電子情報通信学会九州支部 2024年度（第32回）学生会講演会

変更制約付き最長共通部分列問題に対する多項式時間アルゴリズム

◎ 高雄 奏摩*　新竹 優駿*　江藤 宏*
宮野 英次*　斎藤 寿樹*　塩田 拓海* **

* 九州工業大学　** JSPS 特別研究員

2024年 9月 25日 (水)

最長共通部分列

列 X の長さを $|X|$ と表記する

最長共通部分列（Longest-Common Subsequence, LCS）

入力： 2つの文字列 $S = (s_0, s_1, \dots, s_{|S|-1}),\quad T = (t_0, t_1, \dots, t_{|T|-1})$

目的： S の部分列かつ T の部分列である共通部分列のうち
最長のものを求める

最長共通部分列問題の例

$S =$ a b c d e f

$T =$ f c a e d e b f

最長共通部分列

列 X の長さを $|X|$ と表記する

最長共通部分列（Longest-Common Subsequence, LCS）

入力： 2つの文字列 $S = (s_0, s_1, \dots, s_{|S|-1}), \quad T = (t_0, t_1, \dots, t_{|T|-1})$

目的： S の部分列かつ T の部分列である共通部分列のうち最長のものを求める

最長共通部分列問題の例

$S =$ a b c d e f

$T =$ f c a e d e b f

✓ LCS：a d e f（LCS の長さ：4）

最長共通部分列

列 X の長さを $|X|$ と表記する

最長共通部分列（Longest-Common Subsequence, LCS）

入力： 2つの文字列 $S = (s_0, s_1, \dots, s_{|S|-1})$, $T = (t_0, t_1, \dots, t_{|T|-1})$

目的： S の部分列かつ T の部分列である共通部分列のうち最長のものを求める

最長共通部分列問題の例

$S =$ a b c d e f

$T =$ f c a e d e b f

✓ LCS：a d e f（LCS の長さ：4）

LCS の長さを求める最適化問題を LCS 問題 という

変更制約付き最長共通部分列問題

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \ldots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する添字列 $A = (a_0, a_1, \ldots, a_{|Z|-1})$，$B = (b_0, b_1, \ldots, b_{|Z|-1})$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i]\ \ (0 \leq i \leq |Z| - 1)$

目的： k 組み以下の $(S[a_i], T[b_i])$ を削除するとき，LCS の長さを求める

BD-LCS問題の例

$S =$ a b c d e e a b c d

$T =$ e a b c d a c d b e

$Z =$ e e　$A = (4, 5)$

$B = (0, 9)$　$k = 1$

変更制約付き最長共通部分列問題

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \dots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する添字列 $A = (a_0, a_1, \dots, a_{|Z|-1})$，$B = (b_0, b_1, \dots, b_{|Z|-1})$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i]\ \ (0 \le i \le |Z| - 1)$

目的： k 組み以下の $(S[a_i], T[b_i])$ を削除するとき，LCS の長さを求める

BD-LCS問題の例

4　5

$S =$ a b c d e e a b c d

$T =$ e a b c d a c d b e

0　9

$Z =$ e e　$A = (4, 5)$

$B = (0, 9)$　$k = 1$

変更制約付き最長共通部分列問題

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \ldots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する

添字列 $A = \left(a_0, a_1, \ldots, a_{|Z|-1}\right)$，$B = \left(b_0, b_1, \ldots, b_{|Z|-1}\right)$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i]$ $(0 \le i \le |Z| - 1)$

目的： k 組み以下の $(S[a_i]$, $T[b_i])$ を削除するとき，LCS の長さを求める

BD-LCS問題の例

4

$S =$ a b c d e e a b c d

$T =$ e a b c d a c d b e

0

$Z =$ e e　$A = (4, 5)$

$B = (0, 9)$　$k = 1$

変更制約付き最長共通部分列問題

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \dots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する

添字列 $A = \left(a_0, a_1, \dots, a_{|Z|-1}\right)$，$B = \left(b_0, b_1, \dots, b_{|Z|-1}\right)$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i]\ \ (0 \le i \le |Z| - 1)$

