

一般セッション6 [33S]

整面凸多面体の重なりを持たない 辺展開図の数え上げ

2023年度 冬のLAシンポジウム

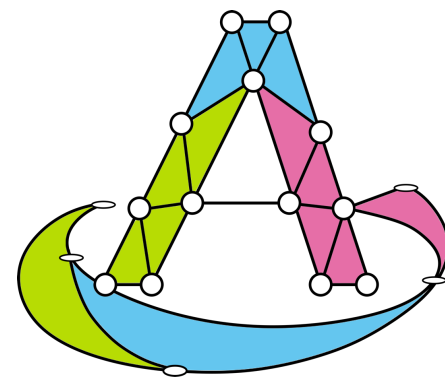
◎ 塩田 拓海（九州工業大学）

榎本 優大（北海道大学）

堀山 貴史（北海道大学）

斎藤 寿樹（九州工業大学）

2024年 2月 21日 (水)



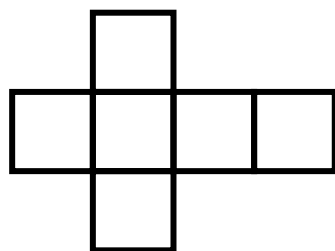
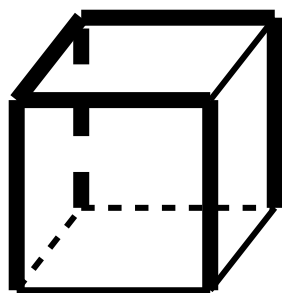
辺展開図



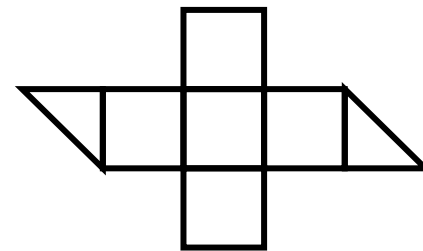
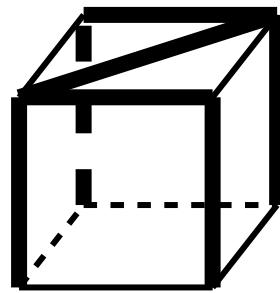
定義 1 [R. Uehara, 2018]

多面体の辺に切れ込みを入れて、平坦に開いた多角形を、**辺展開図**という。

それぞれ左側の立方体を太線に沿って切ると…



(a) 辺展開図



(b) 辺展開図ではない

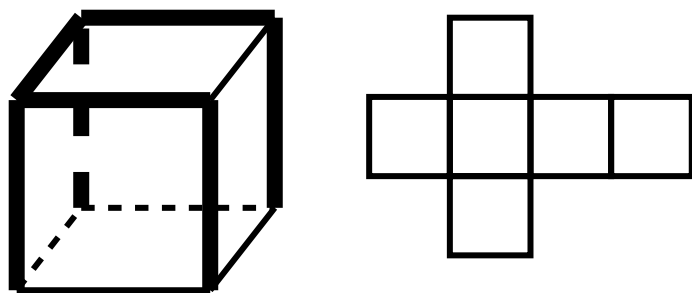
辺展開図



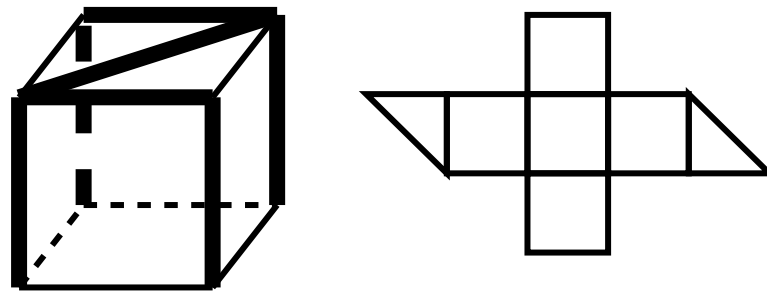
定義 1 [R. Uehara, 2018]

多面体の辺に切れ込みを入れて、平坦に開いた多角形を、**辺展開図**という。

それぞれ左側の立方体を太線に沿って切ると…



(a) 辺展開図



(b) 辺展開図ではない

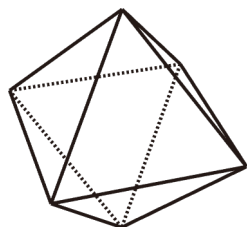
整面凸多面体



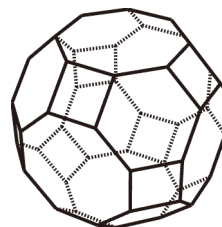
定義 2

全ての面が、正多角形で構成される（辺の長さが等しい）凸多面体を、**整面凸多面体**という。

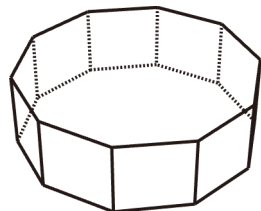
5 種類に分類



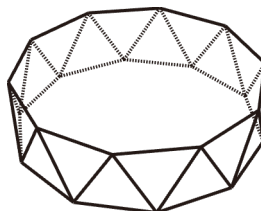
正多面体
(5 種類)



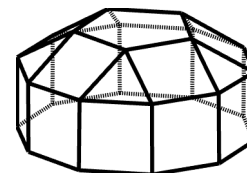
半正多面体
(13 種類)



アルキメデスの n 角柱
($n \geq 3$)



アルキメデスの m 反角柱
($m \geq 3$)

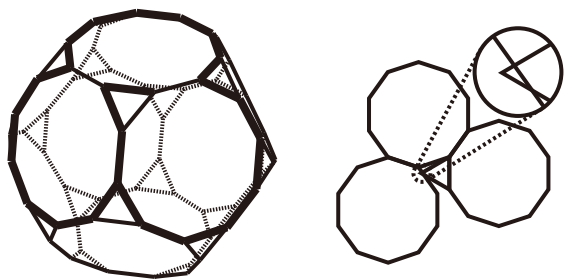


ジョンソンの立体
(92 種類)

重なりを持つ辺展開図

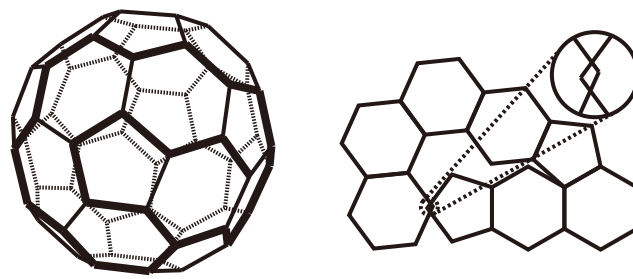


いくつかの凸多面体には、重なりを持つ辺展開図が存在する



切頂十二面体

[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



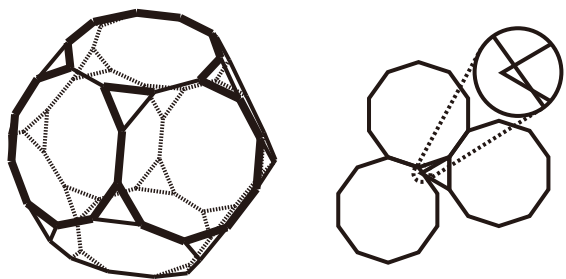
切頂二十面体

[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

重なりを持つ辺展開図

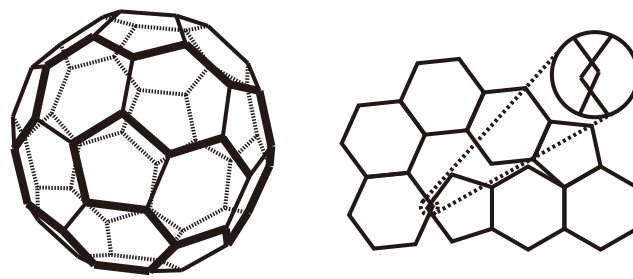


いくつかの凸多面体には、重なりを持つ辺展開図が存在する



切頂十二面体

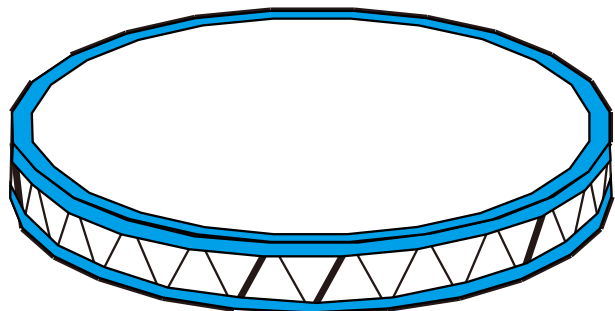
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



切頂二十面体

[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

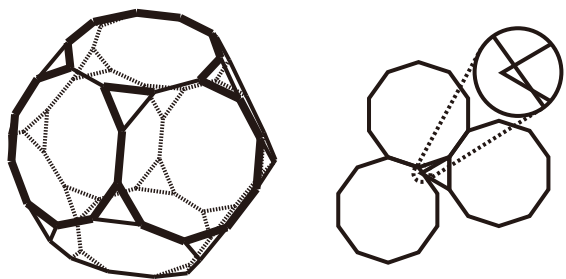
✓ モデルのマスキングテープを剥がして下さい



重なりを持つ辺展開図

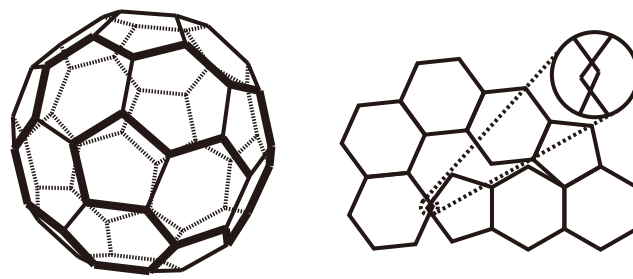


いくつかの凸多面体には、重なりを持つ辺展開図が存在する



切頂十二面体

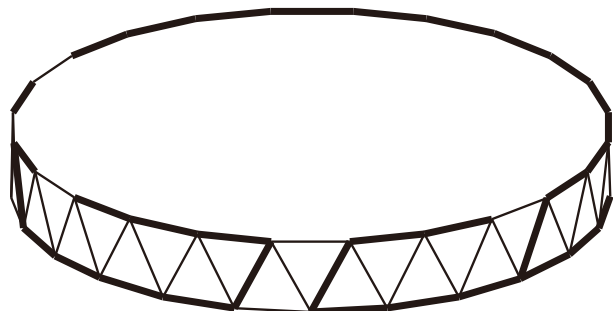
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



切頂二十面体

[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

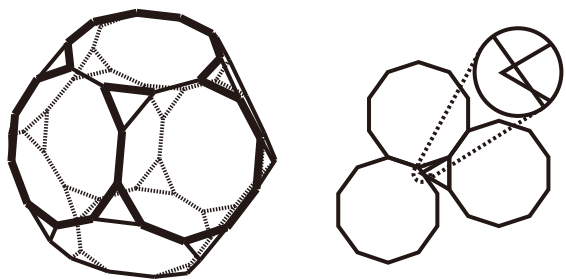
✓ モデルのマスキングテープを剥がして下さい



重なりを持つ辺展開図

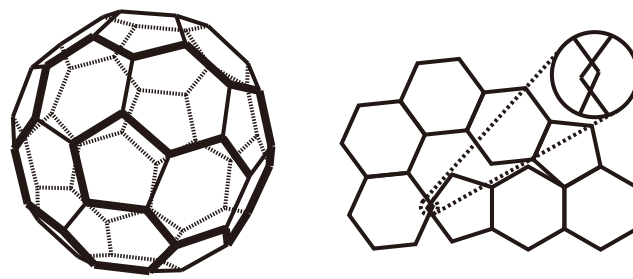


いくつかの凸多面体には、重なりを持つ辺展開図が存在する



切頂十二面体

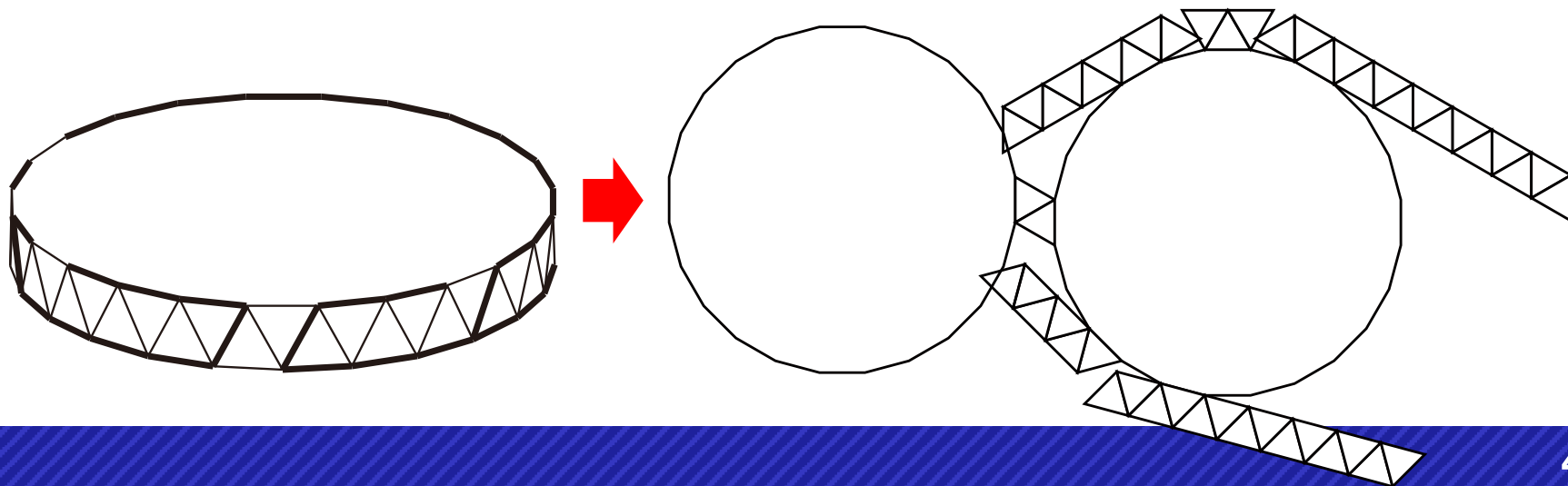
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



切頂二十面体

[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

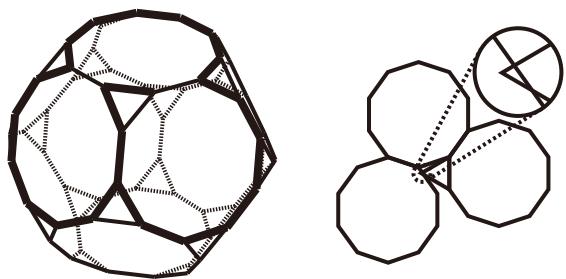
✓ モデルのマスキングテープを剥がして下さい



重なりを持つ辺展開図

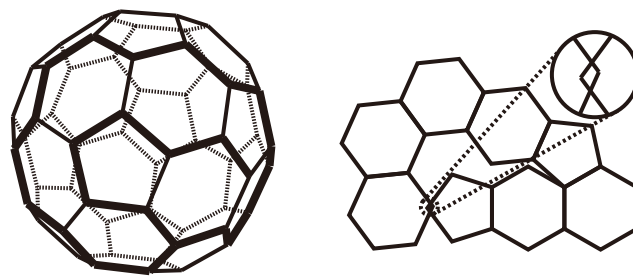


いくつかの凸多面体には、重なりを持つ辺展開図が存在する



切頂十二面体

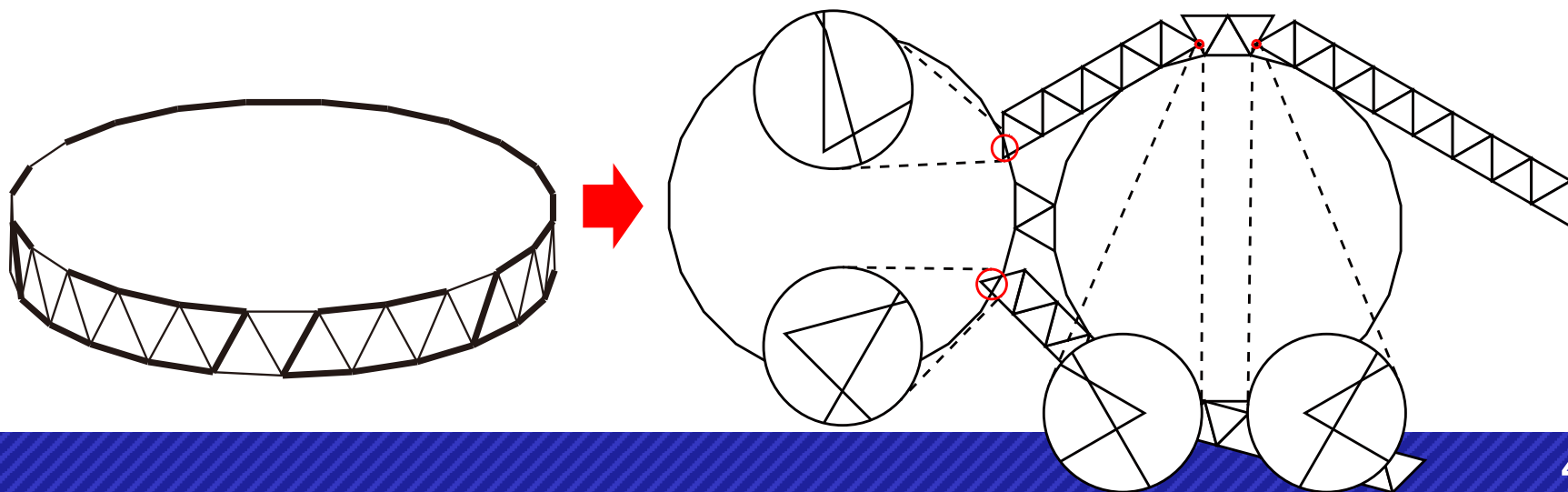
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



切頂二十面体

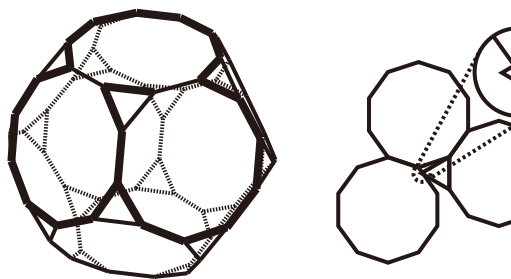
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]

