

整面凸多面体の重なりを持たない辺展開図の数え上げ

塩田 拓海*

榎本 優大†

堀山 貴史†

斎藤 寿樹*

1 はじめに

多面体の辺展開図とは、多面体を辺に沿って切り開くことで得られる多角形のことである。辺展開図の起源は、Albrecht Dürer が著した “Underweysung der messung mit dem zirckel un richt scheyt” (1525) [5] の中に描かれたスケッチとされる [3]。多面体の辺展開図は、切り開き方によっては異なる 2 面が重なることや周上の辺が接触することがある (図 1)。Dürer の著書の中では、全ての多面体の辺展開図は重なりのないよう描かれており、これに着目した Shephard は以下の予想を立てた。

予想 1 ([17]). 任意の凸多面体には、重なりのない辺展開図が少なくとも 1 つ存在する。

この予想は、現在でも未解決であり、これを解決すべく様々な観点から研究がされている。その 1 つが、Schevon によるランダムに生成した凸多面体に対する実験である [15]。彼女は、多面体における頂点の数が多くなるほど、重なりを持たない辺展開図の割合が小さくなることを示した (図 2)。また、与えられた多面体に対して、重なりを持つ辺展開図が存在するかを判定する研究もある。その一つに、塩

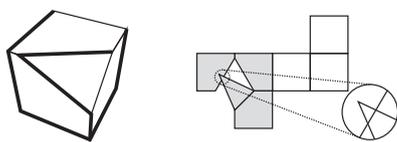


図 1: 角が切り落とされた立方体と重なりを持つ辺展開図

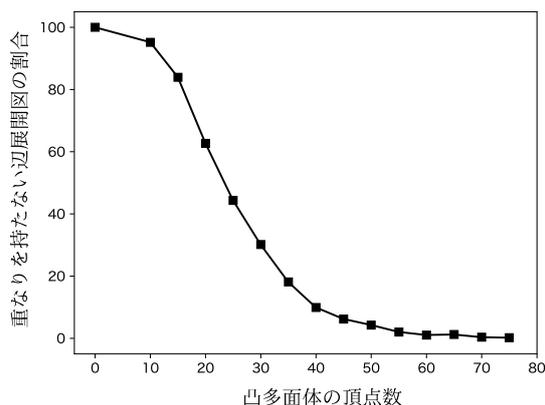


図 2: 折れ線グラフは、ランダムに選択された 1000 個の辺展開図のうち、重なりを持たないものの割合を表す。折れ線グラフの各点は、ランダムに生成された 5 つの凸多面体の平均値を表す [15]。

田と斎藤が考案した回転展開というアルゴリズムがある [19]。このアルゴリズムは、多面体の辺展開図が重なりを持つかを高速に判定することができ、整面凸多面体 (全ての面が正多角形からなる凹みのない多面体) に対し、重なりを持つ辺展開図の存在を完全に示した (表 1)。

辺展開図の個数は、多面体における切り線が形成する全域木の個数と等しいことが知られている [3]。全域木の個数は、全域木定理 [13] や、二分決定グラフ (binary decision diagram: BDD) [1] / ゼロサプレス型二分決定グラフ (zero-suppressed binary decision diagram: ZDD) [14] というデータ構造を用いて数え上げることができる。BDD/ZDD は、集合族をコンパクトに表す構造であり、集合族に対するいくつかの演算 (例えば、和集合演算, 積集合演算, 差集合演算など) を持っている。加えて BDD/ZDD は、集合族に対し

*九州工業大学

†北海道大学

表 1: 整面凸多面体の辺展開図における重なり

整面凸多面体	重なりを持つ辺展開図が存在するか?
正多面体 (全 5 種類)	No [7]
半正多面体 (全 13 種類)	7 種類は No [21, 19] 6 種類は Yes [2, 7, 19]
ジョンソンの立体 (全 92 種類)	48 種類は No [18] 44 種類は Yes
アルキメデスの n 角柱 ($n \geq 3$)	$3 \leq n \leq 23$ のとき No [19] $n \geq 24$ のとき Yes
アルキメデスの m 反角柱 ($m \geq 3$)	$3 \leq m \leq 11$ のとき No [19] $m \geq 12$ のとき Yes

て、数え上げや列挙、最適なものの抽出ができる (例えば, [11] を参照). 堀山らは BDD/ZDD を用いて, 整面凸多面体の辺展開図の個数を数えた [8, 6]. また, 堀山と庄司は BDD を用いて全域木を列挙した後, 各辺展開図に対して重なりが無いかを判定するという手法を考案した [7]. これにより, 全ての正多面体には重なりを持つ辺展開図が存在しないことが示した. しかし, [7] における手法は, 辺展開図の個数が少ない多面体に対してのみ有効である. 例えば, 切頂二十面体 (図 3) の辺展開図は 375, 291, 866, 372, 898, 816, 000 個 (約 3.75×10^{20} 個) あり [8], 1つ1つの辺展開図に対して重なりの有無を調べると, 現在のコンピュータで 10 万年以上かかる試算である.