目的： k 組み以下の $(S[a_i],\ T[b_i])$ を削除するとき，LCS の長さを求める

BD-LCS問題の例

4

$S =$ a b c d e e a b c d

$T =$ e a b c d a c d b e

0

$Z =$ e e　$A = (4, 5)$

$B = (0, 9)$　$k = 1$

共通部分列の長さ$= 4$

変更制約付き最長共通部分列問題

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \dots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する

添字列 $A = (a_0, a_1, \dots, a_{|Z|-1})$，$B = (b_0, b_1, \dots, b_{|Z|-1})$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i]$ $(0 \le i \le |Z| - 1)$

目的： k 組み以下の $(S[a_i], T[b_i])$ を削除するとき，LCS の長さを求める

BD-LCS問題の例

5

$S =$ a b c d e e a b c d

$T =$ e a b c d a c d b e

9

$Z =$ e e　$A = (4, 5)$

$B = (0, 9)$　$k = 1$

変更制約付き最長共通部分列問題

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \ldots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する

添字列 $A = (a_0, a_1, \ldots, a_{|Z|-1})$，$B = (b_0, b_1, \ldots, b_{|Z|-1})$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i]$ $(0 \leq i \leq |Z| - 1)$

目的： k 組み以下の $(S[a_i], T[b_i])$ を削除するとき，LCS の長さを求める

BD-LCS問題の例

5

$S =$ a b c d e e a b c d

$T =$ e a b c d a c d b e

9

$Z =$ e e　$A = (4, 5)$

$B = (0, 9)$　$k = 1$

共通部分列の長さ= 5

変更制約付き最長共通部分列問題

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \dots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する添字列 $A = (a_0, a_1, \dots, a_{|Z|-1})$，$B = (b_0, b_1, \dots, b_{|Z|-1})$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i]$ $(0 \le i \le |Z| - 1)$

目的： k 組み以下の $(S[a_i], T[b_i])$ を削除するとき，LCS の長さを求める

BD-LCS問題の例

解 = 5

5

$S =$ a b c d e e a b c d

$T =$ e a b c d a c d b e

9

$Z =$ e e　$A = (4, 5)$

$B = (0, 9)$　$k = 1$

共通部分列の長さ = 5

変更制約付き最長共通部分列問題

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \ldots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する

添字列 $A = (a_0, a_1, \ldots, a_{|Z|-1})$, $B = (b_0, b_1, \ldots, b_{|Z|-1})$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i]\ \ (0 \leq i \leq |Z| - 1)$

目的： k 組み以下の $(S[a_i], T[b_i])$ を削除するとき，LCS の

長さを求める

本研究の成果

BD-LCS 問題に対し $O(|S||T||Z|)$ の計算時間量で，解を求める多項式時間アルゴリズムを示した.

LCS 問題に対する既存アルゴリズム

[R. A. Wanger et al., 1974]

2 つの文字列 S, T に対して，$O(|S||T|)$ の計算時間量で LCS を求めることができる.

例 $S =$ e a b c d,　$T =$ a c d b e

		e	a	b	c	d
	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)
a	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
c	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
d	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
b	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
e	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

LCS 問題に対する既存アルゴリズム

[R. A. Wanger et al., 1974]

2 つの文字列 S, T に対して，$O(|S||T|)$ の計算時間量で LCS を求めることができる．

例 $S =$ e a b c d，$T =$ a c d b e

		e	a	b	c	d
	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)
a	(1,0)					
c	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
d	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
b	(4,0)	(4,1)	(4,2)			
e	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

S の 0 文字目までと
T の 1 文字目までのLCS

S の 2 文字目までと
T の 4 文字目までのLCS

LCS 問題に対する既存アルゴリズム

[R. A. Wanger et al., 1974]

