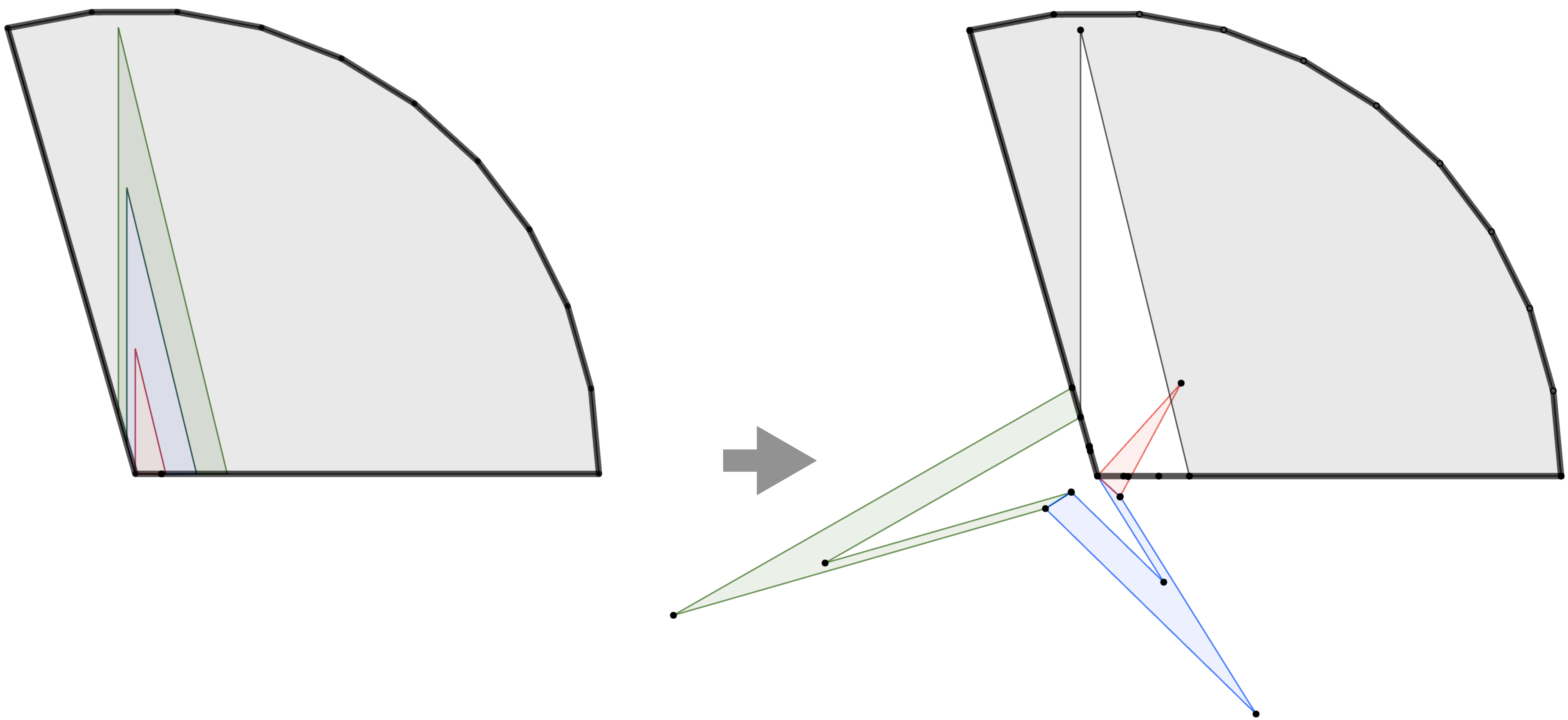
必要性の証明 - 証明 -

$\frac{2\pi}{3} < \sigma(v) < \pi$ を満たす v_i が存在する場合：



必要性の証明 - 証明 -

$\dfrac{\pi}{2} < \sigma(v) < \dfrac{2\pi}{3}$ を満たす v_i が存在する場合：



□

まとめと今後の課題

定理

任意の凸多面体 Q に対して,

$$Q \text{ が Overlap-free} \Leftrightarrow Q \text{ が Stamper}$$

まとめと今後の課題

定理

任意の凸多面体 Q に対して,

$$Q \text{ が Overlap-free} \Leftrightarrow Q \text{ が Stamper}$$

[今後の課題]

「Overlap-free」を拡張することで,

“任意の**辺展開図**が重なりを持たない”

(= Edge-overlap-free)

という概念を考えることができる.

➡ どのような多面体が Edge-overlap-free か？