本研究では, ZDD とその演算を用いて, 与えられた多面体に対して重なりを持たない辺展開図の個数を数え上げるアルゴリズムを提案する. このアルゴリズムは, まず「極小な重なりを持つ部分辺展開図 (minimal overlapping partial edge unfolding: MOPE)」という回転展開 [19] の過程で得られる重なりを持つ最小単位の辺展開図を列挙する (図 1 における灰色



図 3: 切頂二十面体

の面が MOPE に該当する). そして, 全ての辺展開図の集合族を表す ZDD から, MOPE を含む辺展開図の集合族を差し引くことで, 重なりを持たない辺展開図のみを数え上げる.

本稿では, 提案するアルゴリズムを整面凸多面体 (半正多面体 3 種類, ジョンソンの立体 20 種類, アルキメデスの角柱 19 種類, アルキメデスの反角柱 21 種類) に適用し, 各多面体における重なりを持たない辺展開図の個数およびその割合を示す.

2 準備

グラフ G において, 頂点の集合を $V(G)$, 辺の集合を $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ とするとき, $G = (V(G), E(G))$ と表記される. $v_i \neq v_j$ ($v_i, v_j \in V(G)$, $1 \leq i \neq j \leq k$) かつ, 連続する二つの頂点が隣接するとき, 頂点列 (v_1, \dots, v_k) をパスといい, 任意の二つの頂点間にパスが存在するとき, そのグラフは連結という. 連結なグラフ $T = (V_T, E_T)$ において, $|E_T| = |V_T| - 1$ のとき, グラフを木といい, $V_T = V(G)$ かつ $E_T \subseteq E(G)$ のとき, 木 T をグラフ $G = (V(G), E(G))$ の全域木という. グラフ G の頂点集合 $V' \subseteq V(G)$ に対し, $G[V'] = (V', \{\{p, q\} \mid p, q \in V' \text{ and } \{p, q\} \in E(G)\})$ を, G の V' による誘導部分グラフという.

多面体とは, 少なくとも 4 つの面と呼ばれる多角形が辺でつながって構成される三次元の物体である. 多面体における全ての二面角が π 未満であるとき, 凸多面体といい, 全ての面が正多角形である凸多面体を整面凸多面体という. 全ての面が合同な正多角形で構成される整面凸多面体を正多面体という. n 角柱とは, 互いに向き合っている二つの合同な n 角形 (底面とよぶ) と, 二つの底面の対応する辺を結ぶ n 個の平行四辺形 (側面とよぶ) から構成される多面体である. n 反角柱とは, 合同な n 角形の底面と, 交互に配置された $2n$ 個の三角形から構成される多面体である. n (反) 角柱のうち整面凸多面体のもの, つまり底面が正 n 角形, 側面が正方形 (正三角形) であるものを, アルキメデスの n (反) 角柱と

よぶ。半正多面体とは、頂点に同じ種類と順序の正多角形が集まる正多角形から構成された整面凸多面体であり、正多面体およびアルキメデスの(反)角柱を除くものである。ジョンソンの立体とは、正多面体、半正多面体、およびアルキメデスの(反)角柱を除く整面凸多面体であり、92種類のジョンソン立体が存在することが知られている [10].

多面体 Q を考える。 Q において、二つの面が共通の辺を持っているとき、その二つの面は隣接しているという。多面体 Q の展開図 (一般展開図とも言う) とは、 Q の辺や面を切って平面に展開することで形成される平面多角形であり、特に辺のみを切って形成される多角形を辺展開図とよぶ。 V_Q を Q の面の集合、 E_Q を隣接する二つの面を結ぶ辺の集合とすると、 Q はグラフ $G_Q(V_Q, E_Q)$ として見るができる。ここで、 Q の辺展開図について以下の補題がある。

補題 2 (例えば [20] Theorem 2.2.1 とその証明を参照)。 Q を辺展開して辺展開図 U を得るとき、切断されない辺の集合を $E_U \subset E_Q$ とする。このとき、 E_U は G_Q の全域木 $T(G_Q)$ となる。

この補題は、 G_Q の全域木の数え上げが Q の辺展開図の数え上げと等価であることを示している。さらに、 G_U の連結な誘導部分グラフに対応する面の集合は、辺展開図 U の部分的な構造として見ることができる。以降、この辺展開図における部分的な構造を部分辺展開図とよぶ。

2つの異なる多角形が与えられ、それぞれが少なくとも1つの点 p を共有するとき、2つの多角形は重なるという。本稿では多角形の境界上の点も多角形に含まれることに注意する。つまり、多角形が境界線どうしで接触している場合も重なるという。ある多面体を辺展開したとき、2つの異なる面が重なるならば、これを重なりを持つ辺展開図という。ある多面体を与えられたとき、その辺展開図に重なりがあるかを効率的に判定するアルゴリズムとして、以下の補題に基づき開発された回転展開がある [19].