2 つの文字列 S, T に対して，$O(|S||T|)$ の計算時間量で LCS を求めることができる．

例 $S =$ e a b c d，$T =$ a c d b e

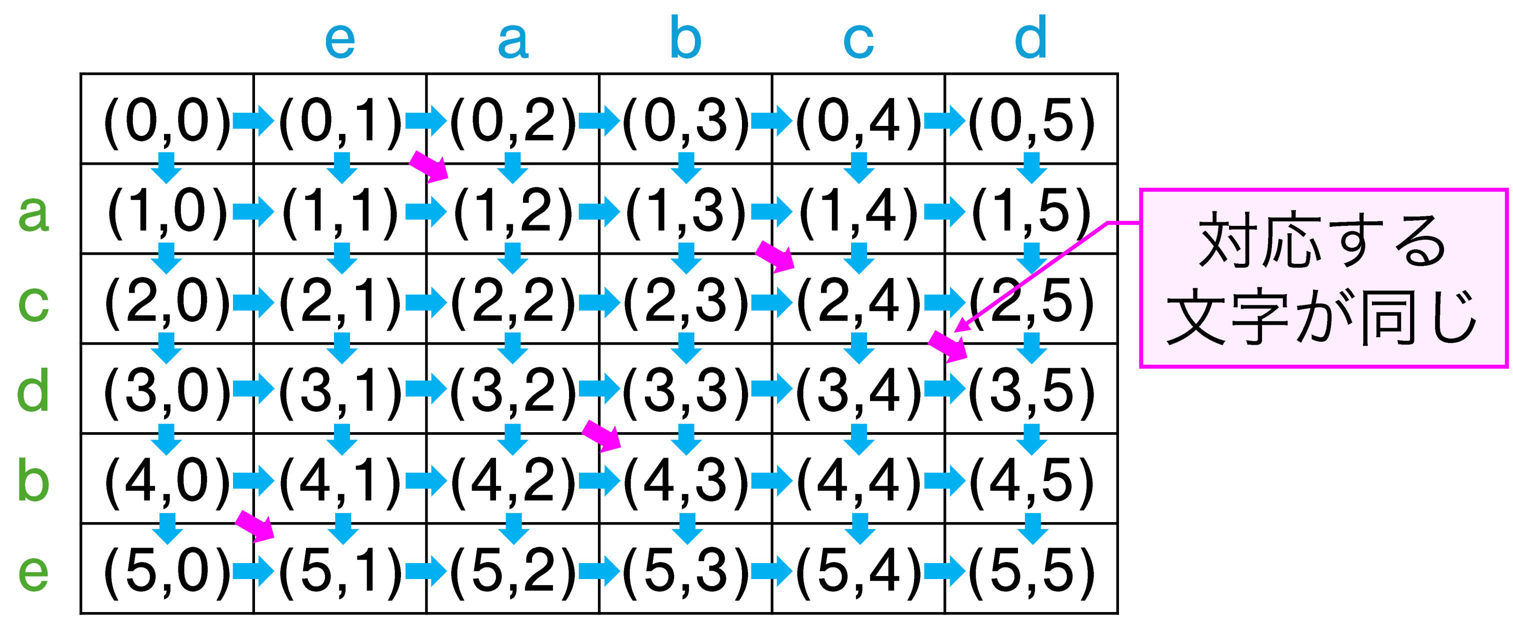
		e	a	b	c	d
	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)
a	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
c	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
d	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
b	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
e	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

LCS 問題に対する既存アルゴリズム

[R. A. Wanger et al., 1974]

2 つの文字列 S, T に対して，$O(|S||T|)$ の計算時間量で LCS を求めることができる.