✓ モデルのマスキングテープを剥がして下さい



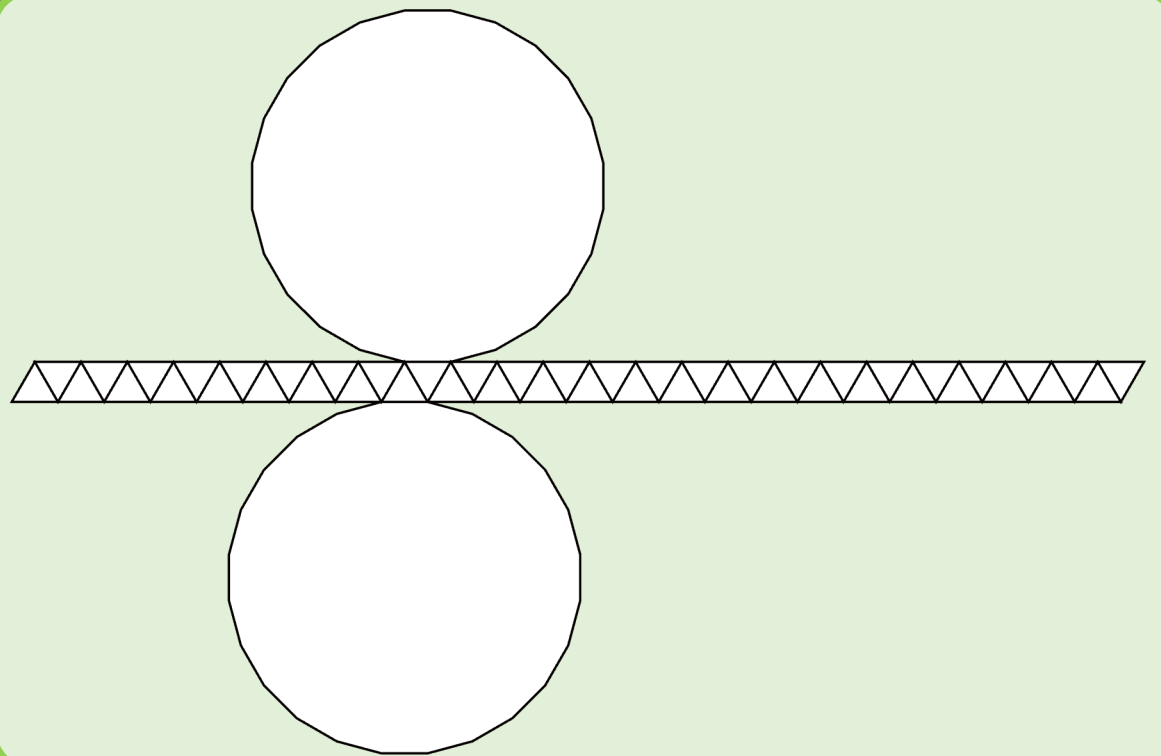
重なりを持つ辺

いくつかの凸多面体に

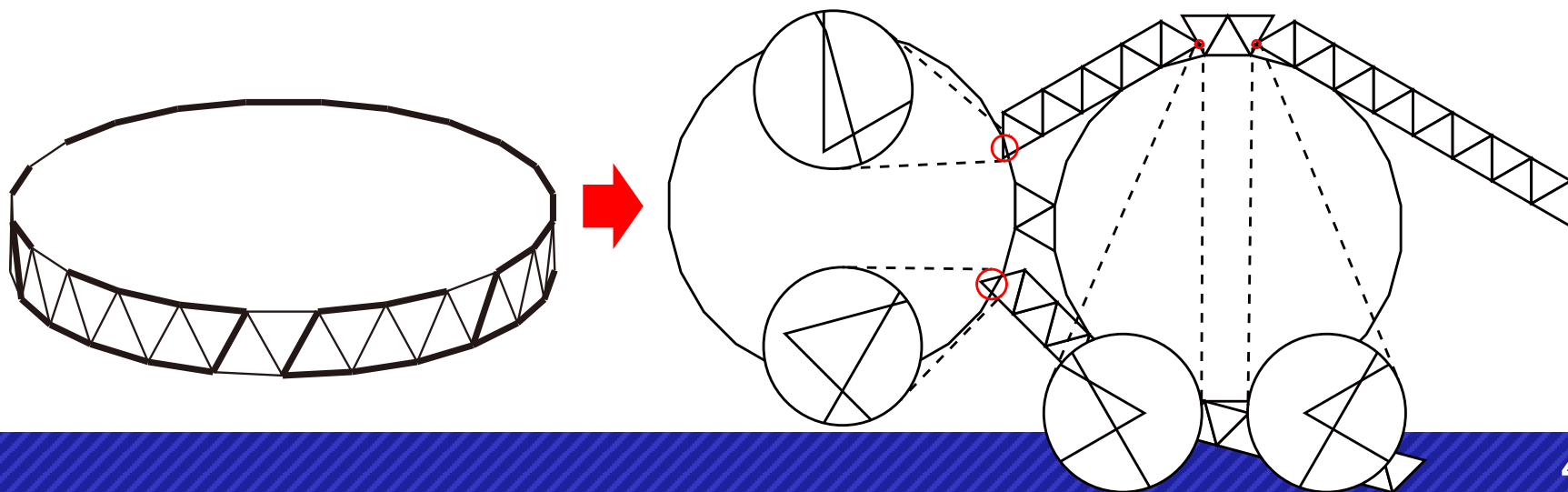


切頂十二面体

[T. Horiyama and W. Shoji,

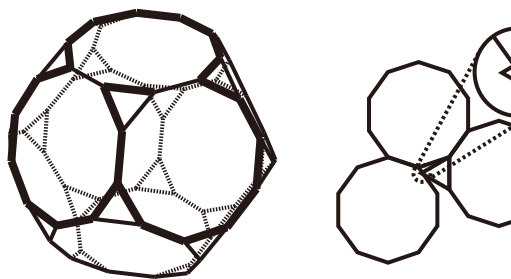


- ✓ モデルのマスキングテープを剥がして下さい



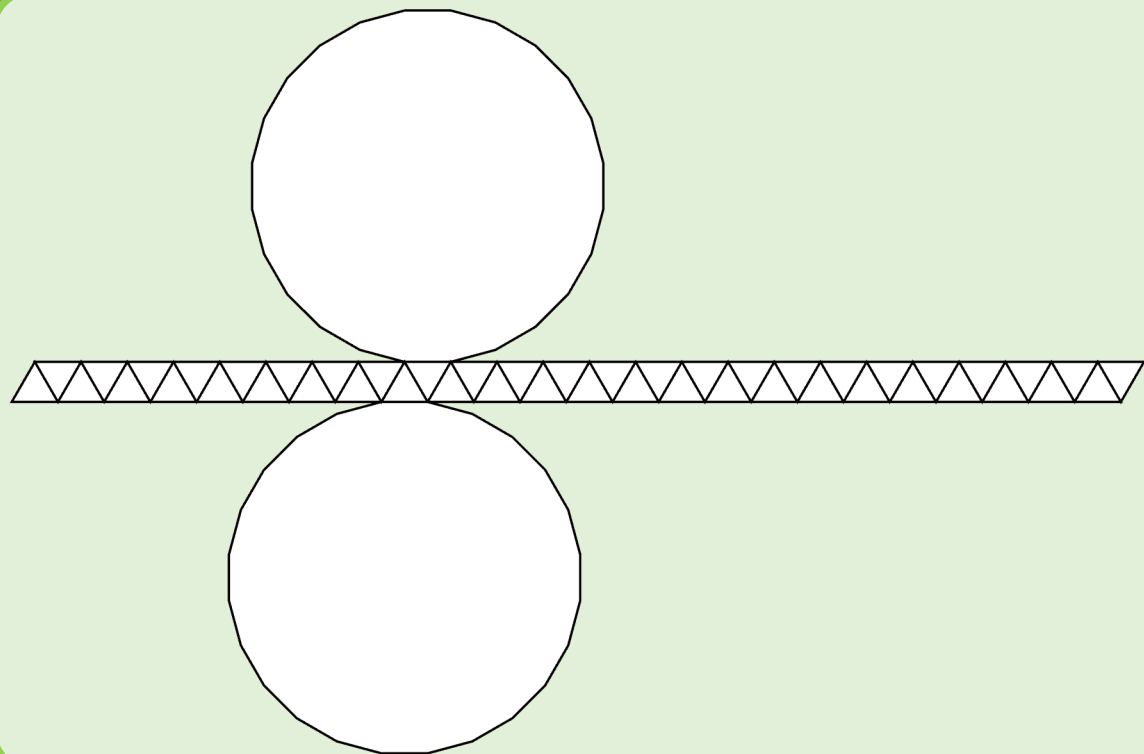
重なりを持つ辺

いくつかの凸多面体に



切頂十二面体

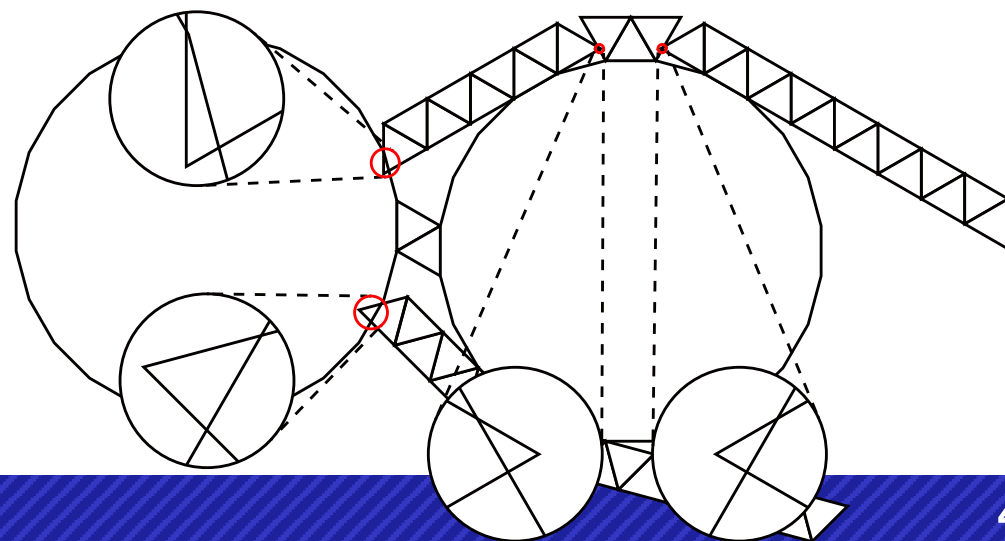
[T. Horiyama and W. Shoji,



- ✓ モデルのマスキングテープを剥がして下さい

本研究の目的

重なりを持たない辺展開図の個数を数え上げ、その割合を求める

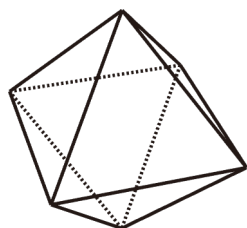


本研究の主結果

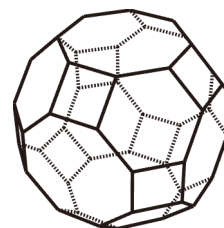


本研究の成果

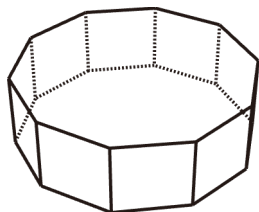
63 種類の整面凸多面体に対し，重なりを持たない辺展開図の個数およびその割合を示した。



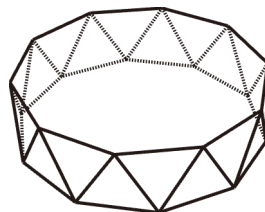
正多面体
(5 種類)



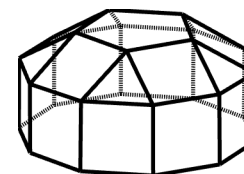
半正多面体
(13 種類)



アルキメデスの n 角柱
($n \geq 3$)



アルキメデスの m 反角柱
($m \geq 3$)



ジョンソンの立体
(92 種類)

どう辺展開しても重ならない / ある方法で辺展開すると重なる

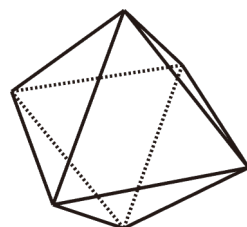
本研究の主な成果

重なりを持つ辺展開図の存在が解明されている

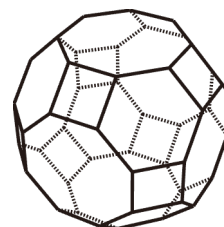
[T. Horiyama et al., 2011] [Hirose, 2015] [T. Shiota et al., 2023]

本研究の成果

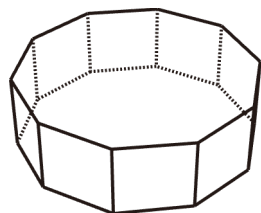
63 種類の整面凸多面体に対し、重なりを持たない辺展開図の個数およびその割合を示した。



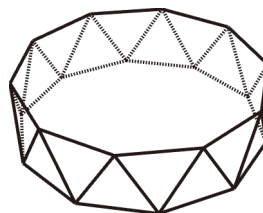
正多面体
(5 種類 / 0 種類)



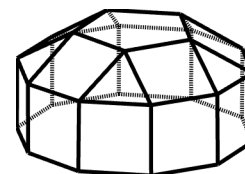
半正多面体
(7 種類 / 6 種類)



アルキメデスの n 角柱
($3 \leq n \leq 23$ / $n \geq 24$)



アルキメデスの m 反角柱
($3 \leq n \leq 11$ / $m \geq 12$)



ジョンソンの立体
(48 種類 / 44 種類)

どう辺展開しても重ならない / ある方法で辺展開すると重なる

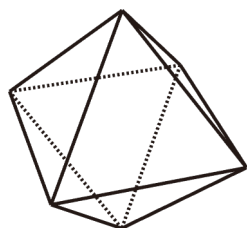
本研究の主な成果

重なりを持つ辺展開図の存在が解明されている

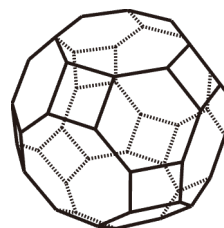
[T. Horiyama et al., 2011] [Hirose, 2015] [T. Shiota et al., 2023]

本研究の成果

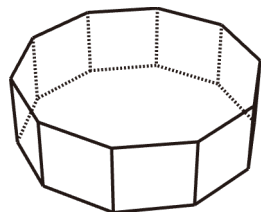
63 種類の整面凸多面体に対し、重なりを持たない辺展開図の個数およびその割合を示した。



正多面体
(5 種類 / 0 種類)

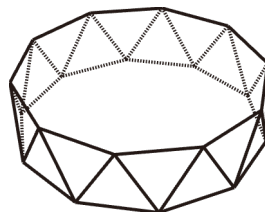


半正多面体
(7 種類 / 6 種類)



アルキメデスの n 角柱
($3 \leq n \leq 23$ / $n \geq 24$)

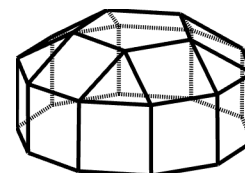
$24 \leq n \leq 42$ (19 種類)



アルキメデスの m 反角柱
($3 \leq n \leq 11$ / $m \geq 12$)

$12 \leq m \leq 32$ (21 種類)

3 種類



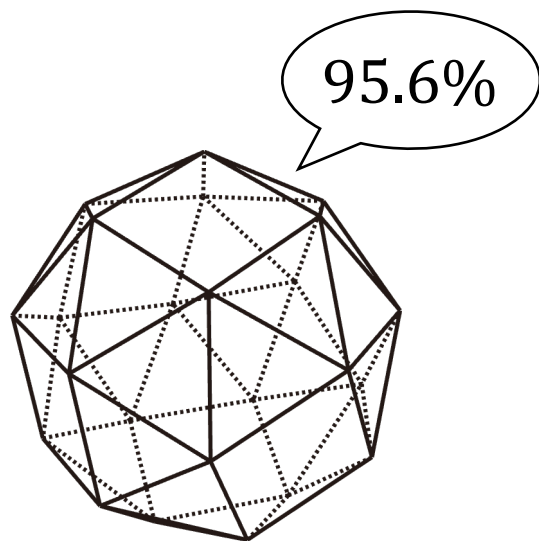
ジョンソンの立体
(48 種類 / 44 種類)

20 種類

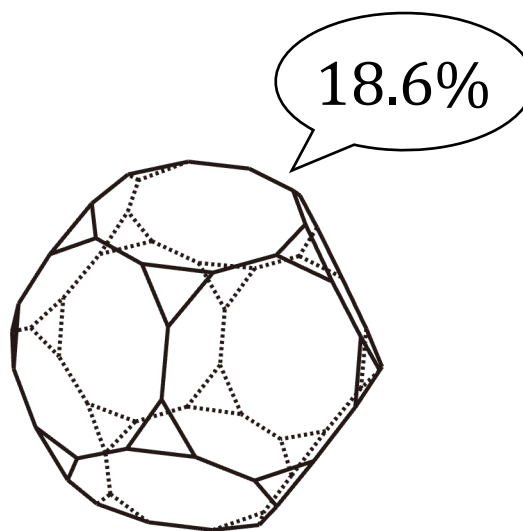
半正多面体における主結果



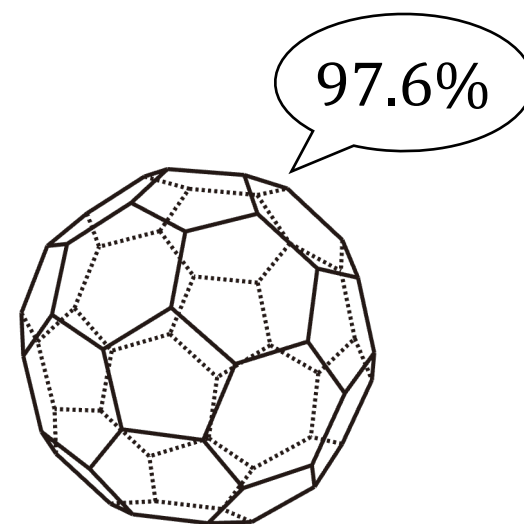
半正多面体	#(辺展開図) [T. Horiyama et al., 2013]	#(重なりを持たない辺展開図)
変形立方体	89,904,012,853,248	85,967,688,920,076
切頂十二面体	4,982,259,375,000,000,000	931,603,573,888,462,350
切頂二十面体	375,291,866,372,898,816,000	366,359,657,802,290,909,354



変形立方体



切頂十二面体

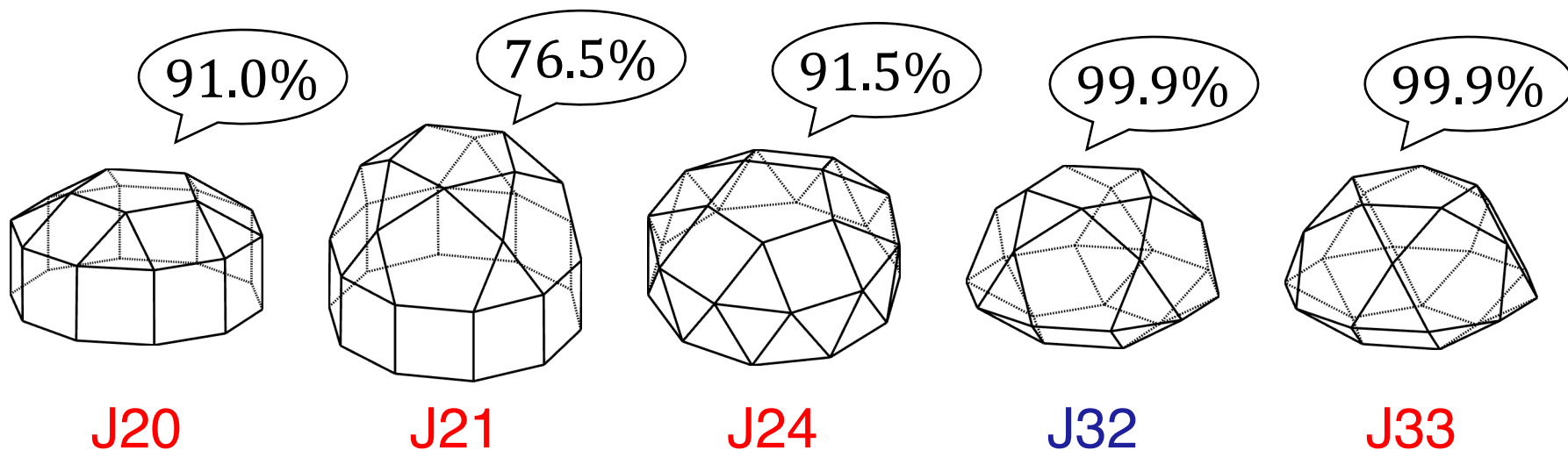


切頂二十面体

ジョンソンの立体における主結果 (1)



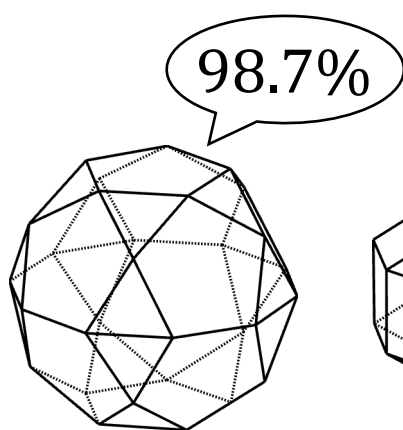
ジョンソンの立体	#(辺展開図) [T. Horiyama et al., 2013]	#(重なりを持たない辺展開図)
J20	29,821,320,745	27,158,087,415
J21	8,223,103,375,490	6,297,186,667,720
J24	5,996,600,870,820	5,492,624,228,190
J32	699,537,024,120	699,433,603,320
J33	745,208,449,920	745,198,979,400



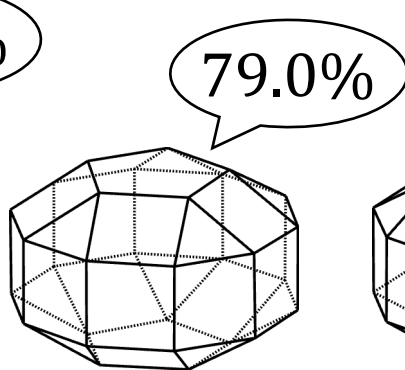
ジョンソンの立体における主結果 (2)



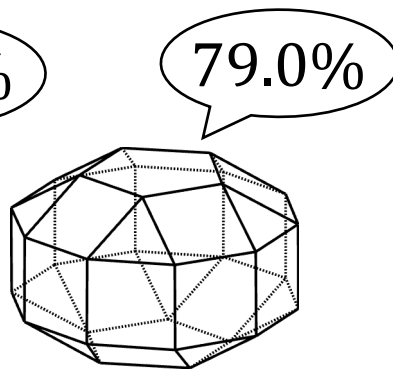
ジョンソンの立体	#(辺展開図) [T. Horiyama et al., 2013]	#(重なりを持たない辺展開図)
J34	193,003,269,869,040	190,653,702,525,040
J38	270,745,016,304,350	214,085,775,357,270
J39	272,026,496,000,000	215,087,798,524,180
J44	5,295,528,588	5,231,781,954
J45	13,769,880,349,680	13,386,219,088,644



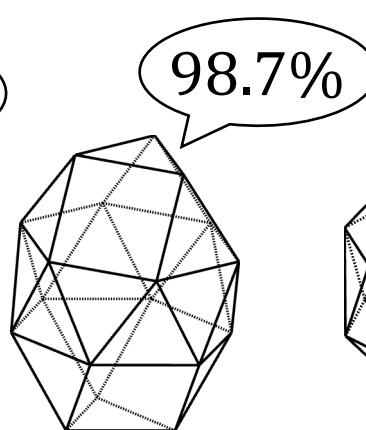
J34



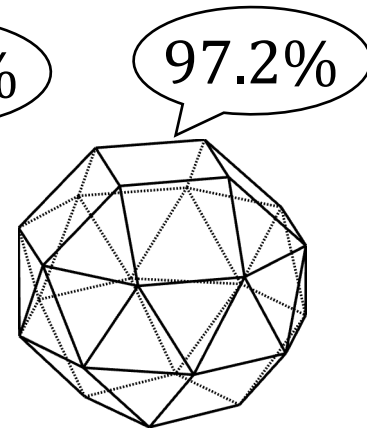
J38



J39



J44

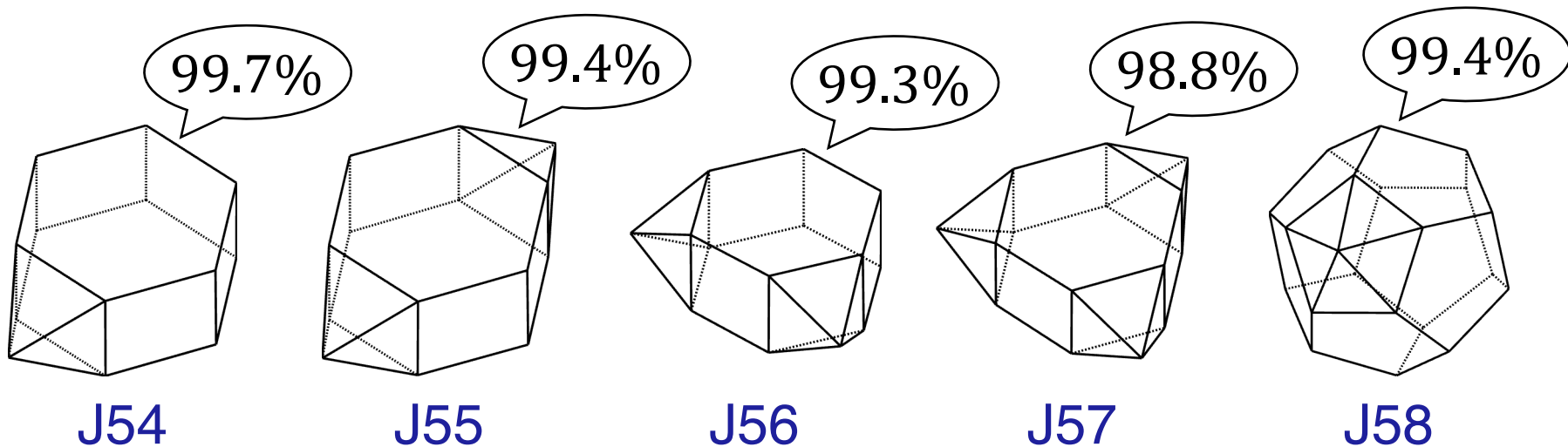


J45

ジョンソンの立体における主結果 (3)



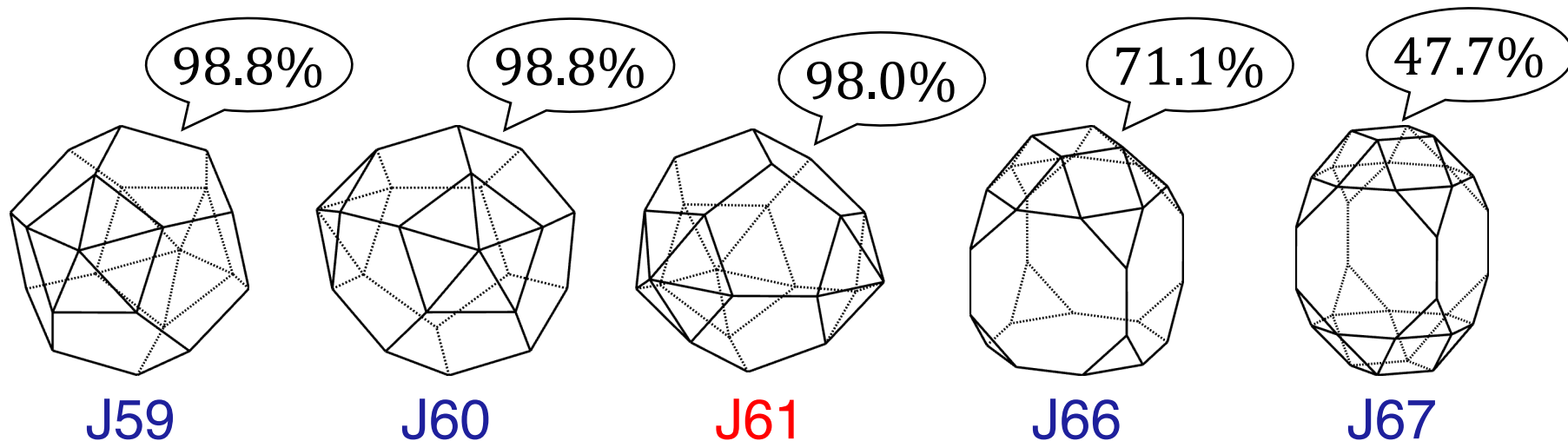
ジョンソンの立体	#(辺展開図) [T. Horiyama et al., 2013]	#(重なりを持たない辺展開図)
J54	75,973	75,749
J55	709,632	705,144
J56	707,232	702,520
J57	6,531,840	6,457,860
J58	92,724,962	92,219,782