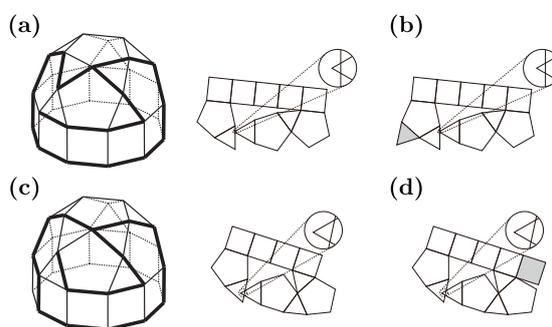


図 4: 正五角丸塔柱 (ジョンソンの立体) における MOPE ((a), (c)) と MOPE ではない部分辺展開図 ((b), (d)). (a), (c) から、これ以上面を取り除くと重なりを持つ連結な部分辺展開図ではなくなる。(b), (d) は、灰色の面をそれぞれ取り除くと MOPE となる。

補題 3 ([4, 21]). 辺展開図 U_O を多面体 Q における重なりを持つ辺展開図、 $T(U_O)$ を U_O に対応する全域木とする。もし、 $T(U_O)$ の2つの頂点 n, n' が U の重なり合っている面に対応する場合、 n から n' への $T(U_O)$ 上のパスは、 U の連続する面の順序を表す。

回転展開は重なりを持つ極小な部分辺展開図 (minimal overlapping partial edge unfolding: MOPE) という構造を列挙できる。ここで、MOPEとは重なりを持つ部分辺展開図のうち、極小の面の個数で構成されるものである。図 4 に、MOPE と MOPE ではない部分辺展開図の例を示す。

グラフ中の全域木の数え上げを行う方法の一つとして、ゼロサプレス型二分決定グラフ (zero-suppressed binary decision diagram: ZDD) という、集合族を非巡回有向グラフでコンパクトに表すデータ構造を用いた手法が知られる [11]. ZDD には、2つの終端節点 \top, \perp 、分枝節点と呼ばれる節点がある。分枝節点は要素によってラベル付けされており、各節点からはラベルの要素を選択することを意味する出力辺 1-枝と、選択しないことを意味する出力辺 0-枝の2本の枝が出ている。また、分枝節点には根節点と呼ばれる入力辺を持たないものが一つ存在する。全域木を表す ZDD の例を図 5 に示す。例えば、根節

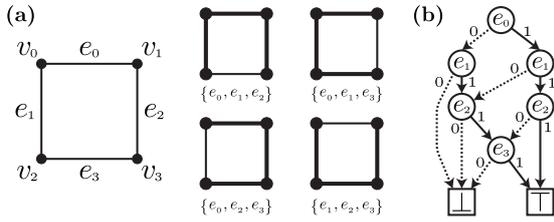


図 5: (a) グラフの例 C_4 と全域木. (b) C_4 の全域木を表す ZDD. 丸が分枝接点, 丸の中がラベル, 実線が 1-枝, 点線が 0-枝を表す.

点 (ラベル e_0) から, 1-枝, 1-枝, 0-枝, 1-枝を辿って終端節点 \top に到達するパスは全域木を形成することを, 0-枝, 1-枝, 1-枝, 0-枝を辿って終端節点 \perp に到達するパスは全域木を形成しないことを意味する. ZDD には, いくつかの演算が用意されており, 2つの ZDD の和集合や積集合などを取ることができる [14]. また, これらの ZDD の演算により得られる ZDD もコンパクトに表現されることが知られている [12].

3 重なりを持たない辺展開図の数え上げ

本節では, 任意の多面体に対して重なりを持たない辺展開図の個数を求めるアルゴリズムを説明する. 以降, 多面体 Q における (部分) 辺展開図を X とするとき, X に対応するグラフを $G(X) = (V(X), E(X))$ と書く. ここで, 以下の補題が成り立つ.

補題 4. 任意の重なりを持つ辺展開図 U に対して, $E(M) \subseteq E(U)$ となる MOPE M が常に存在する.

証明. 任意の U において, 重なりを持つ面の組 n, n' は, 少なくとも 1 組存在する. 補題 2 より, U に対応するグラフ $G(U)$ は全域木 $T(U)$ を形成していることが言える. また, 補題 3 より, $T(U)$ における n から n' へのパスは, 面の組 n, n' が連結となる部分辺展開図を表す. ここで, この部分辺展開図は, どの面を取り除いても連結でなくなるため, 極小の

面で構成されていることが言える. ゆえに, 面の組 n, n' が連結となる部分辺展開図は, MOPE であることが言え, 題意が成立する. \square

$M_i (1 \leq i \leq k)$ を, ある多面体 Q における MOPE とする. ここで, k は Q における MOPE の個数である. 補題 4 より以下の主張が言える.

主張 5. U を重なりを持たない辺展開図とする. このとき, $E(M_i) \not\subseteq E(U)$ が成り立つ.