例 $S =$ e a b c d,　$T =$ a c d b e

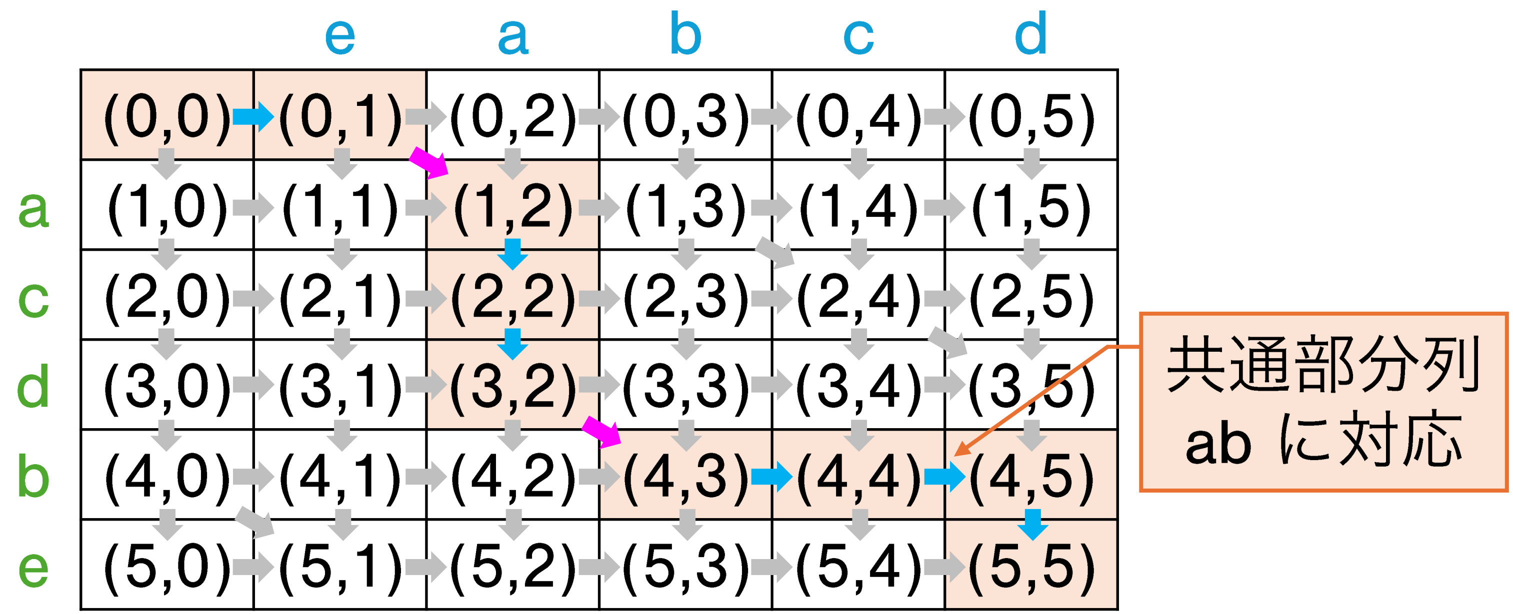


LCS 問題に対する既存アルゴリズム

[R. A. Wanger et al., 1974]