ジョンソンの立体における主結果 (4)



ジョンソンの立体	#(辺展開図) [T. Horiyama et al., 2013]	#(重なりを持たない辺展開図)
J59	1,651,482,010	1,632,941,030
J60	1,641,317,568	1,621,738,522
J61	28,745,798,400	28,183,512,978
J66	54,921,311,280	39,055,563,000
J67	90,974,647,120,896	43,437,626,181,464

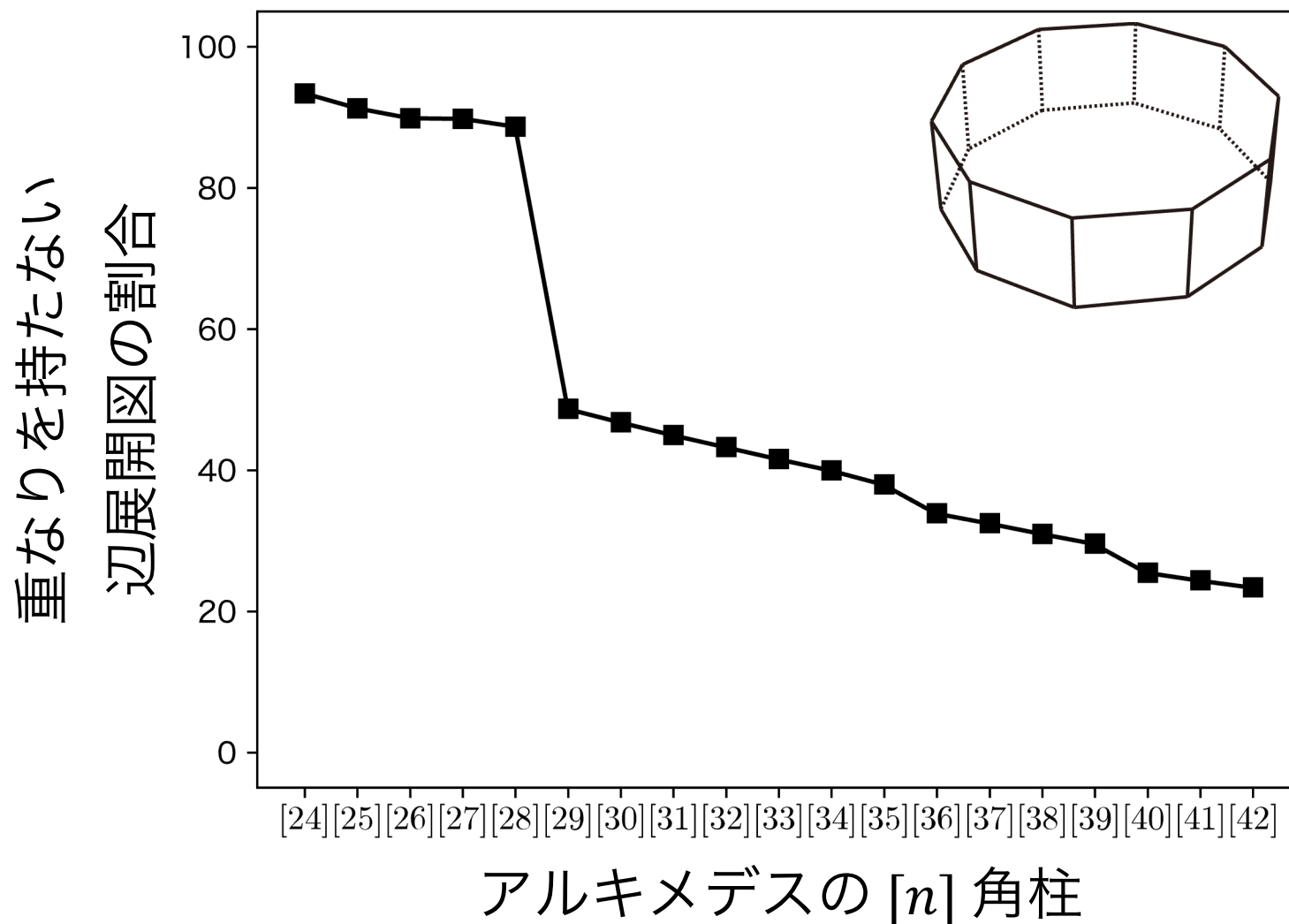


アルキメデスの角柱における主結果

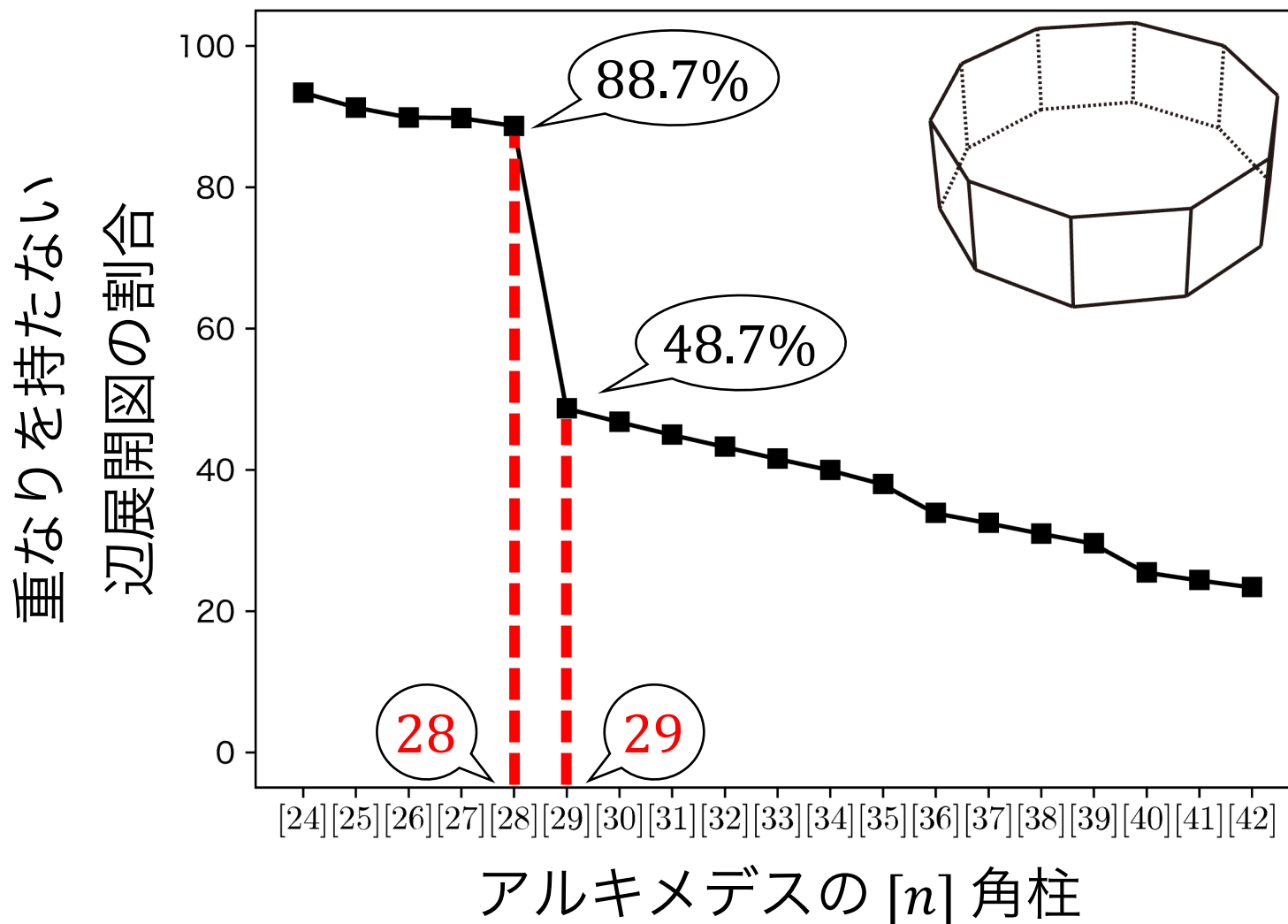


n 角柱	#(辺展開図) [T. Horiyama et al., 2013]	#(重なりを持たない辺展開図)
24 角柱	639,620,518,118,400	597,547,526,278,102
25 角柱	2,486,558,615,814,025	2,270,951,013,426,530
26 角柱	9,651,161,613,824,796	8,680,724,875,408,140
27 角柱	37,403,957,244,654,675	33,593,039,475,394,300
28 角柱	144,763,597,316,784,768	128,484,071,528,042,000
29 角柱	559,560,282,425,278,229	273,052,412,937,434,000
30 角柱	2,160,318,004,043,512,500	1,012,562,467,010,050,000
31 角柱	8,331,163,769,982,715,231	3,755,308,489,795,020,000
32 角柱	32,095,304,749,163,937,792	13,910,558,120,316,400,000
33 角柱	123,524,473,883,545,449,825	51,464,102,399,119,800,000
34 角柱	474,969,297,739,230,927,564	190,077,650,531,107,000,000
35 角柱	1,824,745,126,233,358,110,635	694,876,093,525,600,000,000
36 角柱	7,004,614,136,879,907,849,600	2,380,408,316,368,090,000,000
37 角柱	26,867,730,730,869,118,775,917	8,734,608,096,670,700,000,000
38 角柱	102,981,783,095,242,000,000,000	31,927,951,665,245,000,000,000
39 角柱	394,447,279,575,099,000,000,000	117,143,971,138,672,000,000,000
40 角柱	1,509,843,372,596,510,000,000,000	385,268,000,158,423,000,000,000
41 角柱	5,775,682,482,451,350,000,000,000	1,409,268,044,697,380,000,000,000
42 角柱	22,080,875,606,379,200,000,000,000	5,178,957,938,434,480,000,000,000

アルキメデスの角柱における主結果



アルキメデスの角柱における主結果

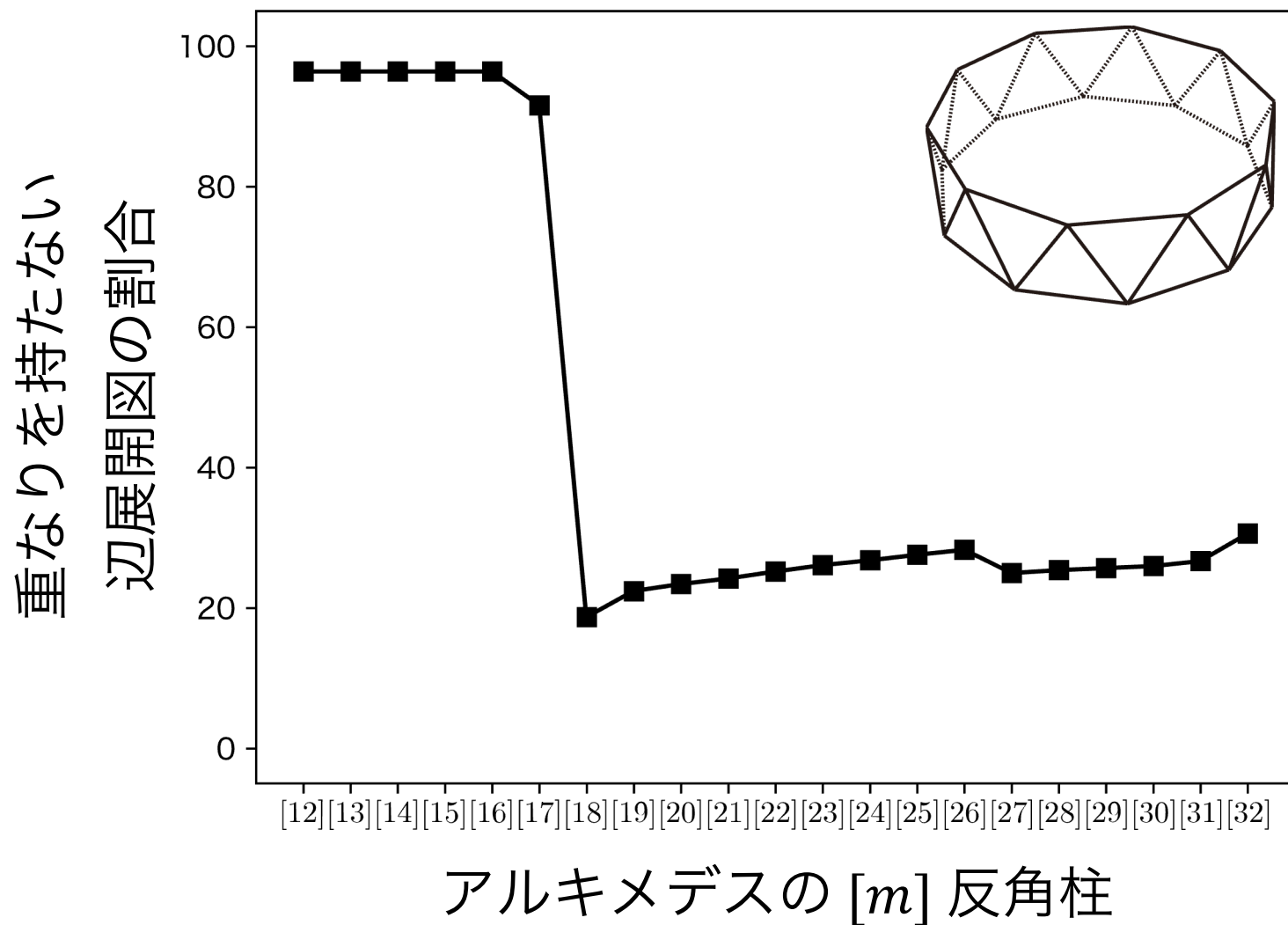


アルキメデスの反角柱における主結果

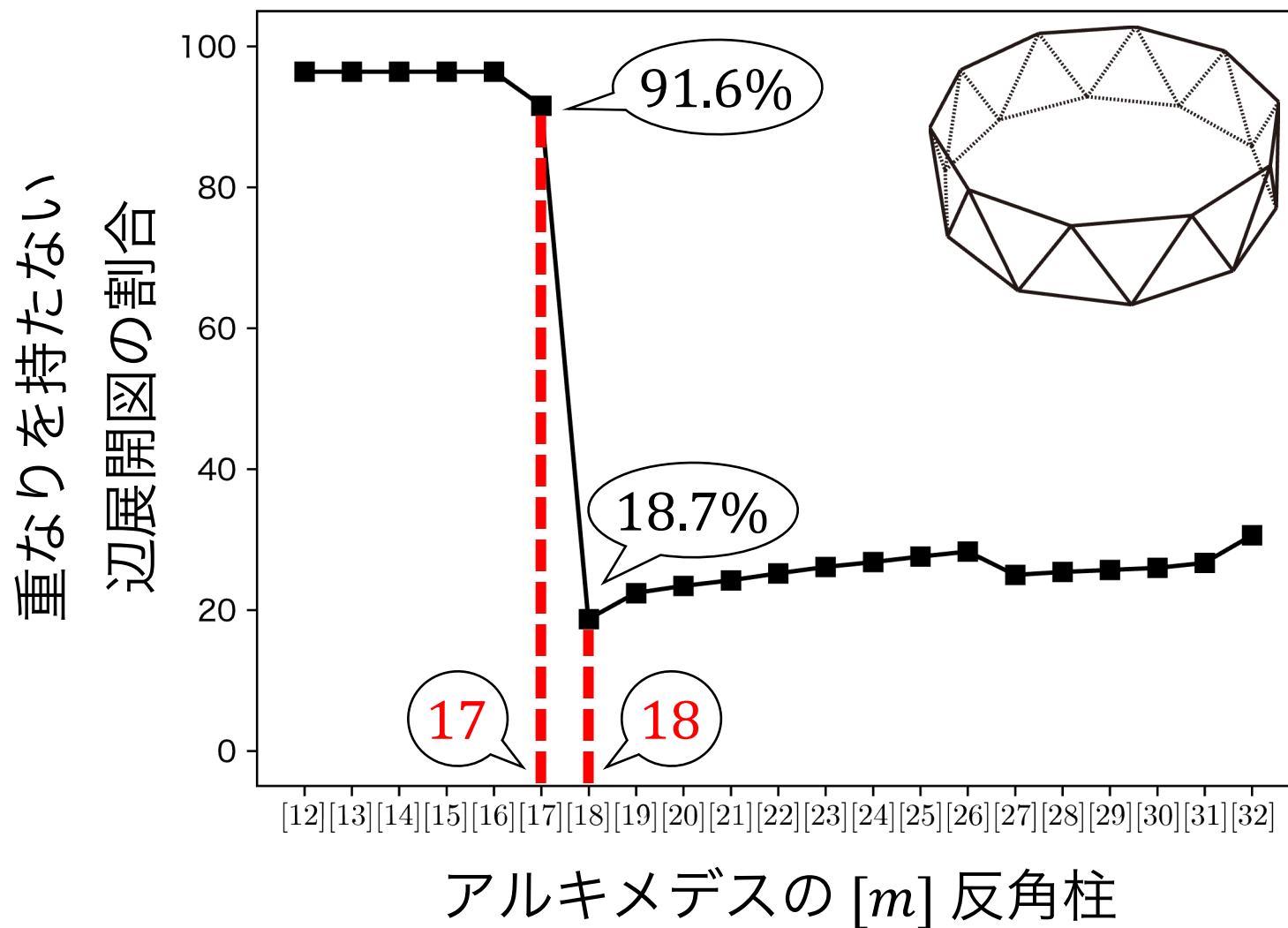


m 反角柱	#(辺展開図) [T. Horiyama et al., 2013]	#(重なりを持たない辺展開図)
12 反角柱	51,599,794,176	49,743,531,024
13 反角柱	383,142,771,674	369,359,503,344
14 反角柱	2,828,107,288,188	2,726,368,290,352
15 反角柱	20,768,716,848,000	20,021,578,135,380
16 反角柱	151,840,963,183,392	146,378,600,602,880
17 反角柱	1,105,779,284,582,140	1,013,491,325,102,940
18 反角柱	8,024,954,790,380,540	1,501,154,452,845,900
19 反角柱	58,059,628,319,357,300	13,038,527,513,687,400
20 反角柱	418,891,171,182,561,000	98,027,112,294,661,100
21 反角柱	3,014,678,940,049,370,000	732,157,627,679,302,000
22 反角柱	21,646,865,272,061,200,000	5,463,662,878,677,080,000
23 反角柱	155,113,904,634,576,000,000	40,508,628,620,513,100,000
24 反角柱	1,109,391,149,998,440,000,000	298,293,520,418,401,000,000
25 反角柱	7,920,708,398,483,720,000,000	2,188,171,009,006,050,000,000
26 反角柱	56,460,916,728,463,100,000,000	15,982,421,259,908,100,000,000
27 反角柱	401,873,068,071,158,000,000,000	100,599,073,148,261,000,000,000
28 反角柱	2,856,496,726,273,360,000,000,000	725,756,982,845,834,000,000,000
29 反角柱	20,277,959,821,998,000,000,000,000	5,224,196,129,087,410,000,000,000
30 反角柱	143,779,866,504,299,000,000,000,000	37,518,568,275,655,300,000,000,000
31 反角柱	1,018,331,261,238,040,000,000,000,000	272,565,329,790,964,000,000,000,000
32 反角柱	7,204,899,406,395,020,000,000,000,000	2,207,488,168,172,480,000,000,000,000

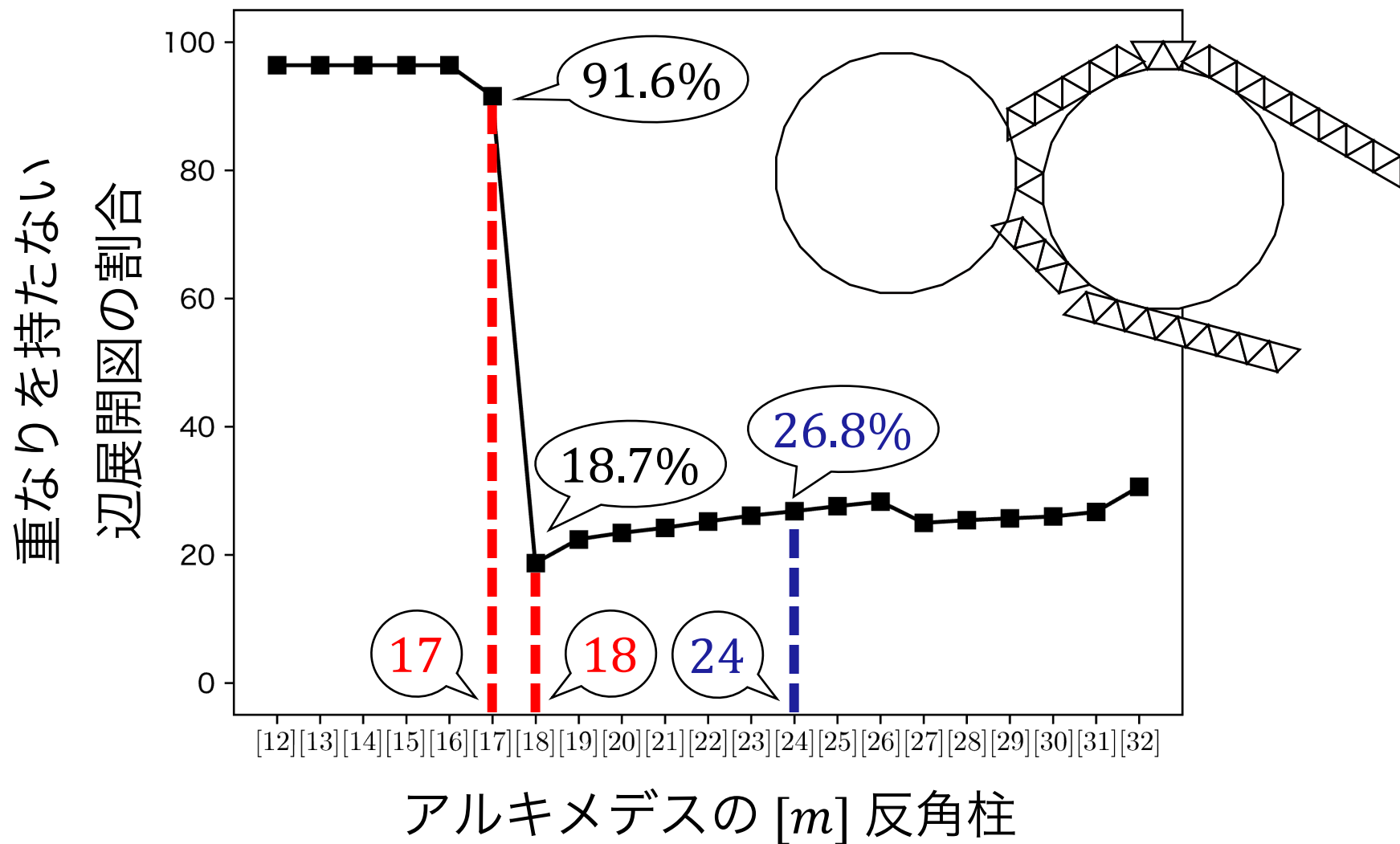
アルキメデスの反角柱における主結果



アルキメデスの反角柱における主結果



アルキメデスの反角柱における主結果

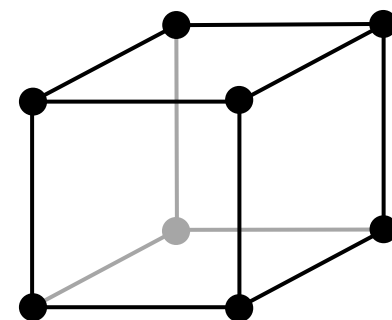


辺展開図の数え上げ（重なり有り含む）



定理 3 (双対) [R. Uehara, 2018]

多面体 Q の面の集合を V_Q ，隣接する2面を結ぶ辺の集合を E_Q とする時， Q はグラフ $G_Q = (V_Q, E_Q)$ として見る事ができる.