辺展開図の個数は, ZDD Z_S を構築することで数え上げることができる [11]. しかし, この ZDD には重なりを持つ辺展開図が含む. これらの重なりを持つ辺展開図を取り除くために, 本研究では ZDD における演算の一つであるサブセッティング法を用いる [9]. サブセッティング法とは, ZDD Z から制約 C を満たす組合せを抽出することによって, 新しい ZDD Z_N を生成する手法である. 具体的には, 以下の 4 つのステップで重なりを持たない辺展開図の個数を数え上げる.

ステップ 1 ZDD Z_S を構築する.

ステップ 2 全ての MOPE M_i に対して, $E(M_i)$ のすべての要素を同時に含まない組合せを表す ZDD Z_{M_i} を構築する.

ステップ 3 サブセッティング法を用いて, Z_S から全ての Z_{M_i} を満たす組合せを抽出し, 新しい ZDD Z_N を生成する.

ステップ 4 ZDD Z_N において, 終端節点 \top に到達するパスの個数を求める. これが, 重なりを持たない辺展開図の個数となる.

ステップ 2 における ZDD Z_{M_i} の構築方法の詳細については, 補遺 A を参照されたし.

4 整面凸多面体の重なりを持たない辺展開図の数え上げ

本節では, 3 節で提案した重なりを持たない辺展開図の数え上げアルゴリズムを, 整面凸多面体 (半

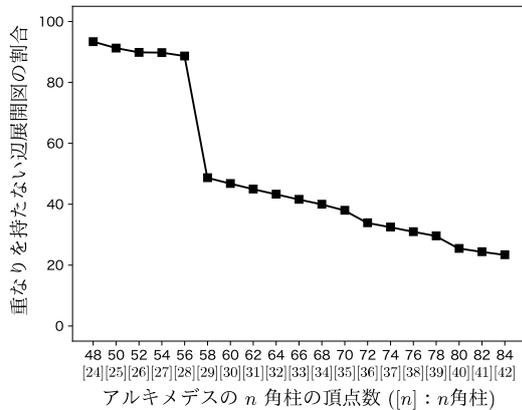


図 6: アルキメデスの角柱における重なりを持たない辺展開図の割合

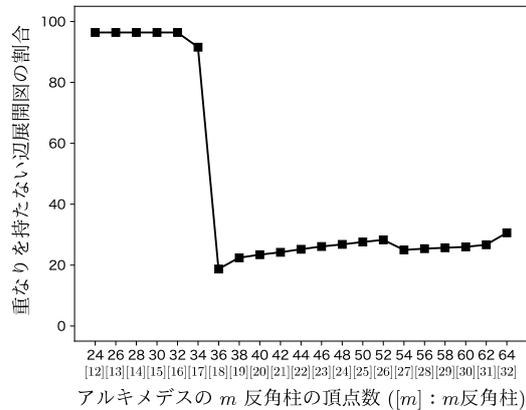


図 7: アルキメデスの反角柱における重なりを持たない辺展開図の割合

正多面体 3 種類, ジョンソンの立体 20 種類, アルキメデスの角柱 19 種類, アルキメデスの反角柱 21 種類) に適用する. ZDD Z_S および Z_{M_i} を構築する部分には, TdZdd ライブラリ¹を用いた. 実験には Apple M1 Max チップおよびメモリ 64GB を積んだ Mac OS Ventura の計算機を使用した. 半正多面体, ジョンソンの立体, アルキメデスの (反) 角柱の MOPE を列挙には回転展開 [19, 18] を用いた.

半正多面体, ジョンソンの立体, アルキメデスの角柱, アルキメデスの反角柱の順に結果を表 2 ~ 5 に示す. また, アルキメデスの角柱, アルキメデスの反角柱の頂点数と重なりを持たない辺展開図の割合の関係を表す折れ線グラフを図 6, 7 に示す.

これらの実験結果から, 以下のことが言える. まず, 半正多面体 (表 2) について, 切頂二十面体と切頂十二面体は, 頂点数, 辺の数, 面の数が一致しているが, MOPE の個数は切頂二十面体の方が多い. それにも関わらず, 切頂十二面体での重なりを持たない辺展開図の割合が少ないという結果が得られた. 切頂二十面体における MOPE (全 2 種類) は, 8 面もしくは 9 面で構成されているのに対し (図 8), 切頂十二面体における MOPE (全 1 種類) は 4 面で構成されている (図 9). この結果から, 各多面体に MOPE がいくつ含まれているかではなく, 各 MOPE を構成する面の数が, 重なりを持たない辺展

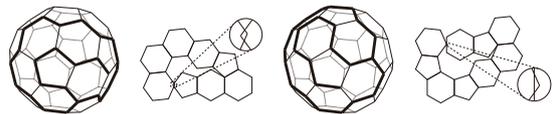


図 8: 切頂二十面体の MOPE (回転対称・鏡映対称となるものを除く) [8, 19]