2 つの文字列 S, T に対して，$O(|S||T|)$ の計算時間量で LCS を求めることができる．

例 $S =$ e a b c d，$T =$ a c d b e

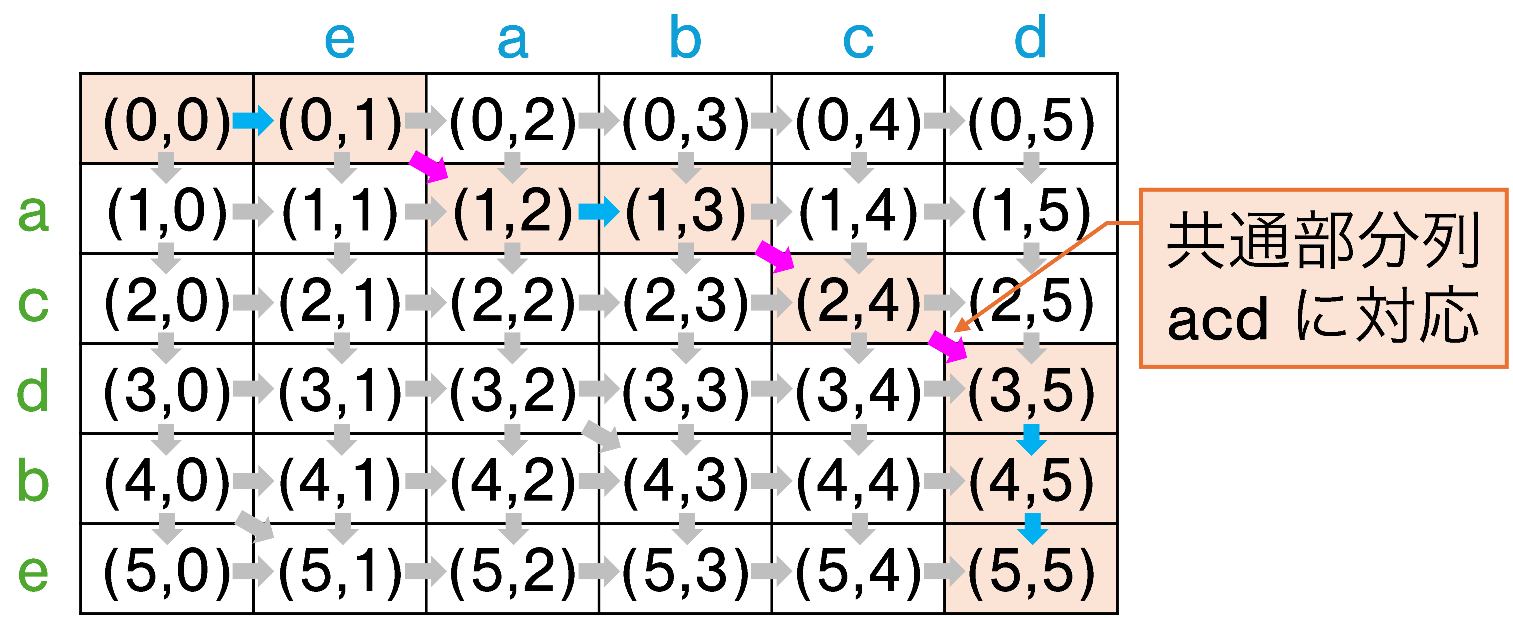


LCS 問題に対する既存アルゴリズム

[R. A. Wanger et al., 1974]

2 つの文字列 S, T に対して，$O(|S||T|)$ の計算時間量で LCS を求めることができる.