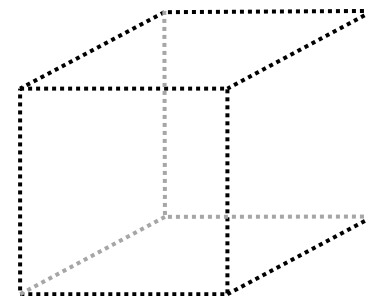
多面体 Q

辺展開図の数え上げ（重なり有り含む）



定理 3 (双対) [R. Uehara, 2018]

多面体 Q の面の集合を V_Q ，隣接する2面を結ぶ辺の集合を E_Q とする時， Q はグラフ $G_Q = (V_Q, E_Q)$ として見る事ができる。



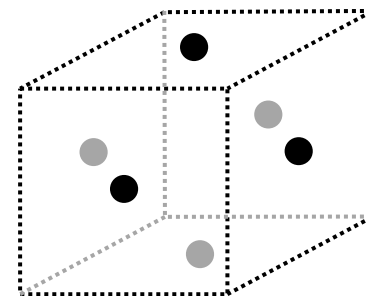
多面体 Q

辺展開図の数え上げ（重なり有り含む）



定理 3 (双対) [R. Uehara, 2018]

多面体 Q の面の集合を V_Q ，隣接する2面を結ぶ辺の集合を E_Q とする時， Q はグラフ $G_Q = (V_Q, E_Q)$ として見ることもできる。



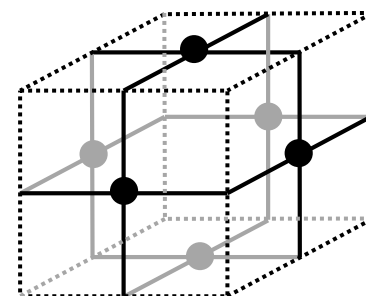
多面体 Q

辺展開図の数え上げ（重なり有り含む）



定理 3 (双対) [R. Uehara, 2018]

多面体 Q の面の集合を V_Q ，隣接する2面を結ぶ辺の集合を E_Q とする時， Q はグラフ $G_Q = (V_Q, E_Q)$ として見る事ができる.



多面体 Q

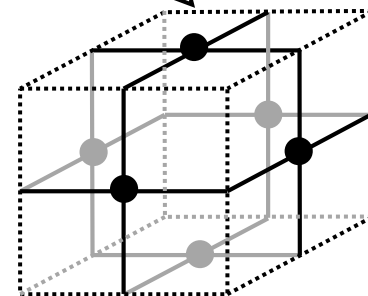
辺展開図の数え上げ (重な

$$G_Q = (V_Q, E_Q)$$



定理 3 (双対) [R. Uehara, 2018]

多面体 Q の面の集合を V_Q , 隣接する2面を結ぶ辺の集合を E_Q とする時, Q はグラフ $G_Q = (V_Q, E_Q)$ として見る事ができる.



多面体 Q

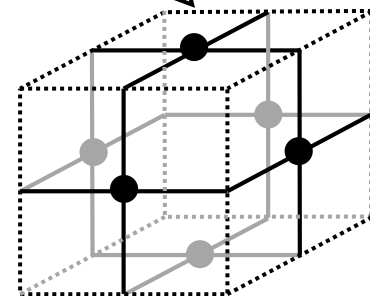
辺展開図の数え上げ (重な

$$G_Q = (V_Q, E_Q)$$



定理 3 (双対) [R. Uehara, 2018]

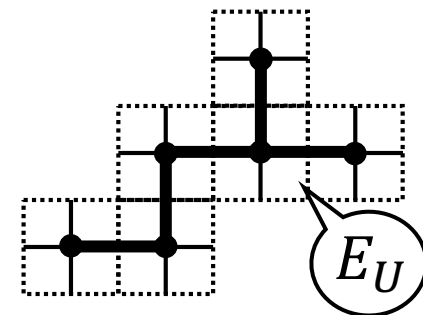
多面体 Q の面の集合を V_Q , 隣接する2面を結ぶ辺の集合を E_Q とする時, Q はグラフ $G_Q = (V_Q, E_Q)$ として見る事ができる.



多面体 Q

定理 4 [R. Uehara, 2018]

Q を辺展開する際に切断されない辺の集合を $E_U (\subset E_Q)$ とする. このとき, E_U はグラフ G_Q の全域木と対応する.



辺展開図 U

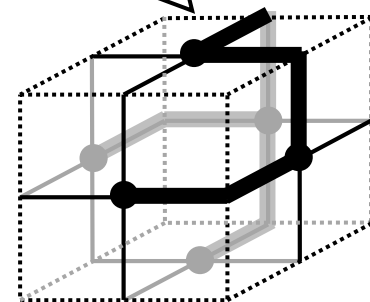
辺展開図の数え上げ (重な

$$G_Q = (V_Q, E_Q)$$



定理 3 (双対) [R. Uehara, 2018]

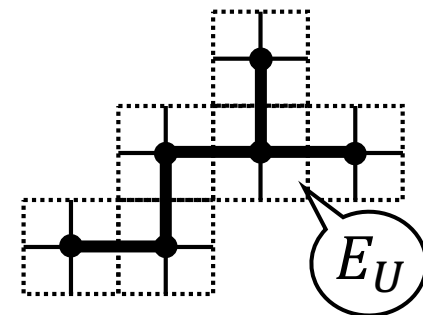
多面体 Q の面の集合を V_Q , 隣接する2面を結ぶ辺の集合を E_Q とする時, Q はグラフ $G_Q = (V_Q, E_Q)$ として見る事ができる.



多面体 Q

定理 4 [R. Uehara, 2018]

Q を辺展開する際に切断されない辺の集合を $E_U (\subset E_Q)$ とする. このとき, E_U はグラフ G_Q の全域木と対応する.



辺展開図 U

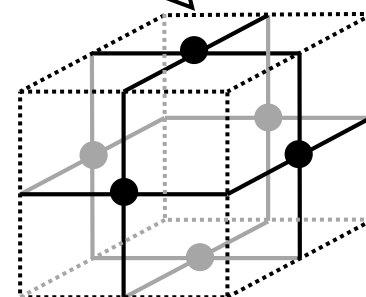
辺展開図の数え上げ (重な

$$G_Q = (V_Q, E_Q)$$



定理 3 (双対) [R. Uehara, 2018]

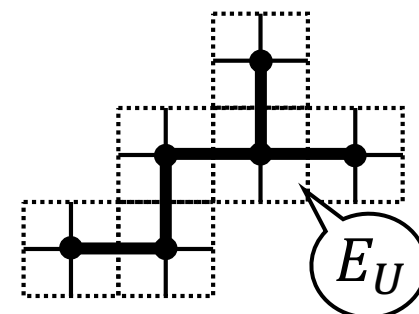
多面体 Q の面の集合を V_Q , 隣接する2面を結ぶ辺の集合を E_Q とする時, Q はグラフ $G_Q = (V_Q, E_Q)$ として見る事ができる.



多面体 Q

定理 4 [R. Uehara, 2018]

Q を辺展開する際に切断されない辺の集合を $E_U (\subset E_Q)$ とする. このとき, E_U はグラフ G_Q の全域木と対応する.



辺展開図 U

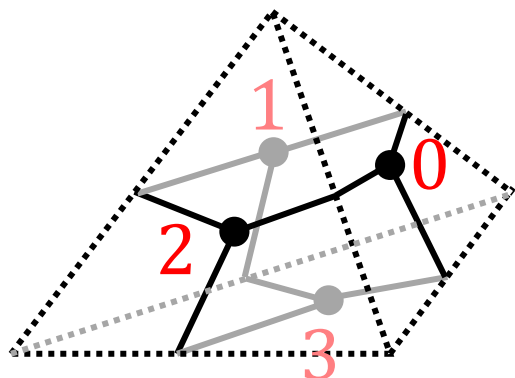
要するに...

Q の辺展開図の個数の数え上げ = G_Q の全域木の個数の数え上げ

辺展開図の数え上げ（重なり有り含む）

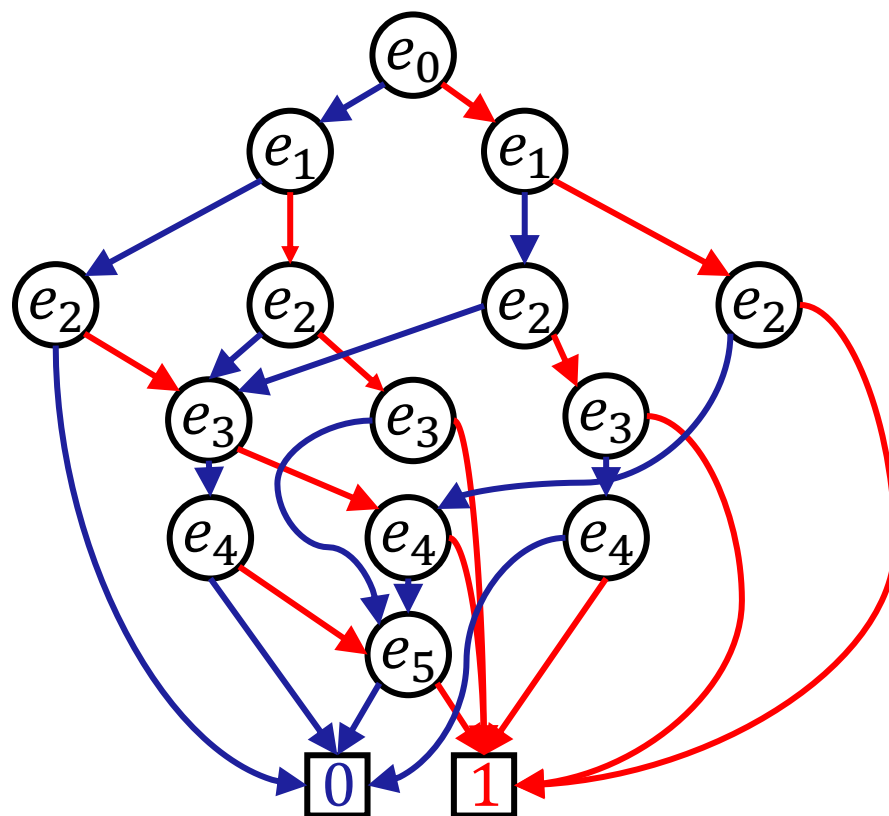


G_Q の全域木の個数は **ZDD** を用いて数え上げることができる



$$G_Q = (V_Q, E_Q)$$

辺 e_0 : 頂点 0 — 頂点 2
辺 e_1 : 頂点 0 — 頂点 1
辺 e_2 : 頂点 0 — 頂点 3
辺 e_3 : 頂点 1 — 頂点 2
辺 e_4 : 頂点 1 — 頂点 3
辺 e_5 : 頂点 2 — 頂点 3

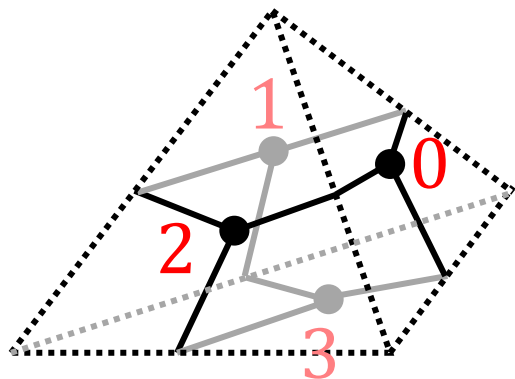


G_Q の全域木を表す ZDD

集合族を非巡回有向グラフを用いて
コンパクトに表すデータ構造

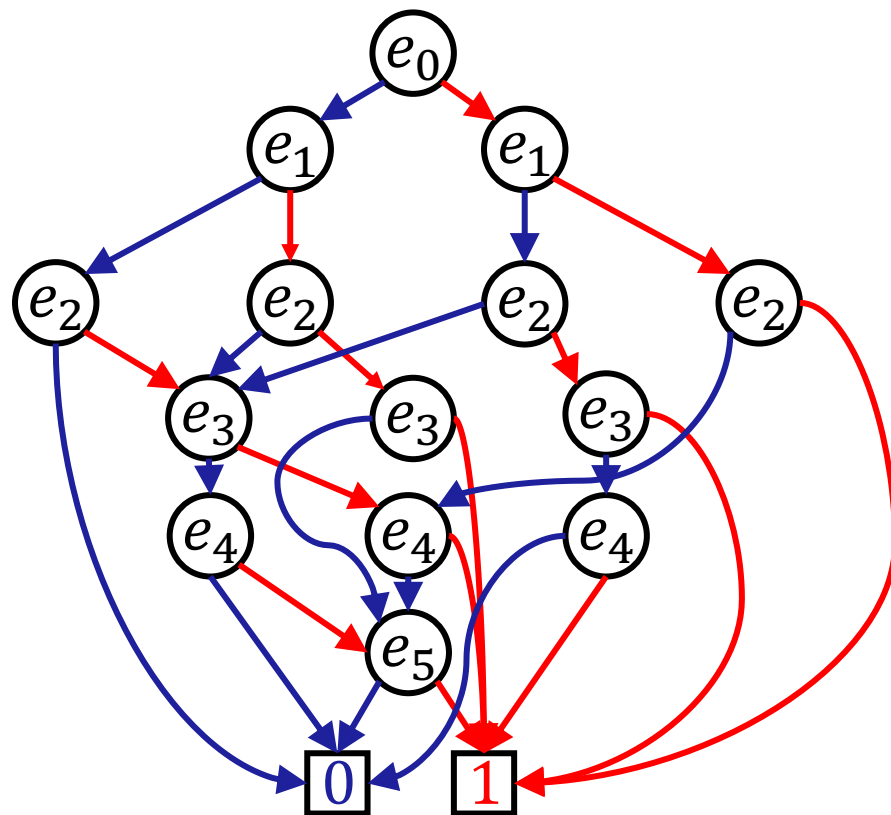
→ : 辺 e_i を選択する
→ : 辺 e_i を選択しない

G_Q の全域木の個数は **ZDD** を用いて数え上げることができる



$$G_Q = (V_Q, E_Q)$$

辺 e_0 : 頂点 0 — 頂点 2
 辺 e_1 : 頂点 0 — 頂点 1
 辺 e_2 : 頂点 0 — 頂点 3
 辺 e_3 : 頂点 1 — 頂点 2
 辺 e_4 : 頂点 1 — 頂点 3
 辺 e_5 : 頂点 2 — 頂点 3

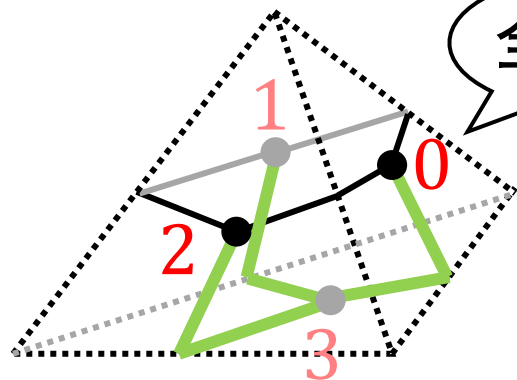


G_Q の全域木を表す ZDD

集合族を非巡回有向グラフを用いて
コンパクトに表すデータ構造

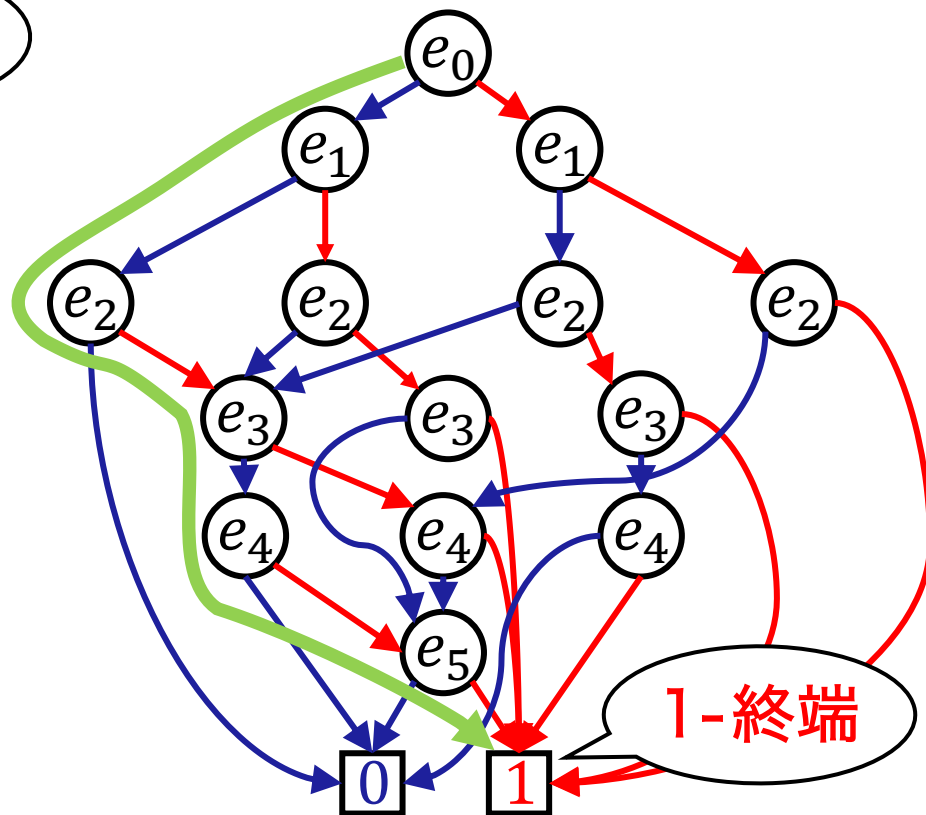
\rightarrow : 辺 e_i を選択する
 \dashrightarrow : 辺 e_i を選択しない

G_Q の全域木の個数は **ZDD** を用いて数え上げることができる



$$G_Q = (V_Q, E_Q)$$

辺 e_0 : 頂点 0 — 頂点 2
辺 e_1 : 頂点 0 — 頂点 1
辺 e_2 : 頂点 0 — 頂点 3
辺 e_3 : 頂点 1 — 頂点 2
辺 e_4 : 頂点 1 — 頂点 3
辺 e_5 : 頂点 2 — 頂点 3

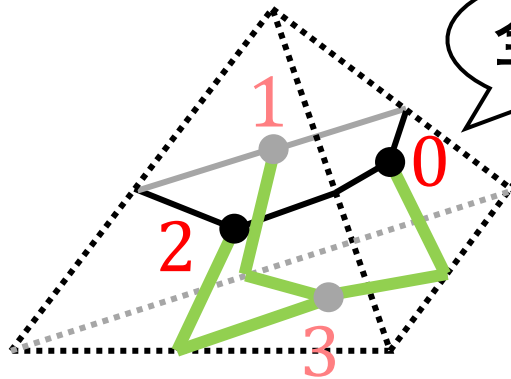


G_Q の全域木を表す ZDD

集合族を非巡回有向グラフを用いて
コンパクトに表すデータ構造

\rightarrow : 辺 e_i を選択する
 \dashrightarrow : 辺 e_i を選択しない

G_Q の全域木の個数は **ZDD** を用いて数え上げることができる



全域木

$$G_Q = (V_Q, E_Q)$$

辺 e_0 : 頂点 0 - 頂点 2

辺 e_1 :

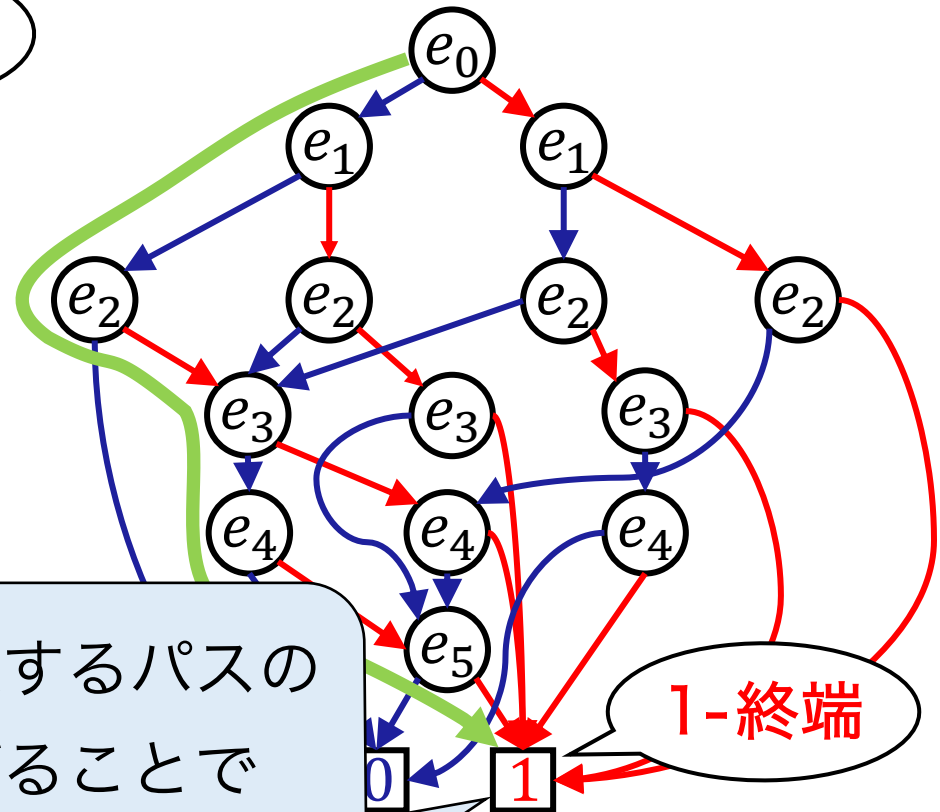
辺 e_2 :

辺 e_3 :

辺 e_4 :