開図の個数の割合に影響すると推察できる. アルキメデスの (反) 角柱に対しても, 同様の推察を得ることができた. アルキメデスの n 角柱は $n = 29$ のときに, アルキメデスの m 反角柱は $n = 18$ のときに, 重なりを持たない辺展開図の割合が大きく減る (図 6, 7). 割合が大きく減った際, アルキメデスの n 角柱には図 10 に示す 4 面で構成される 2 種類の MOPE が新たに出現した ($n \leq 28$ まで出現した MOPE は 3 種類で, それぞれ 6, 7, 8 面で構成される (図 11)). また, アルキメデスの m 反角柱

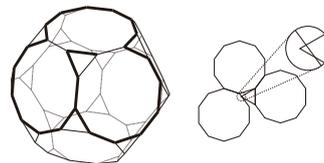


図 9: 切頂十二面体の MOPE (回転対称・鏡映対称となるものを除く) [8]

¹<https://github.com/kunisura/TdZdd>

表 2: 半正多面体における重なりを持たない辺展開図の個数

半正多面体	#(頂点)	#(辺)	#(面)	#(MOPE)	#(重なりを含む辺展開図) [8]	#(重なりを持たない辺展開図)	割合 (%)
変形立方体	24	60	38	72	89,904,012,853,248	85,967,688,920,076	95.6
切頂十二面体	60	90	32	120	4,982,259,375,000,000,000	931,603,573,888,462,350	18.6
切頂二十面体	60	90	32	240	375,291,866,372,898,816,000	366,359,657,802,290,909,354	97.6

表 3: ジョンソンの立体における重なりを持たない辺展開図の個数とその割合

ジョンソンの立体	#(頂点)	#(辺)	#(面)	#(MOPE)	#(重なりを含む辺展開図) [8]	#(重なりを持たない辺展開図)	割合 (%)
J20	25	45	22	40	29,821,320,745	27,158,087,415	91.0
J21	30	55	27	90	8,223,103,375,490	6,297,186,667,720	76.5
J24	25	55	32	60	5,996,600,870,820	5,492,624,228,190	91.5
J32	25	50	27	20	699,537,024,120	699,433,603,320	99.9
J33	25	50	27	10	745,208,449,920	745,198,979,400	99.9
J34	30	60	32	10	193,003,269,869,040	190,653,702,525,040	98.7
J38	30	60	32	80	270,745,016,304,350	214,085,775,357,270	79.0
J39	30	60	32	80	272,026,496,000,000	215,087,798,524,180	79.0
J44	18	42	26	24	5,295,528,588	5,231,781,954	98.7
J45	24	56	34	48	13,769,880,349,680	13,386,219,088,644	97.2
J54	13	22	11	4	75,973	75,749	99.7
J55	14	26	14	8	709,632	705,144	99.4
J56	14	26	14	8	707,232	702,520	99.3
J57	15	30	17	12	6,531,840	6,457,860	98.9
J58	21	35	16	5	92,724,962	92,219,782	99.4
J59	22	40	20	10	1,651,482,010	1,632,941,030	98.8
J60	22	40	20	10	1,641,317,568	1,621,738,522	98.8
J61	23	45	24	15	28,745,798,400	28,183,512,978	98.0
J66	28	48	22	104	54,921,311,280	39,055,563,000	71.1
J67	32	60	30	208	90,974,647,120,896	43,437,626,181,464	47.7

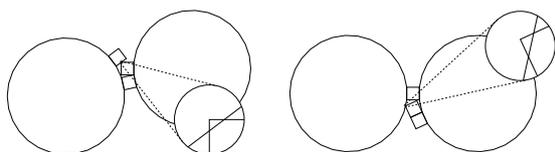


図 10: アルキメデスの n 角柱において $n \geq 29$ のときに出現する MOPE (回転対称・鏡映対称となるものを除く)

には図 12 に示す 6 面で構成される 3 種類の MOPE が新たに出現した ($m \leq 17$ までに出現した MOPE は 2 種類で, いずれも 8 面で構成される (図 13)).

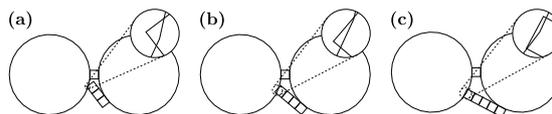


図 11: アルキメデスの n 角柱において (a) $n \geq 24$ のとき (b) $n \geq 26$ のとき (c) $n \geq 28$ のときに出現する MOPE (回転対称・鏡映対称となるものを除く)

5 まとめ

本研究では, 任意の多面体における重なりを持たない辺展開図の個数を数え上げる手法を提案した. これは, ZDD により列挙された辺展開図に, 回転展開で得られる重なりを持つ極小な部分辺展開図を組