例 $S =$ e a b c d,　$T =$ a c d b e

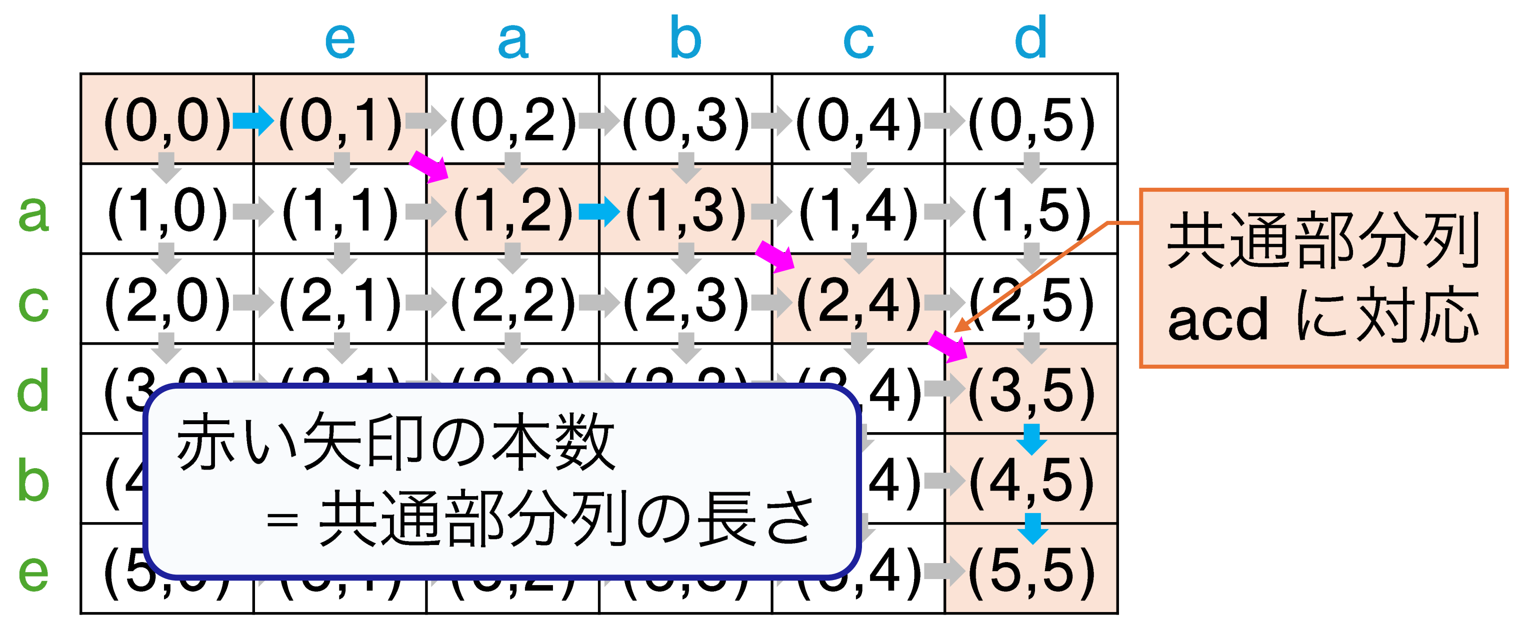


LCS 問題に対する既存アルゴリズム

[R. A. Wanger et al., 1974]

2 つの文字列 S, T に対して，$O(|S||T|)$ の計算時間量で LCS を求めることができる．

例 $S =$ e a b c d,　$T =$ a c d b e

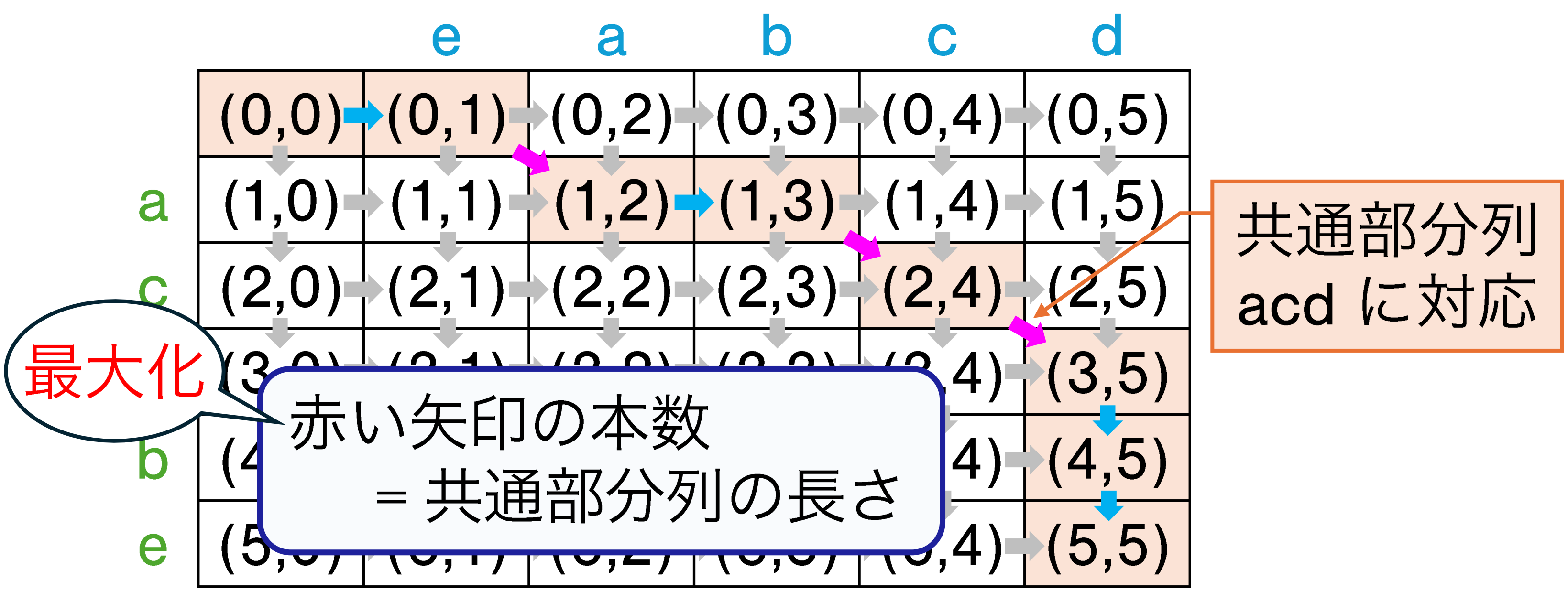


LCS 問題に対する既存アルゴリズム

[R. A. Wanger et al., 1974]