辺 e_5 :

1-終端節点に到達するパスの
本数を数え上げることで
全域木の個数は数え上げ可能



1-終端

全域木を表す ZDD

重なりを持たない辺展開図の数え上げ



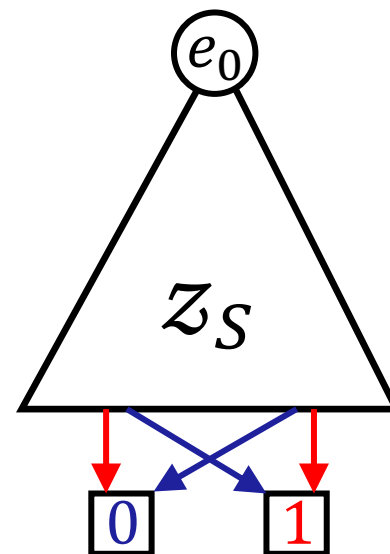
➤ 貪欲的な手法 [T. Horiyama and W. Shoji., 2011]

Step 1. 全域木の個数を数え上げる

ZDD を構築する

Step 2. $\boxed{1}$ の節点に到達する集合を
列挙する (ZDD を展開する)

Step 3. 各集合に対応する辺展開図が
重なりを持つか確認



- ✓ $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_n\}$
- ✓ $\{e_0, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}\}$
- ⋮
- ✓ $\{e_2, e_3, e_5, \dots, e_n\}$

重なりを持たない辺展開図の数え上げ



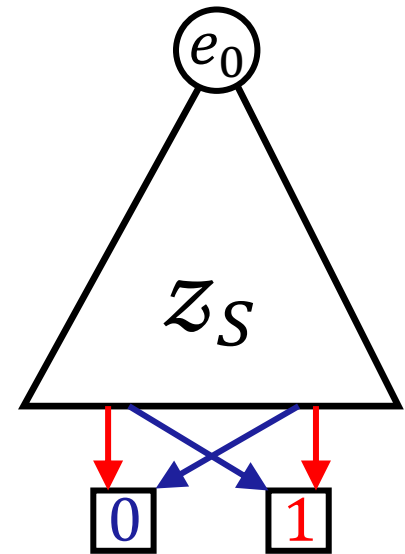
➤ 貪欲的な手法 [T. Horiyama and W. Shoji., 2011]

Step 1. 全域木の個数を数え上げる

ZDD を構築する

Step 2. 1 の節点に到達する集合を
列挙する (ZDD を展開する)

Step 3. 各集合に対応する辺展開図が
重なりを持つか確認



- ✓ $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_n\}$
- ✓ $\{e_0, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}\}$
- ⋮
- ✓ $\{e_2, e_3, e_5, \dots, e_n\}$

重なりを持たない辺展開図の数え上げ



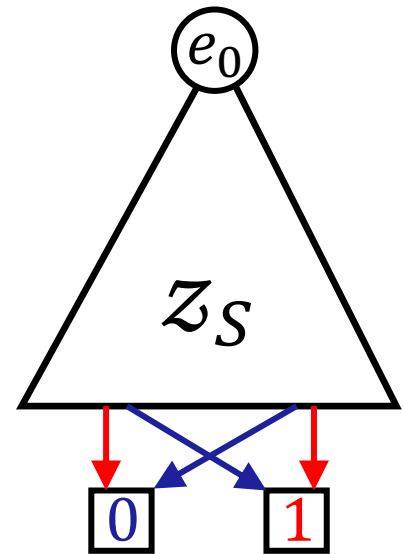
➤ 貪欲的な手法 [T. Horiyama and W. Shoji., 2011]

Step 1. 全域木の個数を数え上げる

ZDD を構築する

Step 2. 1 の節点に到達する集合を
列挙する (ZDD を展開する)

Step 3. 各集合に対応する辺展開図が
重なりを持つか確認



✓ $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_n\}$

~~✓ $\{e_0, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}\}$~~

⋮

~~✓ $\{e_2, e_3, e_5, \dots, e_n\}$~~

重なりを持たない辺展開図の数え上げ



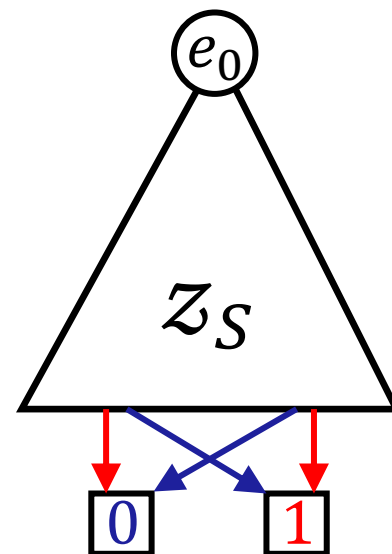
➤ 貪欲的な手法 [T. Horiyama and W. Shoji., 2011]

Step 1. 全域木の個数を数え上げる

ZDD を構築する

Step 2. 1 の節点に到達する集合を
列挙する (ZDD を展開する)

Step 3. 各集合に対応する辺展開図が
重なりを持つか確認



辺展開図が莫大にあると
現実的な時間で確認できない

~~✓ {e_0, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}}~~

⋮

~~✓ {e_2, e_3, e_5, \dots, e_n}~~

重なりを持たない辺展開図の数え上げ

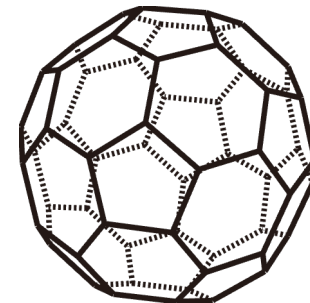


➤ 貪欲的な手法 [T. Horiyama and W. Shoji., 2006]

Step 1. 全域木の個数を数え上げる
ZDD を構築する

Step 2. 1 の節点に到達する集合を
列挙する (ZDD を展開する)

Step 3. 各集合に対応する辺展開図が
重なりを持つか確認



切頂二十面体

#(辺展開図) ≈ 3.75 垓個
(億 \rightarrow 兆 \rightarrow 京 \rightarrow 垓)

辺展開図が莫大にあると
現実的な時間で確認できない

~~✓ $\{e_0, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}\}$~~

\vdots

~~✓ $\{e_2, e_3, e_5, \dots, e_n\}$~~

重なりを持たない辺展開図の数え上げ



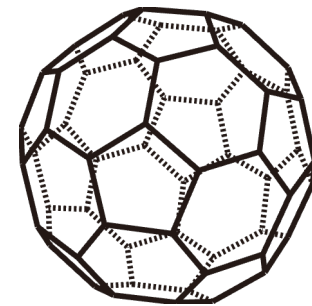
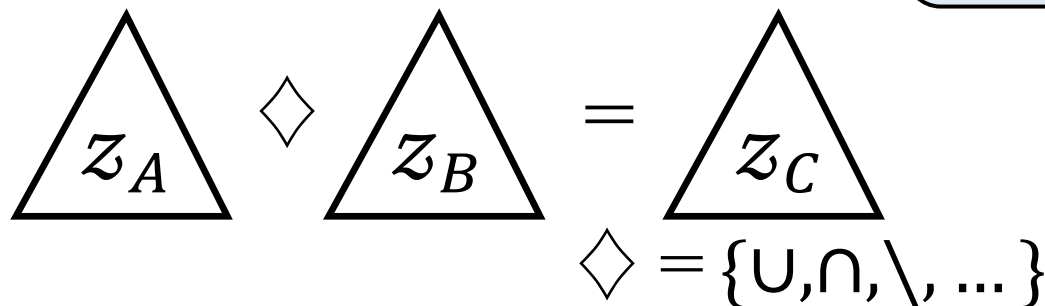
- 貪欲的な手法 [T. Horiyama and W. Shoji., 2006]

Step 1. 全域木の個数を数え上げる
ZDD を構築する

Step 2. ① の節点に到達する集合を
列挙する (ZDD を展開する)

Step 3. 各集合に対応する辺展開図が
重なりを持つか確認

- ZDD における演算体系



切頂二十面体

#(辺展開図) ≈ 3.75 垓個
(億 \rightarrow 兆 \rightarrow 京 \rightarrow 垓)

辺展開図が莫大にあると
現実的な時間で確認できない

~~$\{e_0, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}\}$~~

\vdots

~~$\{e_2, e_3, e_5, \dots, e_n\}$~~

重なりを持たない辺展開図の数え上げ



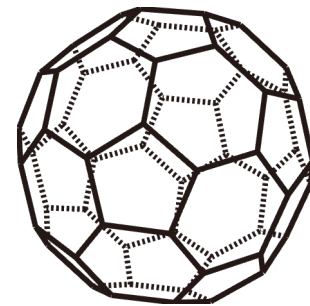
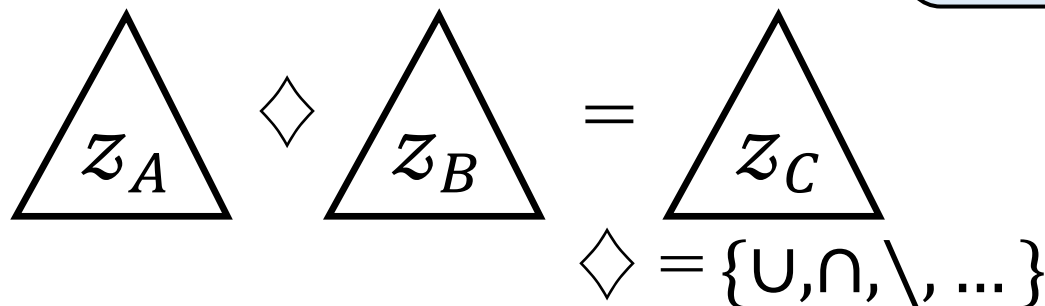
➤ 貪欲的な手法 [T. Horiyama and W. Shoji., 2006]

Step 1. 全域木の個数を数え上げる
ZDD を構築する

Step 2. ① の節点に到達する集合を
列挙する (ZDD を展開する)

Step 3. 各集合に対応する辺展開図が
重なりを持つか確認

➤ ZDD における演算体系



切頂二十面体

#(辺展開図) ≈ 3.75 垓個
(億 \rightarrow 兆 \rightarrow 京 \rightarrow 垓)

辺展開図が莫大にあると
現実的な時間で確認できない

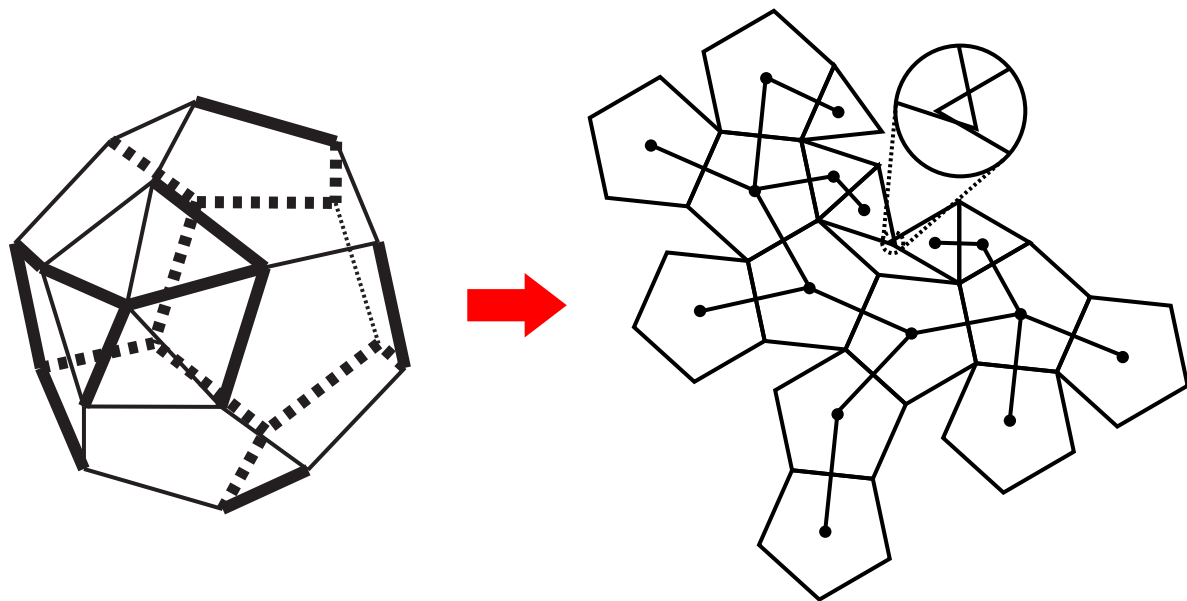
ポイント

ZDD の演算を用いて
効率的に数え上げた.

重なりを持たない辺展開図の数え上げ



重なりを持つ辺展開図の観察

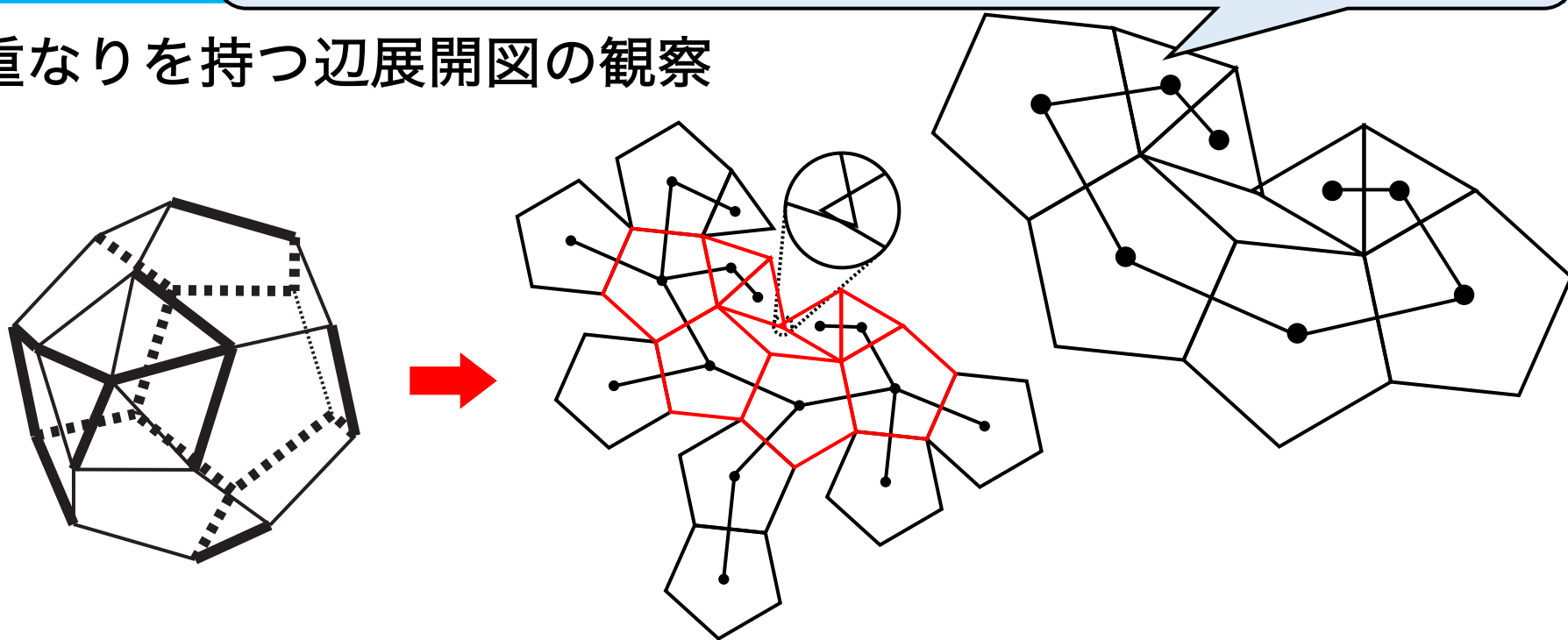


全域木における辺の集合 $E_T = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, \dots, e_{21}\}$

重なり

極小な重なりを持つ部分辺展開図 C_1
(Minimal overlapping partial edge unfolding: **MOPE**)

重なりを持つ辺展開図の観察

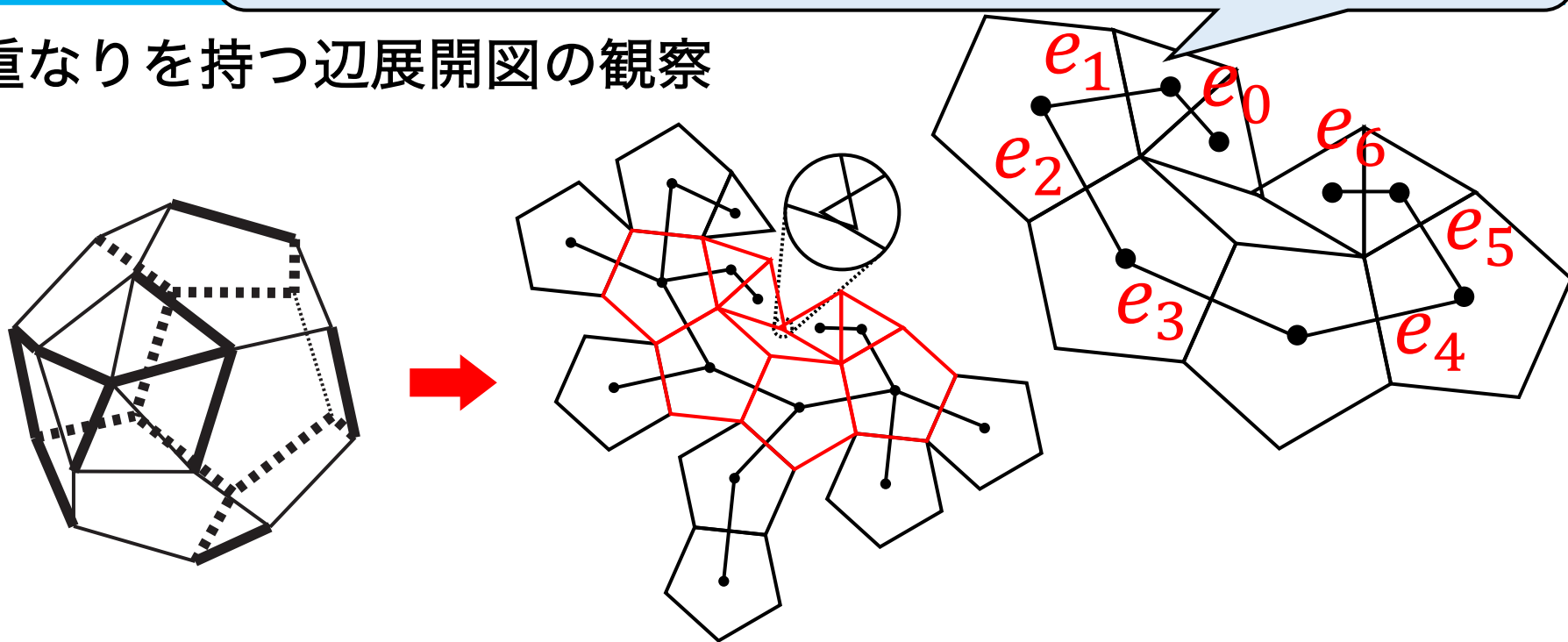


全域木における辺の集合 $E_T = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, \dots, e_{21}\}$

重なり

極小な重なりを持つ部分辺展開図 C_1
(Minimal overlapping partial edge unfolding: **MOPE**)

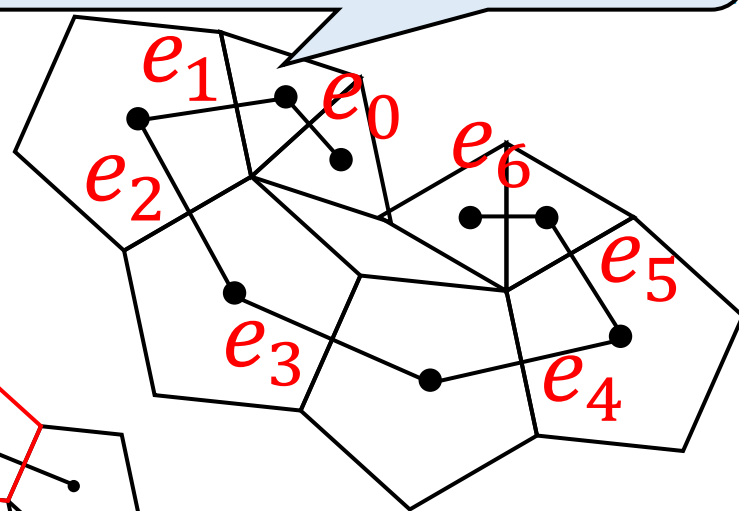
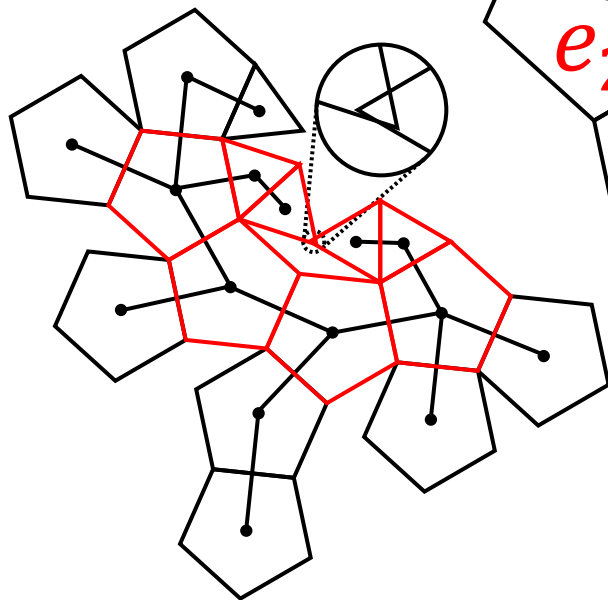
重なりを持つ辺展開図の観察



全域木における辺の集合 $E_T = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, \dots, e_{21}\}$

MOPE C_1 における辺の集合 $E_{C_1} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

極小な重なりを持つ部分辺展開図 c_1
(Minimal overlapping partial edge unfolding: **MOPE**)