表 4: アルキメデスの n 角柱における重なりを持たない辺展開図の個数とその割合

n 角柱	#(頂点)	#(辺)	#(面)	#(MOPE)	#(重なりを含む辺展開図) [8]	#(重なりを持たない辺展開図)	割合 (%)
24 角柱	48	72	26	96	639,620,518,118,400	597,547,526,278,102	93.4
25 角柱	50	75	27	100	2,486,558,615,814,025	2,270,951,013,426,531	91.3
26 角柱	52	78	28	208	9,651,161,613,824,796	8,680,724,875,408,147	89.9
27 角柱	54	81	29	216	37,403,957,244,654,675	33,593,039,475,394,304	89.8
28 角柱	56	84	30	336	144,763,597,316,784,768	128,484,071,528,042,868	88.7
29 角柱	58	87	31	580	559,560,282,425,278,229	273,052,412,937,434,749	48.7
30 角柱	60	90	32	720	2,160,318,004,043,512,500	1,012,562,467,010,055,179	46.8
31 角柱	62	93	33	744	8,331,163,769,982,715,231	3,755,308,489,795,021,132	45.0
32 角柱	64	96	34	768	32,095,304,749,163,937,792	13,910,558,120,316,453,216	43.3
33 角柱	66	99	35	792	123,524,473,883,545,449,825	51,464,102,399,119,841,064	41.6
34 角柱	68	102	36	952	474,969,297,739,230,927,564	190,077,650,531,107,175,354	40.0
35 角柱	70	105	37	1,120	1,824,745,126,233,358,110,635	694,876,093,525,600,562,317	38.0
36 角柱	72	108	38	1,440	7,004,614,136,879,907,849,600	2,380,408,316,368,094,877,275	33.9
37 角柱	74	111	39	1,776	26,867,730,730,869,118,775,917	8,734,608,096,670,703,034,258	32.5
38 角柱	76	114	40	2,128	102,981,783,095,242,242,871,908	31,927,951,665,245,016,746,682	31.0
39 角柱	78	117	41	2,496	394,447,279,575,099,709,694,775	117,143,971,138,672,055,381,811	29.6
40 角柱	80	120	42	2,880	1,509,843,372,596,510,348,221,440	385,268,000,158,423,393,347,888	25.5
41 角柱	82	123	43	3,116	5,775,682,482,451,356,835,464,761	1,409,268,044,697,380,611,870,787	24.4
42 角柱	84	126	44	3,360	22,080,875,606,379,223,850,418,300	5,178,957,938,434,484,085,594,343	23.4

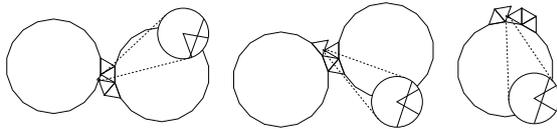


図 12: アルキメデスの m 反角柱における $m \geq 18$ のときに出現する MOPE (回転対称・鏡映対称となるものを除く)

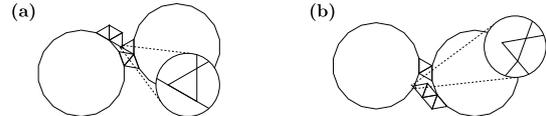


図 13: アルキメデスの m 反角柱において (a) $m \geq 12$ のとき (b) $m \geq 17$ のときに出現する MOPE (回転対称・鏡映対称となるものを除く)

合せることで実現できた。また、63 種類の整面凸多面体において、重なりを持たない辺展開図の個数を示した。

今後の課題として、重なりを持たない辺展開図のうち、回転対称や鏡映対称となるものを除いた辺展開図 (非同型な辺展開図) の数え上げが挙げられる。堀山と庄司は、BDD を用いて非同型な辺展開図の個数を求めた [8]。また、堀山らは ZDD を用いた非同型な辺展開図を数え上げる手法を提案した [6]。これらの既存の手法と、本研究で提案する手法を組み合わせることで、重なりを持たない非同型な辺展開図の数え上げていく。

一般的な凸多面体に対する重なりを持たない辺展開図の個数を数えることも今後の課題である。例えば「亀」と呼ばれる凸多面体 (図 14) は、重なりなく辺展開することが難しいとされる [16, 3]。このような凸多面体に対しても、本研究で提案する手法を拡張することで、重なりを持たない辺展開図の個数を数え上げていく。

補遺 A ZDD $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}_i}$ の構築

本節では、ZDD $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}_i}$ の構築方法について述べる。Algorithm 1 に $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}_i}$ を構築する擬似コードを示す。