2 つの文字列 S, T に対して，$O(|S||T|)$ の計算時間量で LCS を求めることができる．

例 $S =$ e a b c d,　$T =$ a c d b e



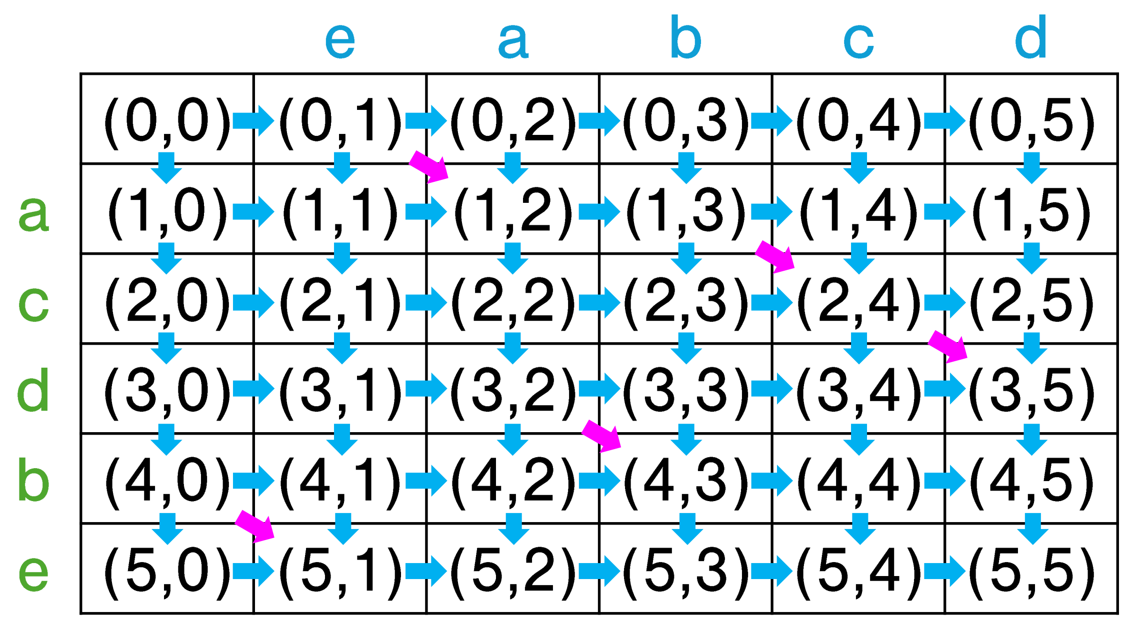
LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① ($i-1, j$) から下矢印　② ($i, j-1$) から右矢印