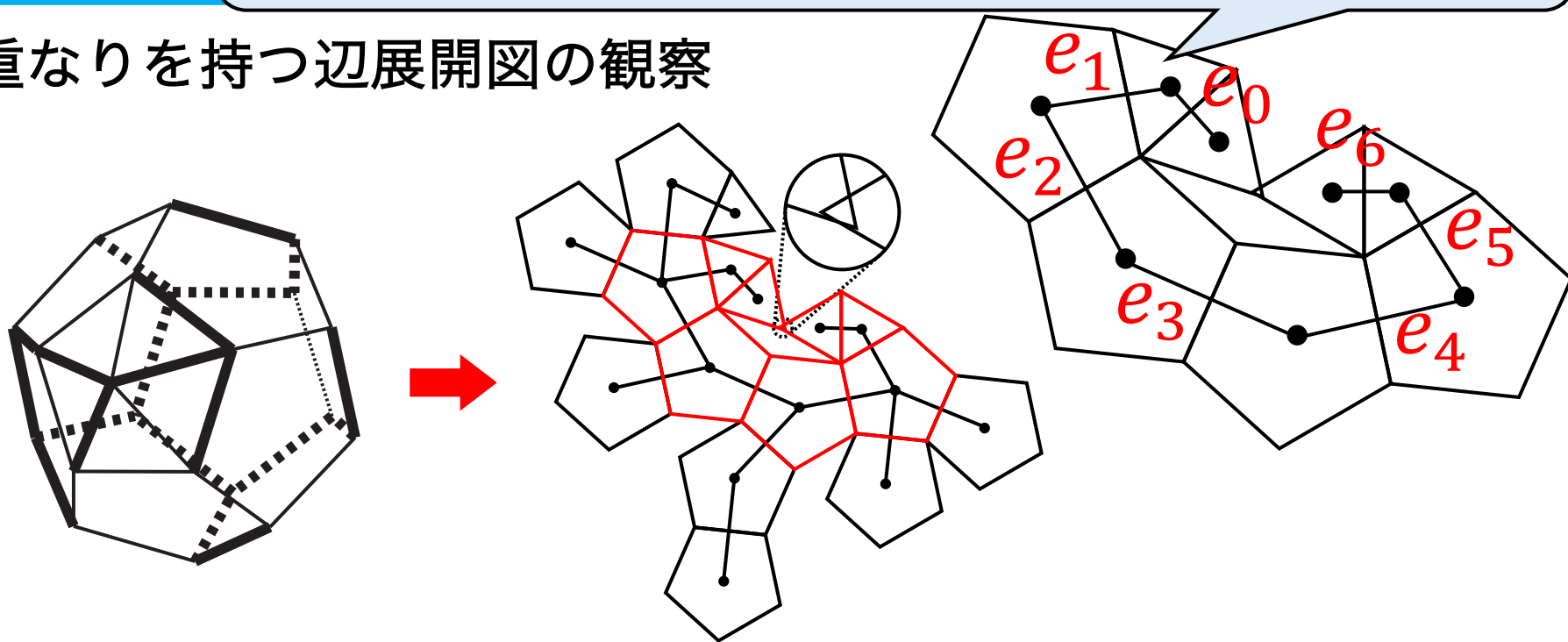
MOPE C_1 における辺の集合 $E_{C_1} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

- $E_{C_1} \subset E_T$ ➡ 辺展開図は必ず重なりを持つ
- $E_{C_1} \not\subset E_T$ ➡ 辺展開図は MOPE C_1 の構造で重ならない

重なり

極小な重なりを持つ部分辺展開図 C_1
(Minimal overlapping partial edge unfolding: **MOPE**)

重なりを持つ辺展開図の観察



全域木における辺の集合 $E_T = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, \dots, e_{21}\}$

MOPE C_1 における辺の集合 $E_{C_1} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

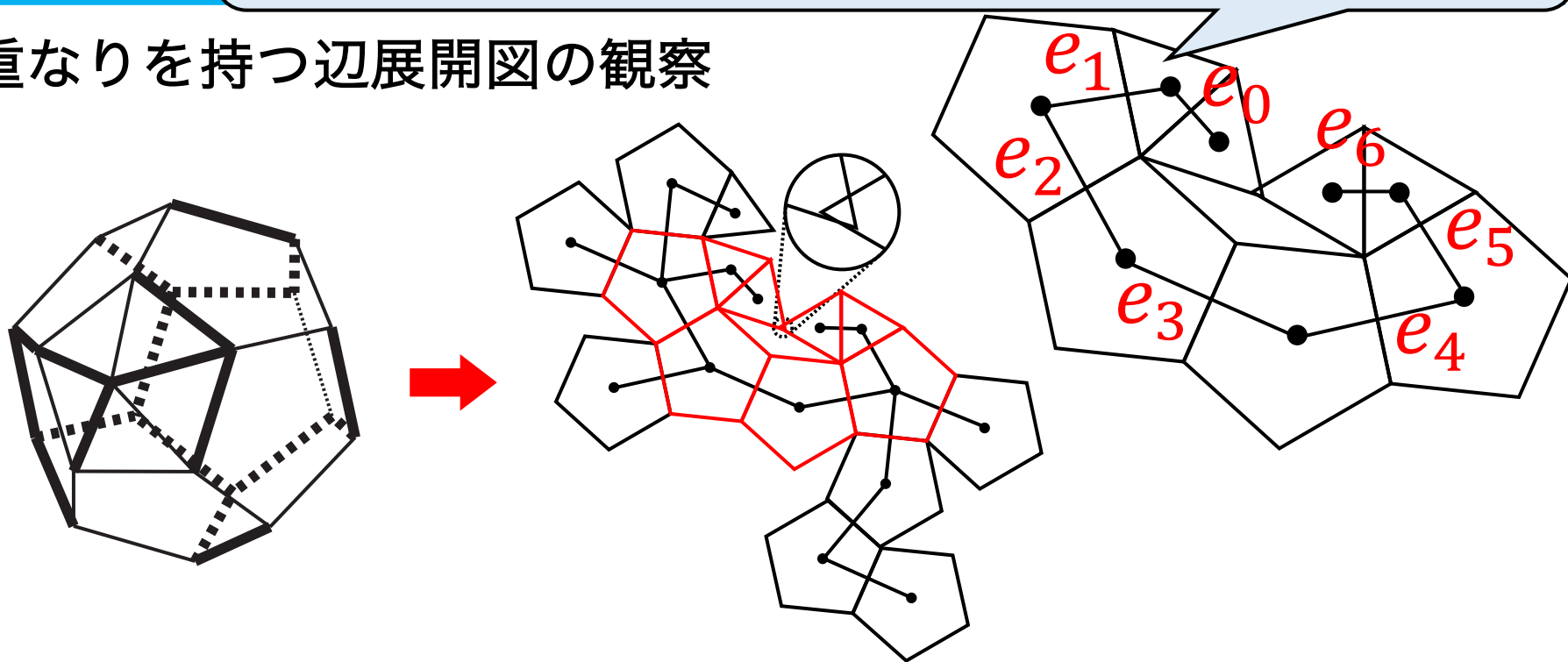
➤ $E_{C_1} \subset E_T \rightarrow$ 辺展開図は必ず重なりを持つ

➤ $E_{C_1} \not\subset E_T \rightarrow$ 辺展開図は MOPE C_1 の構造で重ならない

重なり

極小な重なりを持つ部分辺展開図 C_1
(Minimal overlapping partial edge unfolding: **MOPE**)

重なりを持つ辺展開図の観察



全域木における辺の集合 $E_T = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, a, \dots, x\}$

MOPE C_1 における辺の集合 $E_{C_1} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

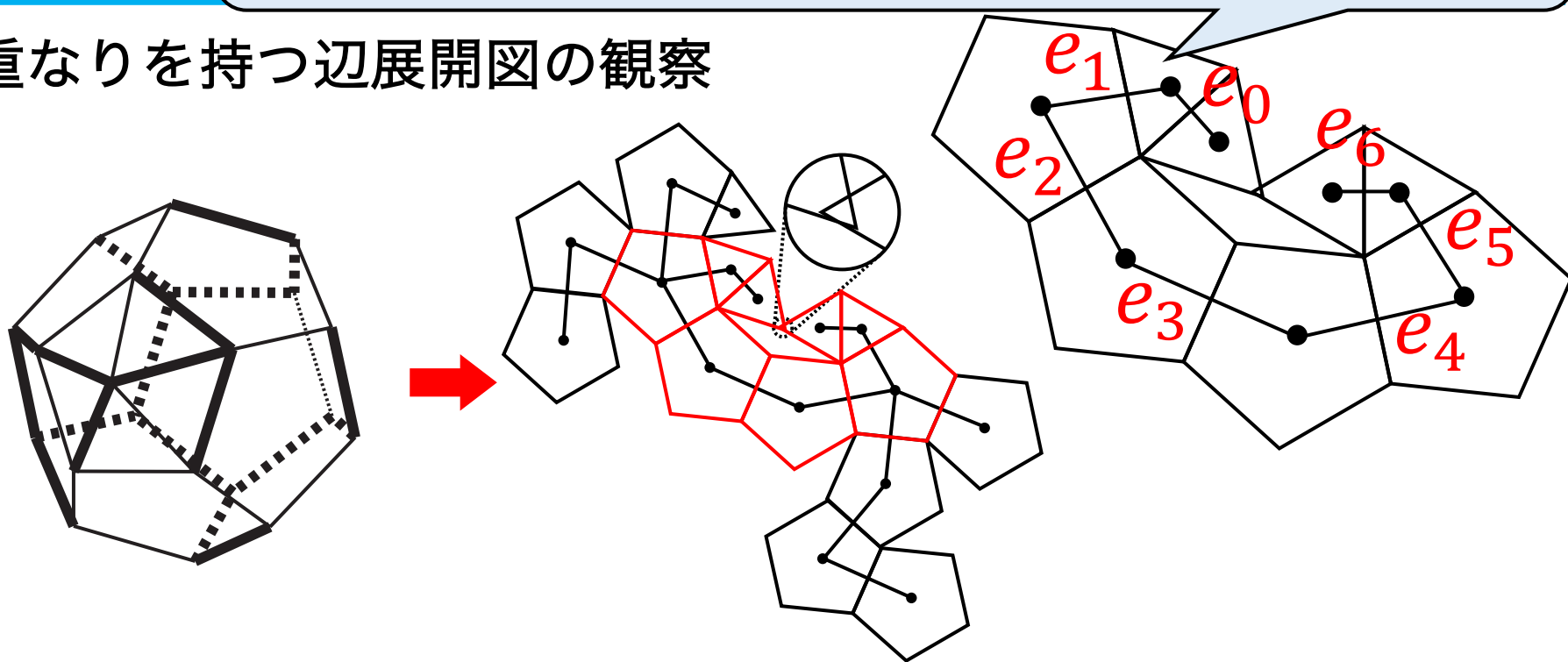
➤ $E_{C_1} \subset E_T \rightarrow$ 辺展開図は必ず重なりを持つ

➤ $E_{C_1} \subsetneq E_T \rightarrow$ 辺展開図は MOPE C_1 の構造で重ならない

重なり

極小な重なりを持つ部分辺展開図 C_1
(Minimal overlapping partial edge unfolding: **MOPE**)

重なりを持つ辺展開図の観察



全域木における辺の集合 $E_T = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, a, \dots, y\}$

MOPE C_1 における辺の集合 $E_{C_1} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

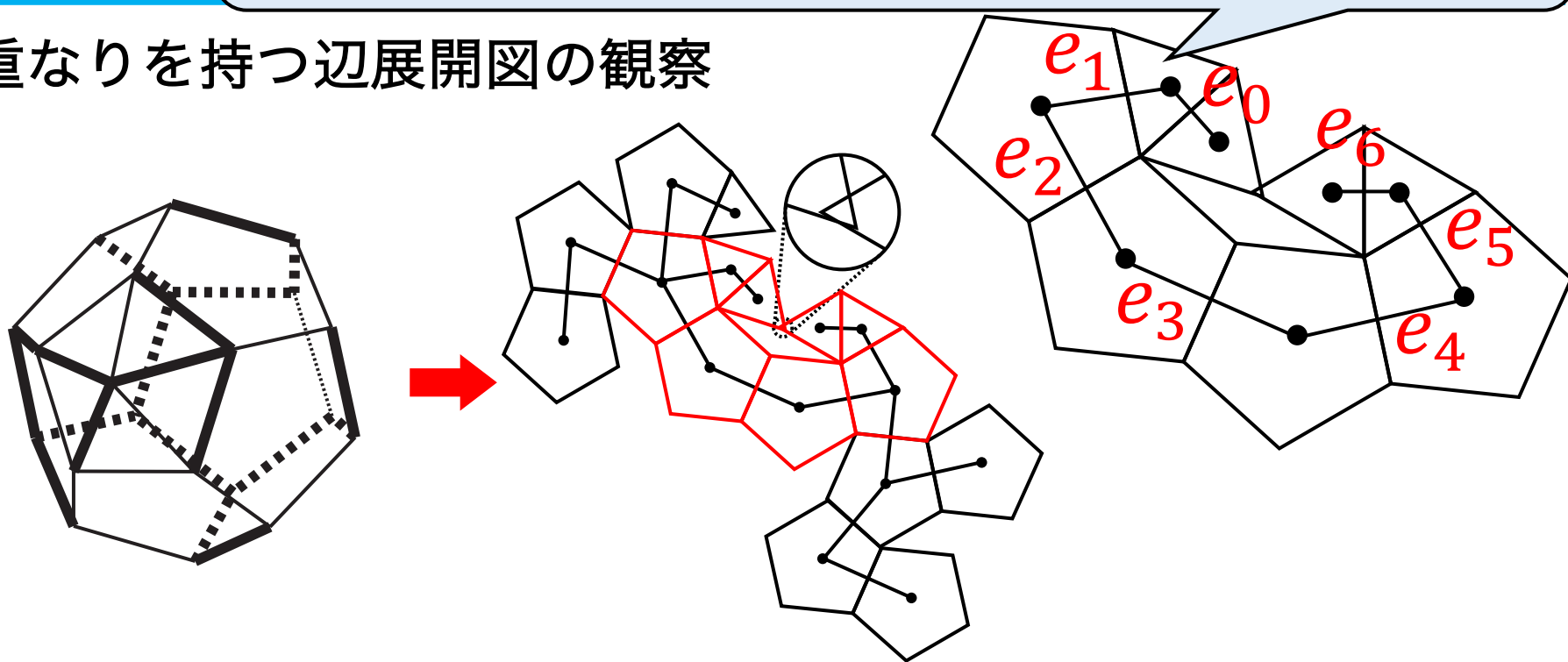
➤ $E_{C_1} \subset E_T \rightarrow$ 辺展開図は必ず重なりを持つ

➤ $E_{C_1} \subsetneq E_T \rightarrow$ 辺展開図は MOPE C_1 の構造で重ならない

重なり

極小な重なりを持つ部分辺展開図 C_1
(Minimal overlapping partial edge unfolding: **MOPE**)

重なりを持つ辺展開図の観察



全域木における辺の集合 $E_T = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, b, \dots, y\}$

MOPE C_1 における辺の集合 $E_{C_1} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

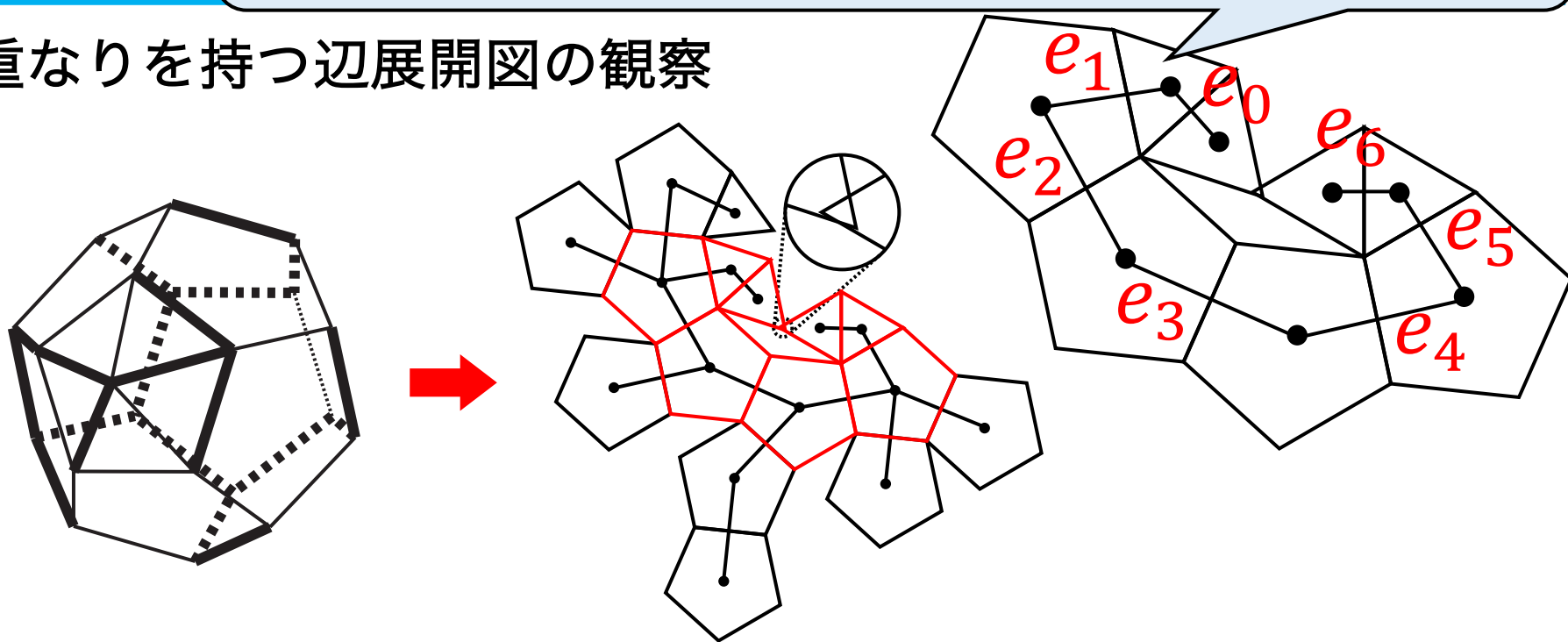
➤ $E_{C_1} \subset E_T \rightarrow$ 辺展開図は必ず重なりを持つ

➤ $E_{C_1} \subsetneq E_T \rightarrow$ 辺展開図は MOPE C_1 の構造で重ならない

重なり

極小な重なりを持つ部分辺展開図 C_1
(Minimal overlapping partial edge unfolding: **MOPE**)

重なりを持つ辺展開図の観察



全域木における辺の集合 $E_T = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, \dots, e_{21}\}$

MOPE C_1 における辺の集合 $E_{C_1} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

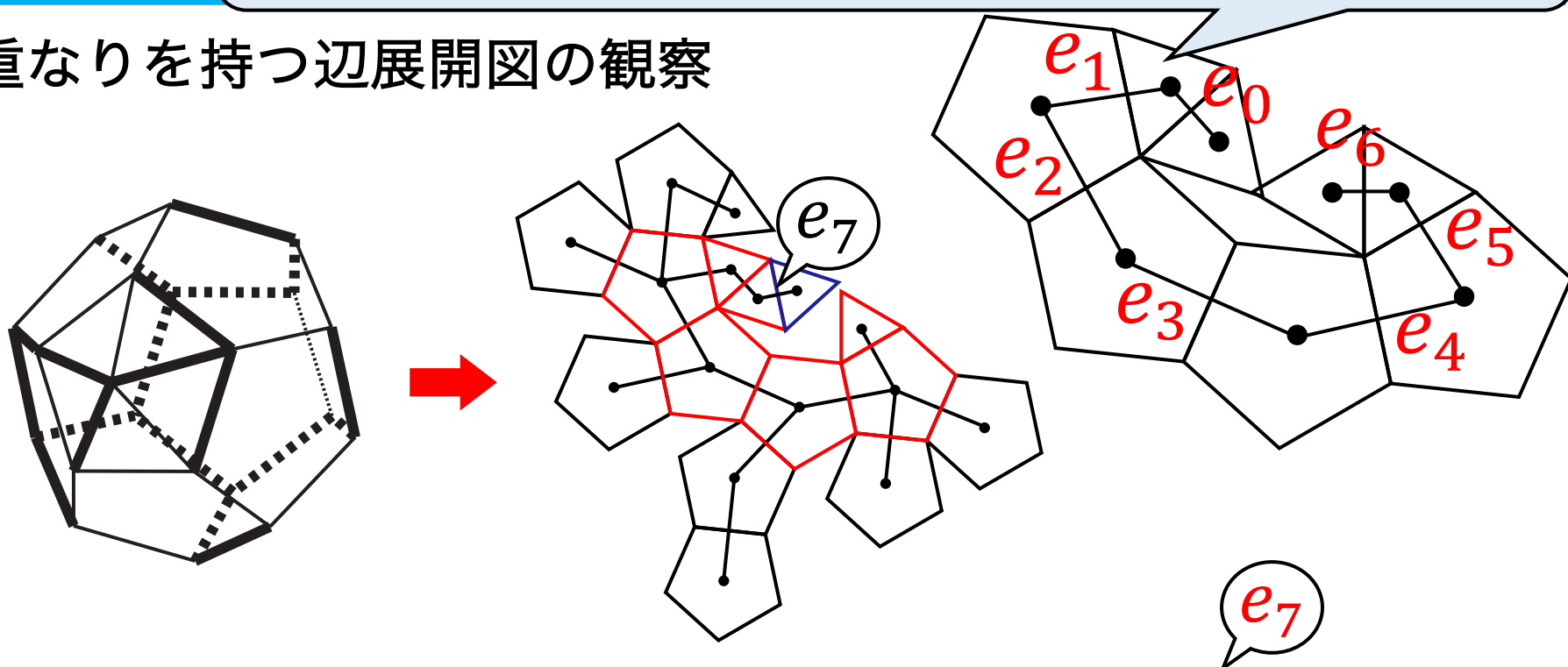
➤ $E_{C_1} \subset E_T \Rightarrow$ 辺展開図は必ず重なりを持つ

➤ $E_{C_1} \not\subset E_T \Rightarrow$ 辺展開図は MOPE C_1 の構造で重ならない

重なり

極小な重なりを持つ部分辺展開図 C_1
(Minimal overlapping partial edge unfolding: **MOPE**)

重なりを持つ辺展開図の観察



全域木における辺の集合 $E_T = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \cancel{e_6}, e_8, \dots, e_{21}\}$

MOPE C_1 における辺の集合 $E_{C_1} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

➤ $E_{C_1} \subset E_T \rightarrow$ 辺展開図は必ず重なりを持つ

➤ $E_{C_1} \not\subset E_T \rightarrow$ 辺展開図は MOPE C_1 の構造で重ならない

重なり

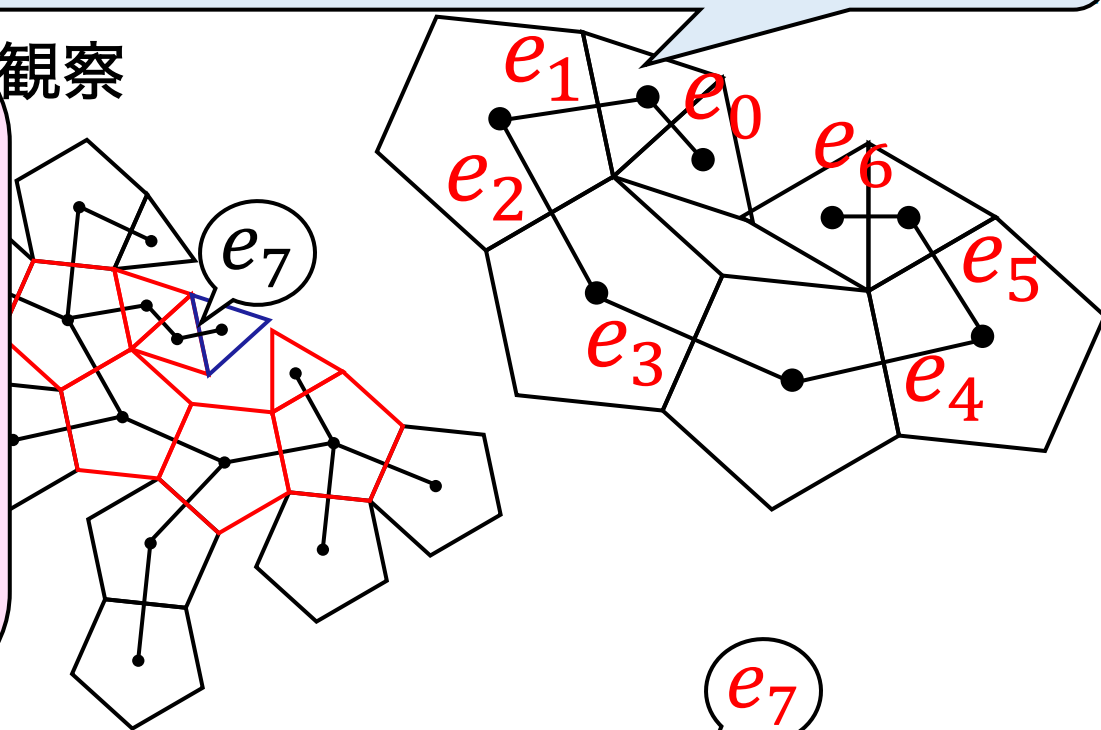
極小な重なりを持つ部分辺展開図 C_1
(Minimal overlapping partial edge unfolding: **MOPE**)