表 5: アルキメデスの m 反角柱における重なりを持たない辺展開図の個数とその割合

m 反角柱	#(頂点)	#(辺)	#(面)	#(MOPE)	#(重なりを含む辺展開図) [8]	#(重なりを持たない辺展開図)	割合 (%)
12 反角柱	24	48	26	48	51,599,794,176	49,743,531,024	96.4
13 反角柱	26	52	28	52	383,142,771,674	369,359,503,344	96.4
14 反角柱	28	56	30	56	2,828,107,288,188	2,726,368,290,352	96.4
15 反角柱	30	60	32	60	20,768,716,848,000	20,021,578,135,380	96.4
16 反角柱	32	64	34	64	151,840,963,183,392	146,378,600,602,880	96.4
17 反角柱	34	68	36	136	1,105,779,284,582,146	1,013,491,325,102,942	91.6
18 反角柱	36	72	38	360	8,024,954,790,380,544	1,501,154,452,845,906	18.7
19 反角柱	38	76	40	380	58,059,628,319,357,318	13,038,527,513,687,486	22.4
20 反角柱	40	80	42	480	418,891,171,182,561,000	98,027,112,294,661,196	23.4
21 反角柱	42	84	44	588	3,014,678,940,049,375,872	732,157,627,679,302,758	24.2
22 反角柱	44	88	46	616	21,646,865,272,061,272,716	5,463,662,878,677,088,327	25.2
23 反角柱	46	92	48	644	155,113,904,634,576,144,814	40,508,628,620,513,122,070	26.1
24 反角柱	48	96	50	864	1,109,391,149,998,449,819,648	298,293,520,418,401,464,964	26.8
25 反角柱	50	100	52	900	7,920,708,398,483,722,531,250	2,188,171,009,006,050,804,805	27.6
26 反角柱	52	104	54	936	56,460,916,728,463,179,389,652	15,982,421,259,908,162,238,792	28.3
27 反角柱	54	108	56	1,296	401,873,068,071,158,383,691,136	100,599,073,148,261,099,923,798	25.0
28 反角柱	56	112	58	1,568	2,856,496,726,273,368,888,420,984	725,756,982,845,834,563,864,391	25.4
29 反角柱	58	116	60	1,856	20,277,959,821,998,087,658,569,178	5,224,196,129,087,410,893,943,357	25.7
30 反角柱	60	120	62	2,160	143,779,866,504,299,168,102,784,000	37,518,568,275,655,316,428,289,607	26.0
31 反角柱	62	124	64	2,480	1,018,331,261,238,041,888,906,149,982	272,565,329,790,964,088,373,433,340	26.7
32 反角柱	64	128	66	2,560	7,204,899,406,395,028,729,775,662,656	2,207,488,168,172,480,018,238,295,855	30.6

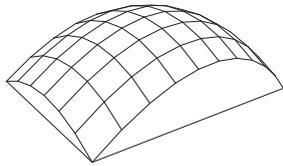


図 14: 凸多面体「亀」

以下 Algorithm 1 の操作の説明をする。1 行目では、全ての節点を空集合として初期化する。2 行目では、根節点 N_1 を、 m 桁ですべてが 0 のビット列として初期化し、3 行目では、 $E(M_i)$ に含まれる辺に対応するビットを 1 に設定する。7 行目から 24 行目は、辺 j (4 行目) における節点 n_j (5 行目) の x -枝 (6 行目) を選択した際の手続きである。7 行目では、後ろに続く手続きを行うために、メモ用の節点 n' に、節点 n_j におけるビット列の情報をコピーする。8 行目から 17 行目は、辺 j が $E(M_i)$ の要素である場合の処理を記述している。9 行目から 13 行目は 6 行目で 1-枝を選択した場合の処理で、14 行目から 16 行目は、0-枝を選択した場合の処理である。ま

ず、1-枝を選択した場合について説明する。辺 j は、 $E(M_i)$ に含まれる辺に該当するため、 $n'[j]$ のビットを 0 に設定する。もし n' の全てのビットが 0 になると $E(M_i)$ に含まれる辺を全て同時に含むため、有向辺を末端節点 \perp につなげて枝刈りを行う (11 行目から 13 行目)。次に、0-枝を選択した場合について説明する。0-枝を選択することは、 $E(M_i)$ の全ての要素が同時に含まれる組合せとならないことを意味する。ゆえに、節点 n' のビット列は以降の処理には関係ないため、 m 桁すべてを 0 とする。18 行目から 20 行目は、 $E(M_i)$ の全ての要素が同時に含まれる組合せが完成したかを判定する処理である。辺の走査が全て終わった ($j = m$) とき、12 行目で枝刈りされなかった組合せは、 $E(M_i)$ の全ての要素を同時に含まない。よって、有向辺を末端節点 \top につなげる。21 行目から 24 行目の処理は、 $j < m$ のとき次の節点へ有向辺をつなげる操作である。 $n_{j+1} = n'$ となる節点が既にあれば、節点 n' に有向辺をつなげる。そうでなければ新たに節点 n_{j+1} を生成し、 n' から n_{j+1} に有向辺をつなげる。