全域木の集合族から
 E_{C_1} の要素を **全て同時に**
含むものを取り除く



MOPE C_1 の構造で
重ならない辺展開図に
対応する全域木の集合族

観察



全域木における辺の集合 $E_T = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \cancel{e_6}, e_7, \dots, e_{21}\}$

MOPE C_1 における辺の集合 $E_{C_1} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

➤ $E_{C_1} \subset E_T \Rightarrow$ 辺展開図は必ず重なりを持つ

➤ $E_{C_1} \not\subset E_T \rightarrow$ 辺展開図は MOPE C_1 の構造で重ならない

重なり

極小な重なりを持つ部分辺展開図 C_1
(Minimal overlapping partial edge unfolding: **MOPE**)

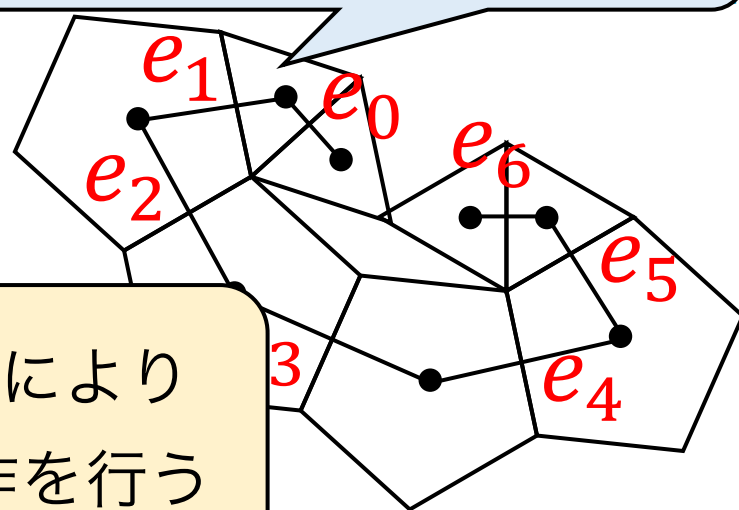
全域木の集合族から
 E_{C_1} の要素を **全て同時に**
含むものを取り除く



MOPE C_1 の構造で
重ならない辺展開図に
対応する全域木の集合族

観察

ZDD の演算 により
取り除く操作を行う



全域木における辺の集合 $E_T = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \cancel{e_6}, e_7, e_8, \dots, e_{21}\}$

MOPE C_1 における辺の集合 $E_{C_1} = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

➤ $E_{C_1} \subset E_T \Rightarrow$ 辺展開図は必ず重なりを持つ

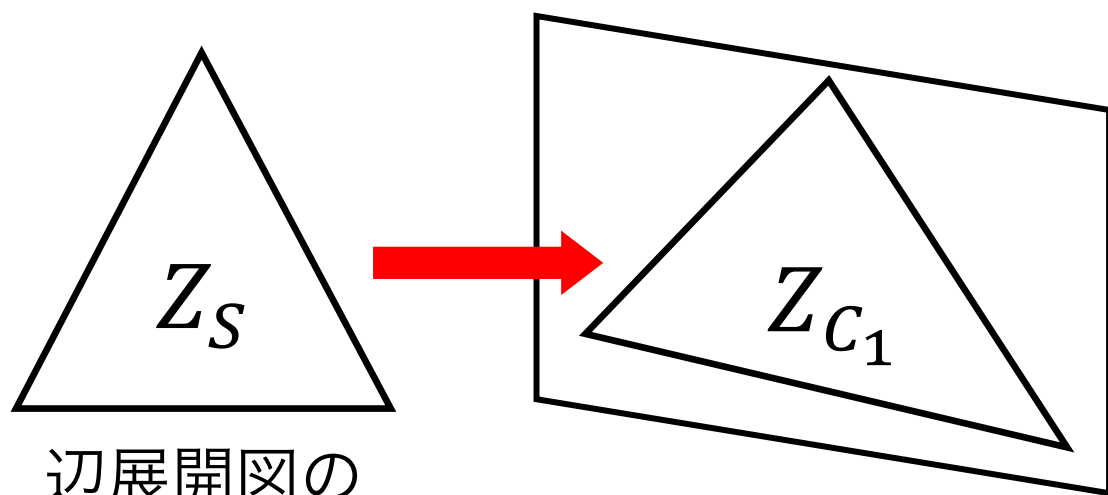
➤ $E_{C_1} \not\subset E_T \Rightarrow$ 辺展開図は MOPE C_1 の構造で重ならない

重なりを持たない辺展開図の数え上げ



サブセッティング法 [H. Iwashita et al., 2013]

ZDD Z から制約 C を満たす集合族を抽出することによって新しい ZDD Z_N を生成する ZDD の演算.



辺展開図の
集合族を表す
ZDD

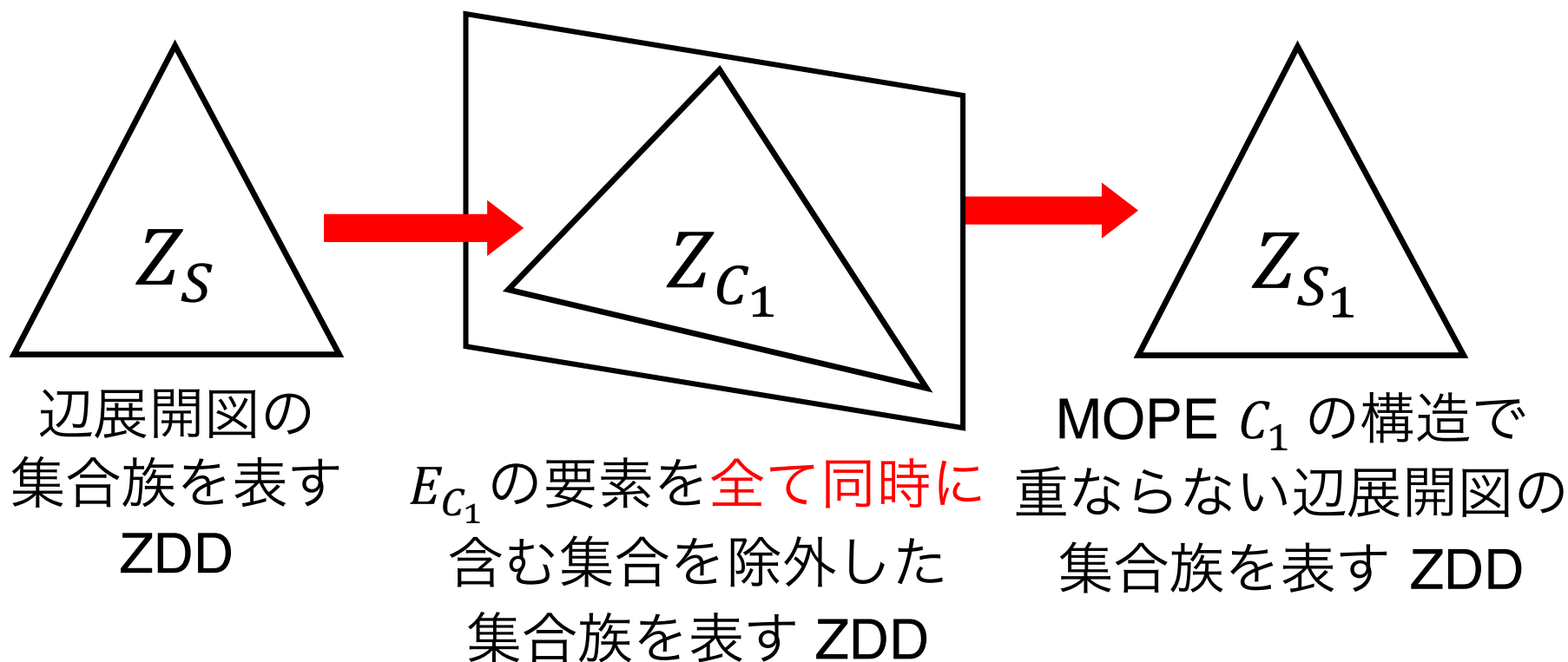
E_{C_1} の要素を全て同時に
含む集合を除外した
集合族を表す ZDD

重なりを持たない辺展開図の数え上げ



サブセッティング法 [H. Iwashita et al., 2013]

ZDD Z から制約 C を満たす集合族を抽出することによって新しい ZDD Z_N を生成する ZDD の演算.

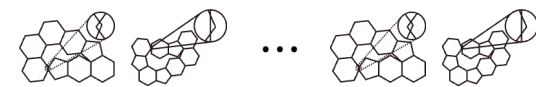
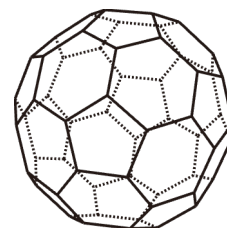


重なりを持たない辺展開図の数え上げ



- ▶ 多面体 Q における MOPE C_k は
回転展開 [T. Shiota et al., 2023] を
使うことで列挙できる

ℓ : Q における MOPE の個数



$$\ell = 240$$

切頂二十面体

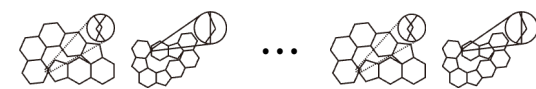
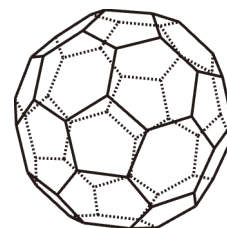
重なりを持たない辺展開図の数え上げ



- ▶ 多面体 Q における MOPE C_k は
回転展開 [T. Shiota et al., 2023] を
使うことで列挙できる

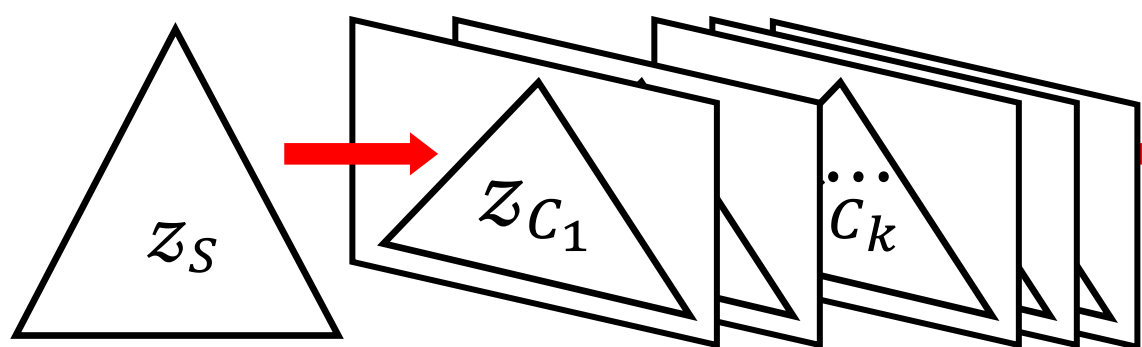
ℓ : Q における MOPE の個数

- ▶ サブセッティング法を MOPE C_k ($1 \leq k \leq \ell$) に適用



$\ell = 240$

切頂二十面体



MOPE $C_1 \sim C_\ell$ の構造で
重ならない辺展開図の
集合族を表す ZDD

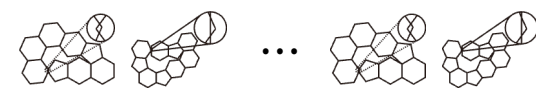
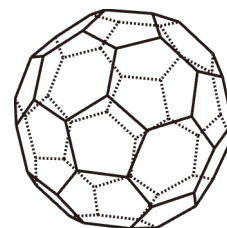
重なりを持たない辺展開図の数え上げ



- 多面体 Q における MOPE C_k は
回転展開 [T. Shiota et al., 2023] を
使うことで列挙できる

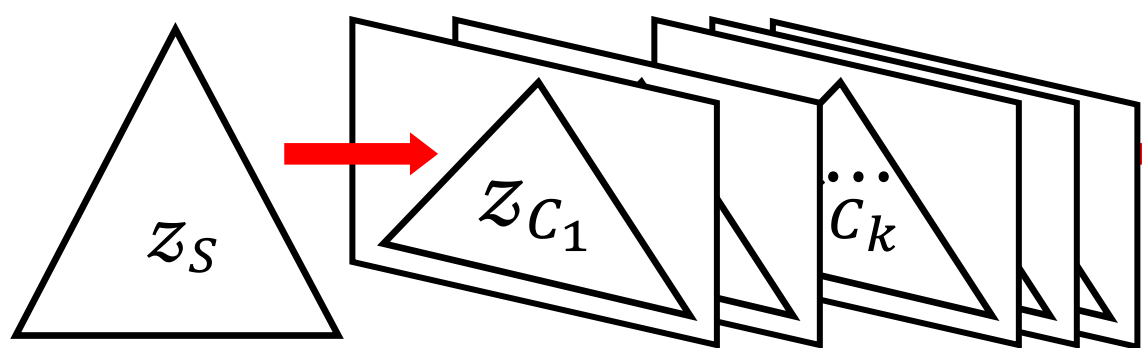
ℓ : Q における MOPE の個数

- サブセッティング法を MOPE C_k ($1 \leq k \leq \ell$) に適用

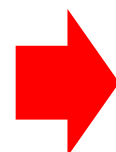


$\ell = 240$

切頂二十面体



重なりを持たない
辺展開図を表す ZDD



MOPE $C_1 \sim C_\ell$ の構造で
重ならない辺展開図の
集合族を表す ZDD

まとめ



- 整面凸多面体における重なりを持たない辺展開図を効率よく数え上げるアルゴリズムを考案
 - ✓ 全域木を表す ZDD
 - ↑ サブセッティング法を用いる
 - ✓ MOPE C_k における辺の集合 E_{C_k} の要素を全て同時に含む集合を除外した集合族を表す ZDD

まとめ



➤ 整面凸多面体における重なりを持たない辺展開図を効率よく数え上げるアルゴリズムを考案

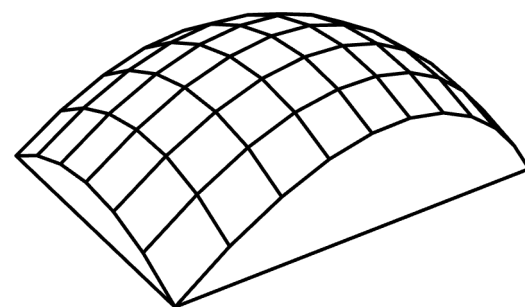
✓ 全域木を表す ZDD

↑ サブセッティング法を用いる

✓ MOPE C_k における辺の集合 E_{C_k} の要素を全て同時に含む集合を除外した集合族を表す ZDD

今後の課題

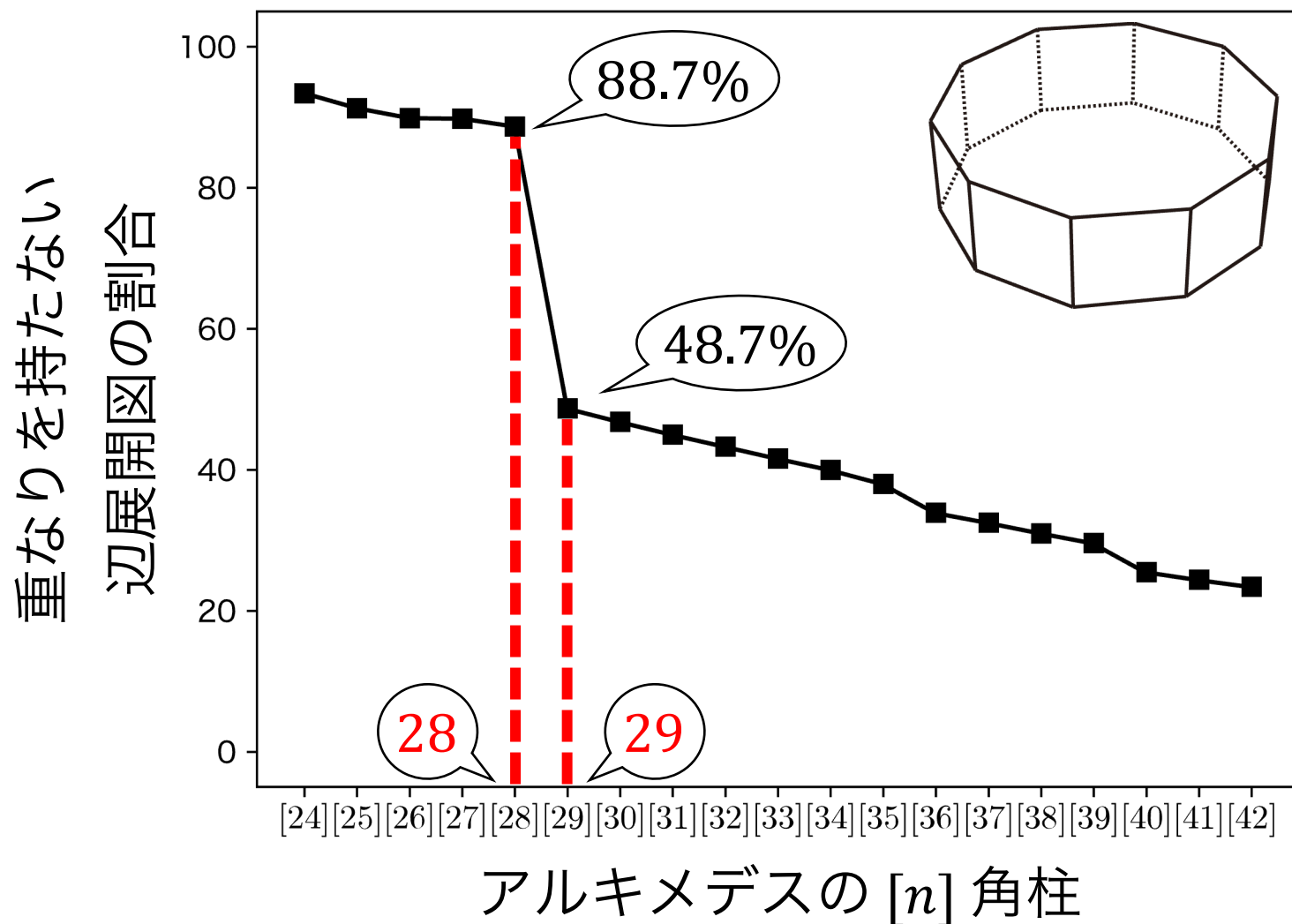
辺展開することそのものが難しいとされる凸多面体に対して、重なりを持たない辺展開図を数え上げていく。



凸多面体「亀」

[W. Schlickenrieder, 1997]

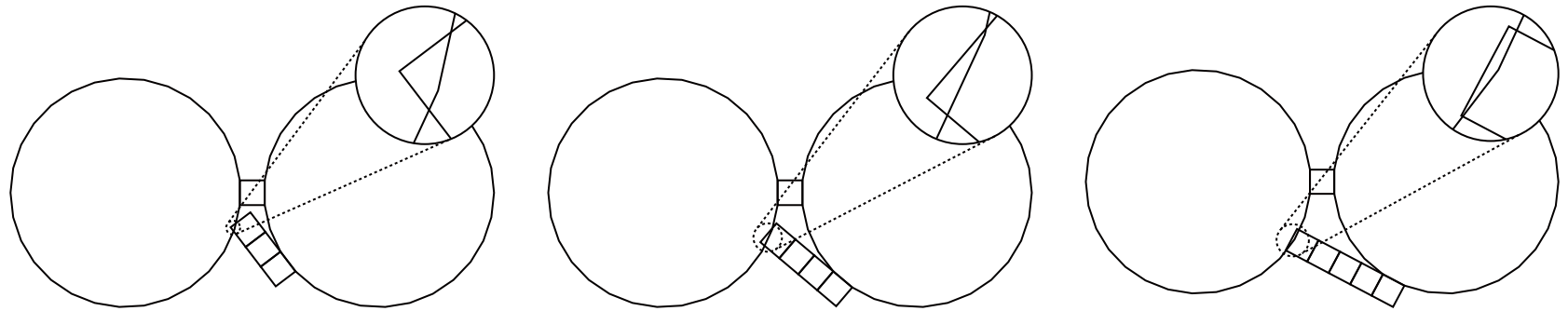
重なりを持たない割合が減少する原因



重なりを持たない割合が減少する原因



アルキメデスの n 角柱における MOPE

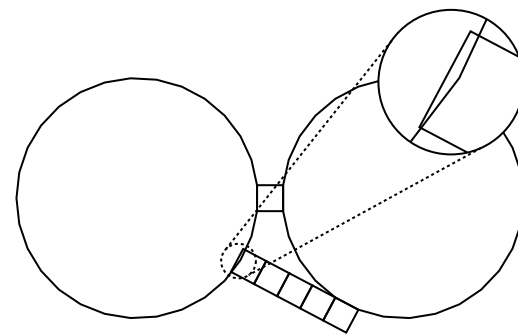
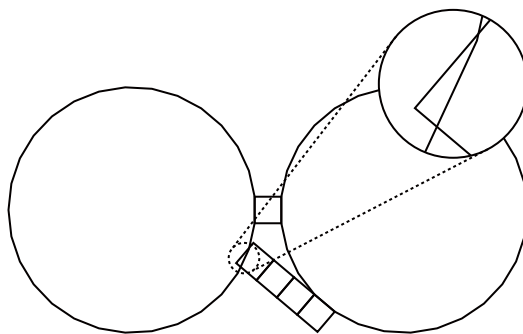
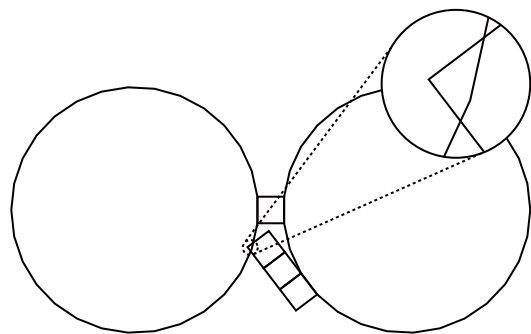


$n = 28$ における MOPE

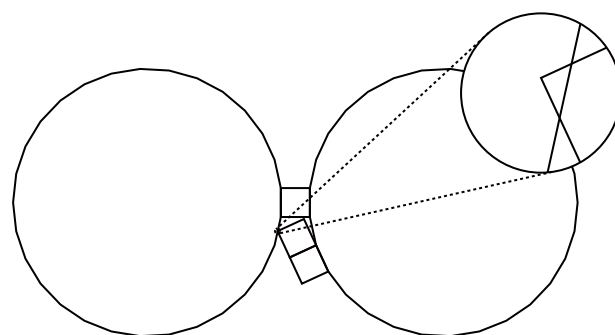
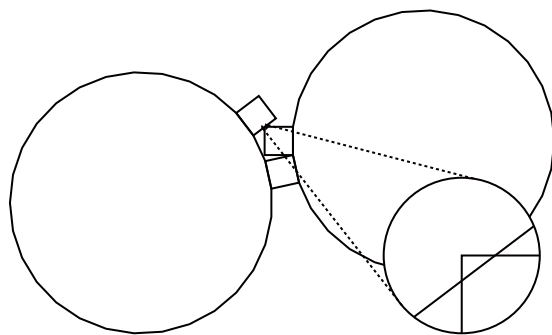
重なりを持たない割合が減少する原因



アルキメデスの n 角柱における MOPE



$n = 28$ における MOPE

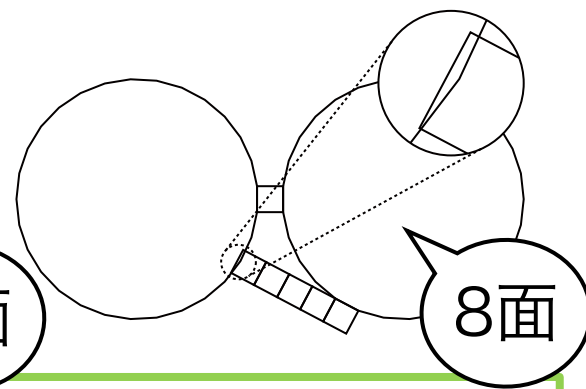
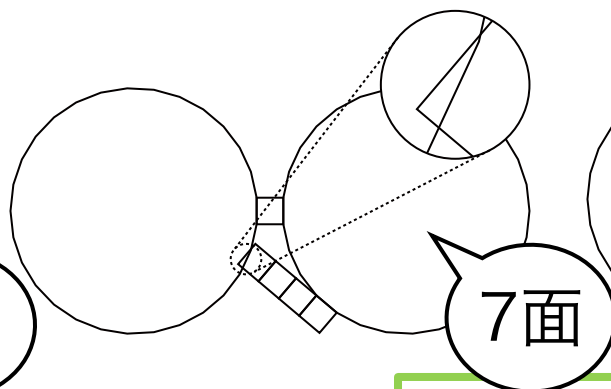
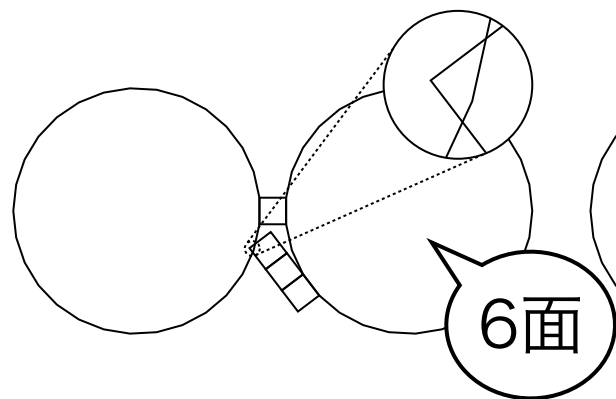


$n = 29$ における MOPE

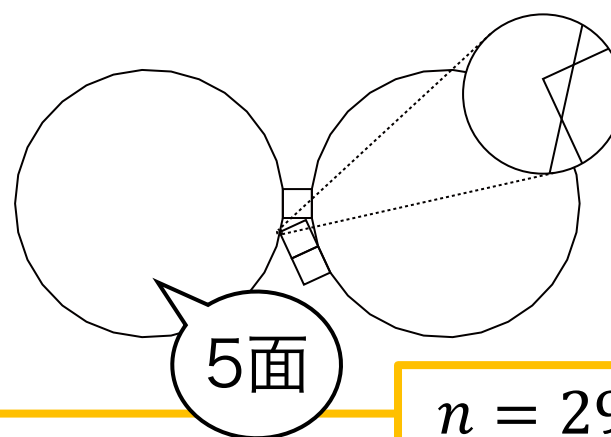
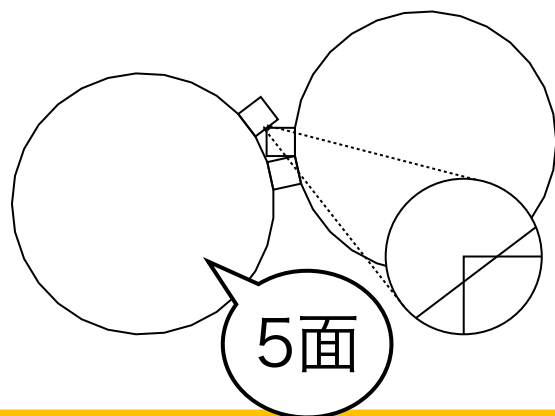
重なりを持たない割合が減少する原因



アルキメデスの n 角柱における MOPE

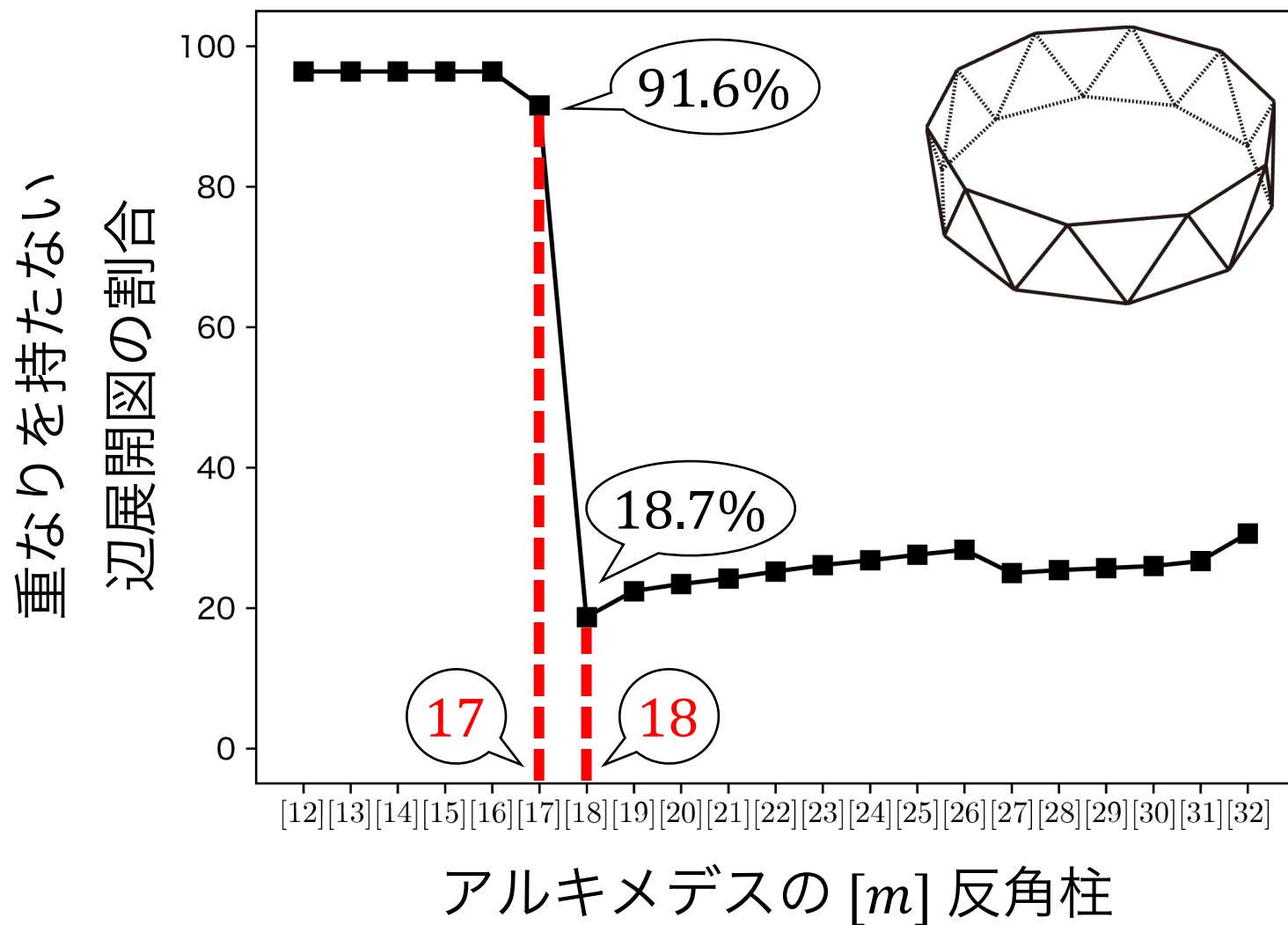


$n = 28$ におけるMOPE



$n = 29$ におけるMOPE

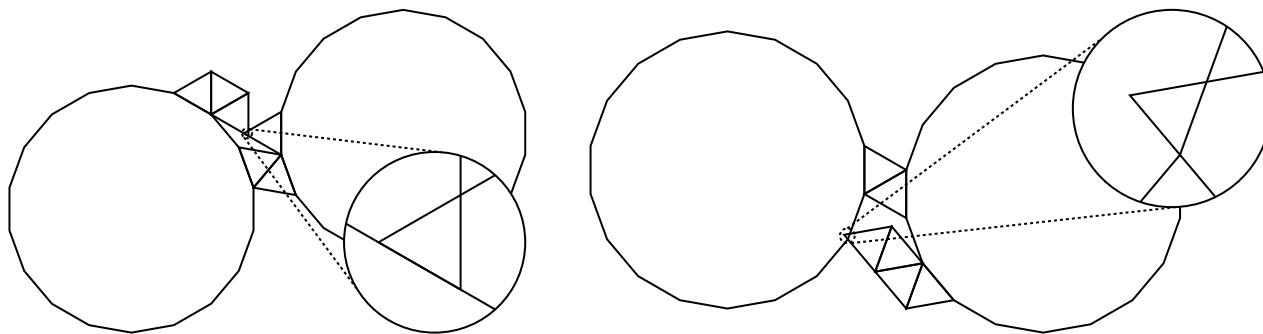
重なりを持たない割合が減少する原因



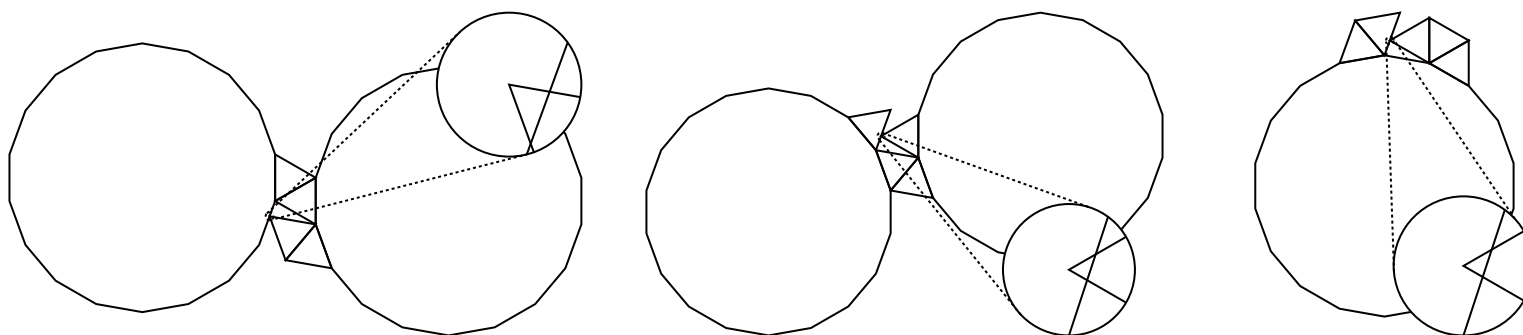
重なりを持たない割合が減少する原因



アルキメデスの m 角柱における MOPE



$n = 17$ におけるMOPE

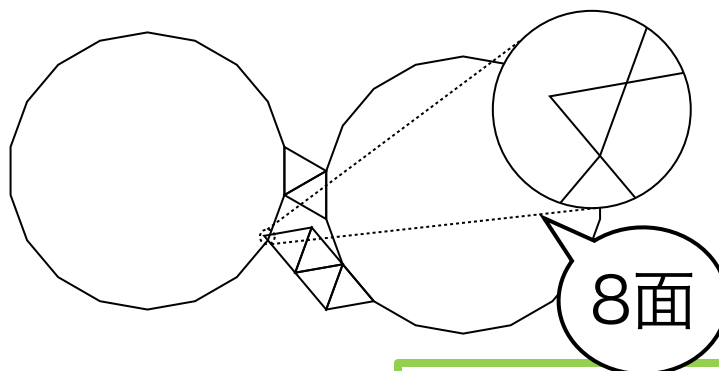
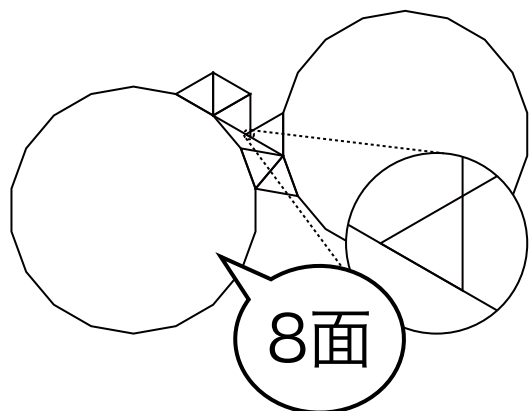


$n = 18$ におけるMOPE

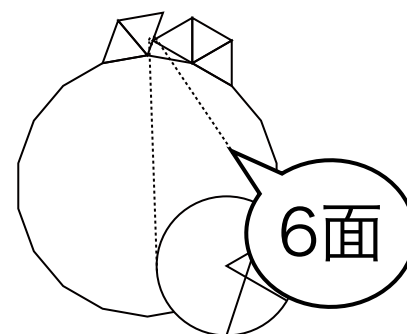
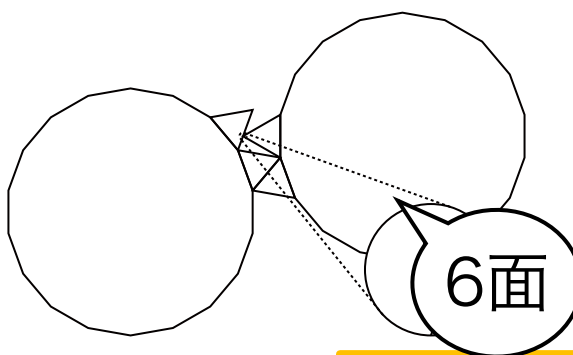
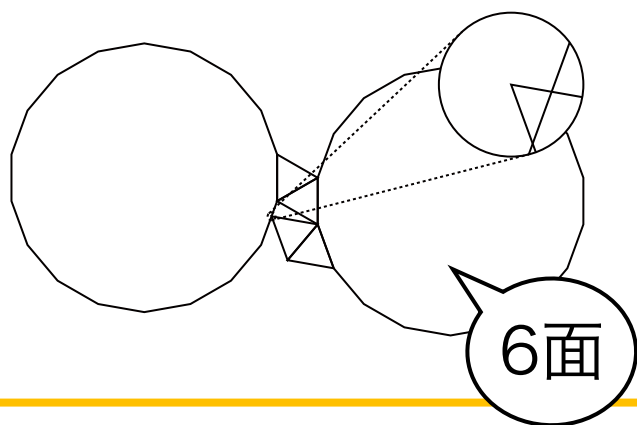
重なりを持たない割合が減少する原因



アルキメデスの m 角柱における MOPE



$n = 17$ における MOPE



$n = 18$ における MOPE

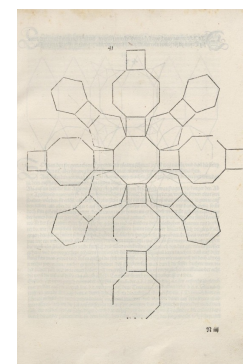
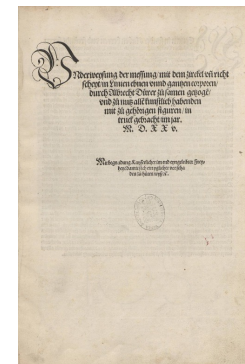
本研究の背景



Dürerの問題 [E. D. Demaine and J. O'Rourke, 2007]

全ての凸多面体は、重ならない多角形に辺展開できるか？

- ✓ 計算幾何学における**重要な未解決問題**
- ✓ 起源は約500年前まで遡る



Dürerの問題の解決には…

計測法教本

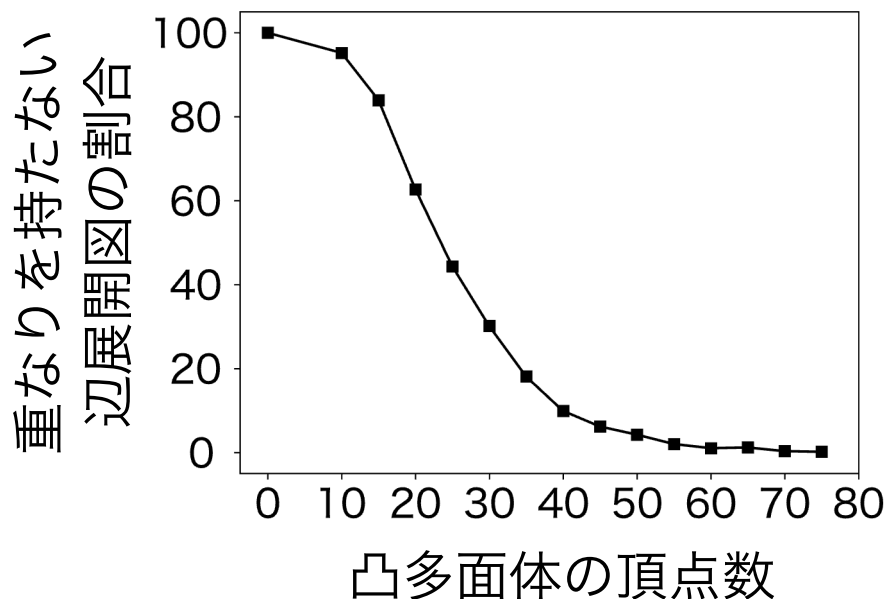
- 重なりを持たない辺展開図が存在しない凸多面体を示す
- どのような凸多面体に対しても使うことができる、重なりを持たないように辺展開するアルゴリズムを示す

本研究の背景



[C. A. Schevon, 1989]

凸多面体において頂点数が多くなると、重なりを持たない辺展開図の割合は小さくなる。



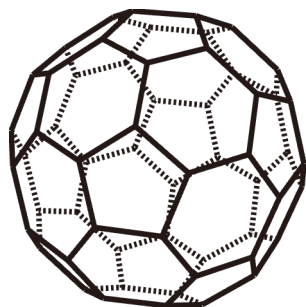
ランダムに選択した 1,000 個の辺展開図に対する実験結果

本研究の背景



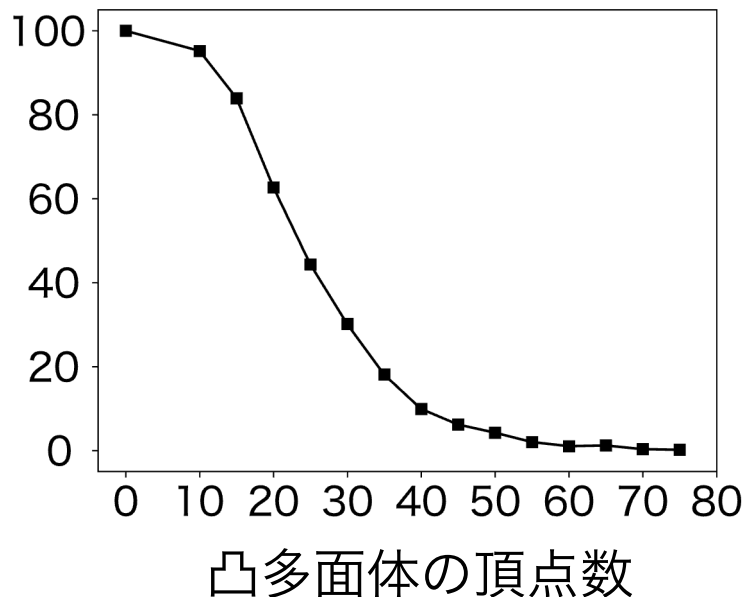
[C. A. Schevon, 1989]

凸多面体において頂点数が多くなると、重なりを持たない辺展開図の割合は小さくなる。



切頂二十面体
辺展開図は
約 3.7 枚個

重なりを持たない
辺展開図の割合



多面体のサイズが
大きくなる



辺展開図の個数が
爆発的に増加する

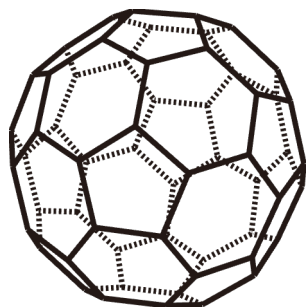
ランダムに選択した 1,000 個の辺展開図に対する実験結果

本研究の背景



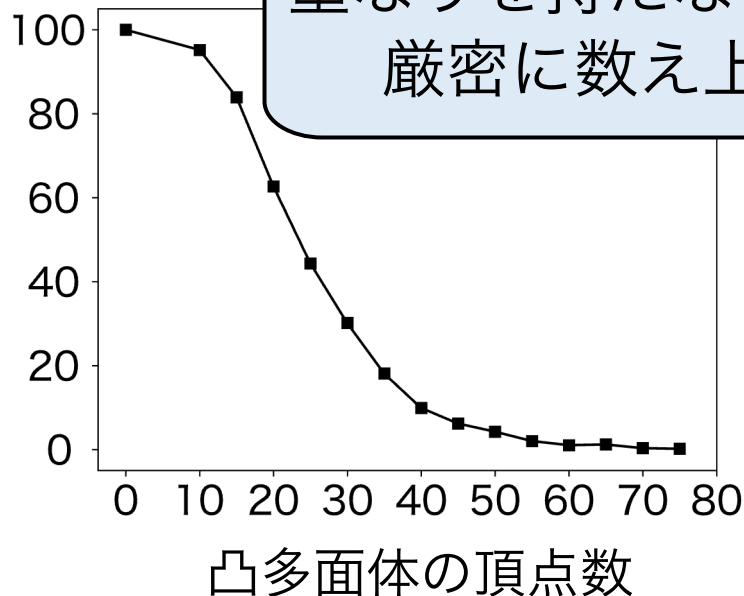
[C. A. Schevon, 1989]

凸多面体において頂点数が多くなると、重なりを持たない辺展開図の割合は小さくなる。



切頂二十面体
辺展開図は
約 3.7 枚個

重なりを持たない
辺展開図の割合



重なりを持たない辺展開図の個数を
厳密に数え上げた研究は**無い**

多面体のサイズが
大きくなる



辺展開図の個数が
爆発的に増加する

ランダムに選択した 1,000 個の辺展開図に対する実験結果