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP18H04091, JP19K12098, JP22H03549, MEXT 科研費 JP20H05964, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2154 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Randal E. Bryant. Graph-based algorithms for boolean function manipulation. *IEEE Trans. Computers*, 35(8):677–691, 1986.
- [2] Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, and Richard K. Guy. *Unsolved Problems in Geometry*. Springer-Verlag, reissue edition, 1991.
- [3] Erik D. Demaine and Joseph O’Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.
- [4] Kristin DeSplinter, Satyan L. Devadoss, Jordan Readyhough, and Bryce Wimberly. Nets of higher-dimensional cubes. In *32nd Canadian Conference on Computational Geometry*, 2020.
- [5] Albrecht Dürer. Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in linien ebenen unnd gantzen corporen, 1525.
- [6] Takashi Horiyama, Masahiro Miyasaki, and Riku Sasaki. Isomorphism elimination by zero-suppressed binary decision diagrams. In *30nd Canadian Conference on Computational Geometry*, 2018.
- [7] Takashi Horiyama and Wataru Shoji. Edge unfoldings of platonic solids never overlap. In *23rd Canadian Conference on Computational Geometry*, 2011.
- [8] Takashi Horiyama and Wataru Shoji. The number of different unfoldings of polyhedra. In *24th International Symposium on Algorithms and Computation*, volume 8283 of *LNCS*, pages 623–633. Springer, 2013.
- [9] Hiroaki Iwashita and Shin-ichi Minato. Efficient top-down ZDD construction techniques using recursive specifications. Technical Report TCS-TRA-1369, Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University, 2013.
- [10] Norman Johnson. Convex polyhedra with regular faces. *Canadian Journal of Mathematics*, 18:169–200, 01 1966.
- [11] Jun Kawahara, Takeru Inoue, Hiroaki Iwashita, and Shin-ichi Minato. Frontier-based search for enumerating all constrained subgraphs with compressed representation. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E100-A(9):1773–1784, 2017.
- [12] Donald E Knuth. *The art of computer programming, volume 4A: combinatorial algorithms, part 1*. Pearson Education India, 2011.
- [13] Mordechai Lewin. A generalization of the matrix-tree theorem. *Mathematische Zeitschrift*, 181(1), 1982.
- [14] Shin-ichi Minato. Zero-suppressed bdds for set manipulation in combinatorial problems. In *Proceedings of the 30th Design Automation Conference*, pages 272–277. ACM Press, 1993.
- [15] Catherine Anne Schevon. *Algorithms for geodesics on convex polytopes*. PhD thesis, The Johns Hopkins University, 1989.
- [16] Wolfram Schlickerieder. *Nets of Polyhedra*. PhD thesis, Berlin: Technische Universität Berlin, 1997.

- [17] G. C. Shephard. Convex polytopes with convex nets. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 78(3):389–403, 1975.
- [18] Takumi Shiota. Overlapping edge unfoldings for convex regular-faced polyhedrons, 2023. Kyushu Institute of Technology master’s thesis. Supervisor : Toshiki Saitoh.
- [19] Takumi Shiota and Toshiki Saitoh. Overlapping edge unfoldings for archimedean solids and (anti)prisms. In *17th International Conference and Workshops of Algorithms and Computation*, volume 13973 of *LNCS*, pages 36–48. Springer, 2023.
- [20] Ryuhei Uehara. *Introduction to Computational Origami: The World of New Computational Geometry*. Springer, 2020.
- [21] 廣瀬 健汰. 半正多面体の展開図の重なりについて, 2015. 埼玉大学工学部情報システム工学科卒業論文. 指導教員 : 堀山 貴史.

Algorithm 1 $E(M_i)$ の全ての要素が同時に含まれる組合せを除外した集合族を表す ZDD の生成

Input: G_Q の辺の本数: m , $E(M_i) = \{e_1, e_2, \dots, e_\ell\}$ ($1 \leq e_\alpha \neq e_\beta \leq m$)

```
1:  $N_j \leftarrow \emptyset$  for  $j = 1, 2, \dots, m+1$ 
2:  $N_1[j] \leftarrow 0$  for  $j = 1, 2, \dots, m$ 
3:  $N_1[e_i] \leftarrow 1$  for  $i = 1, 2, \dots, \ell$ 
4: for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
5:   for each 節点  $n_j \in N_j$  do
6:     for each  $x \in \{0, 1\}$  do
7:       ヌモ用の節点  $n'$  を生成.  $n' \leftarrow n_j$ 
8:       if  $n'[j] = 1$  then
9:         if  $x = 1$  then
10:           $n'[j] \leftarrow 0$ 
11:          if  $n'[k] = 0$  for  $k = 1, 2, \dots, m$  then
12:            終端節点  $\perp$  につなげる
13:          end if
14:        else
15:           $n'[k] \leftarrow 0$  for  $k = 1, 2, \dots, m$ 
16:        end if
17:      end if
18:      if  $j = m$  then
19:        終端節点  $\top$  につなげる
20:      end if
21:      if  $n_{j+1} = n'$  となる節点が存在しない then
22:        節点  $n_{j+1}$  を生成
23:      end if
24:       $n_j$  の  $x$ -枝を生成.  $n_{j+1}$  を指す.
25:    end for
26:  end for
27: end for
```