③ ($i-1, j-1$) から赤い矢印（値を +1 する）



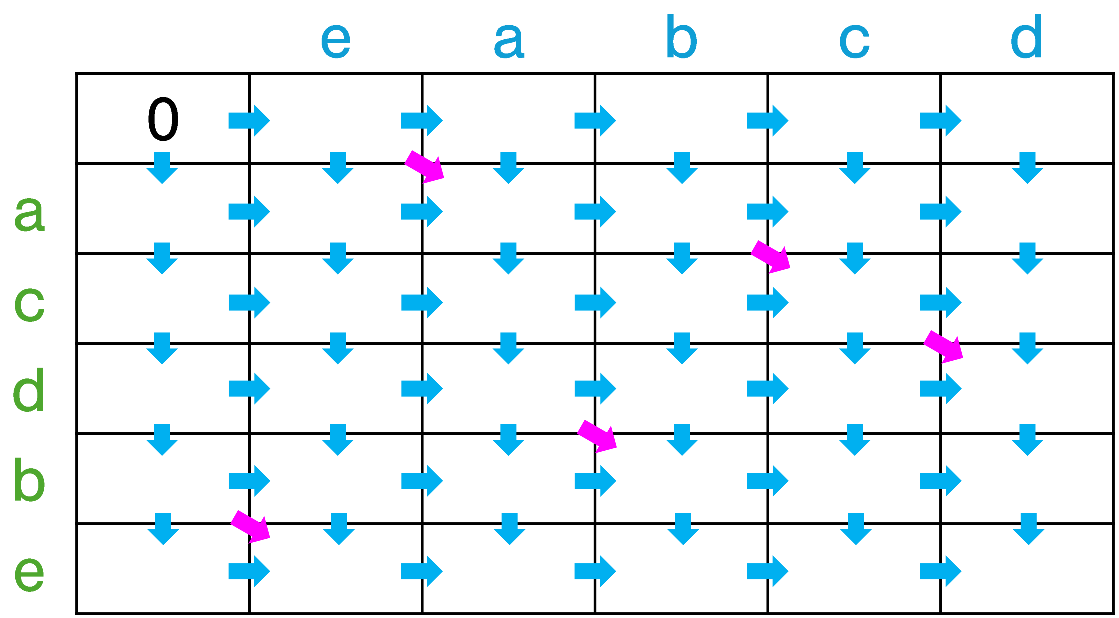
LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① $(i-1, j)$ から下矢印　② $(i, j-1)$ から右矢印

③ $(i-1, j-1)$ から赤い矢印（値を +1 する）



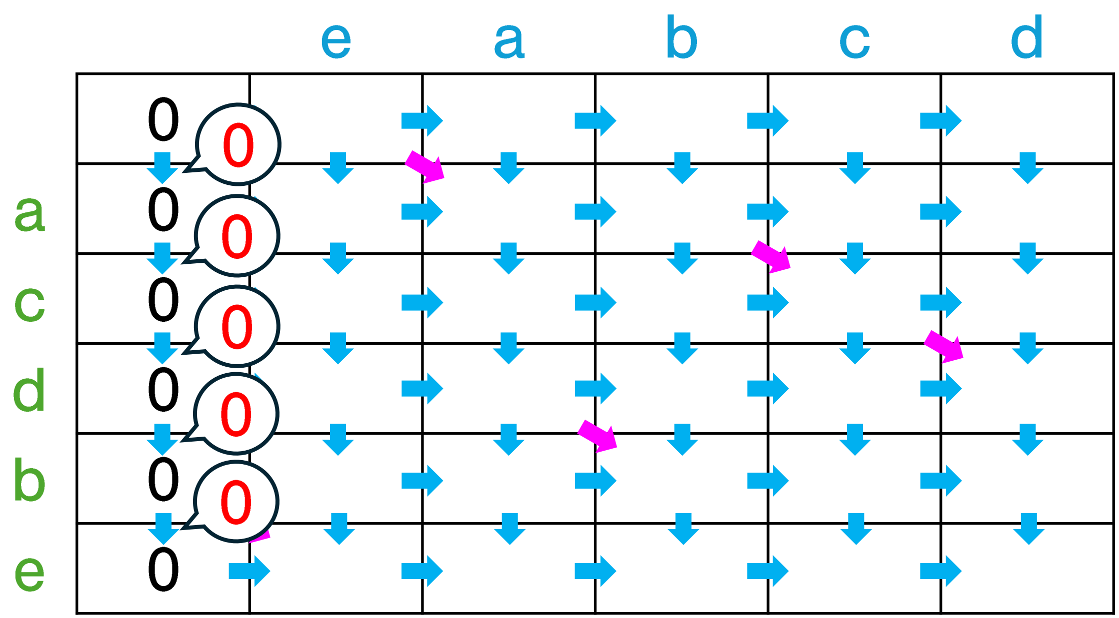
LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① $(i-1, j)$ から下矢印　② $(i, j-1)$ から右矢印

③ $(i-1, j-1)$ から赤い矢印（値を +1 する）



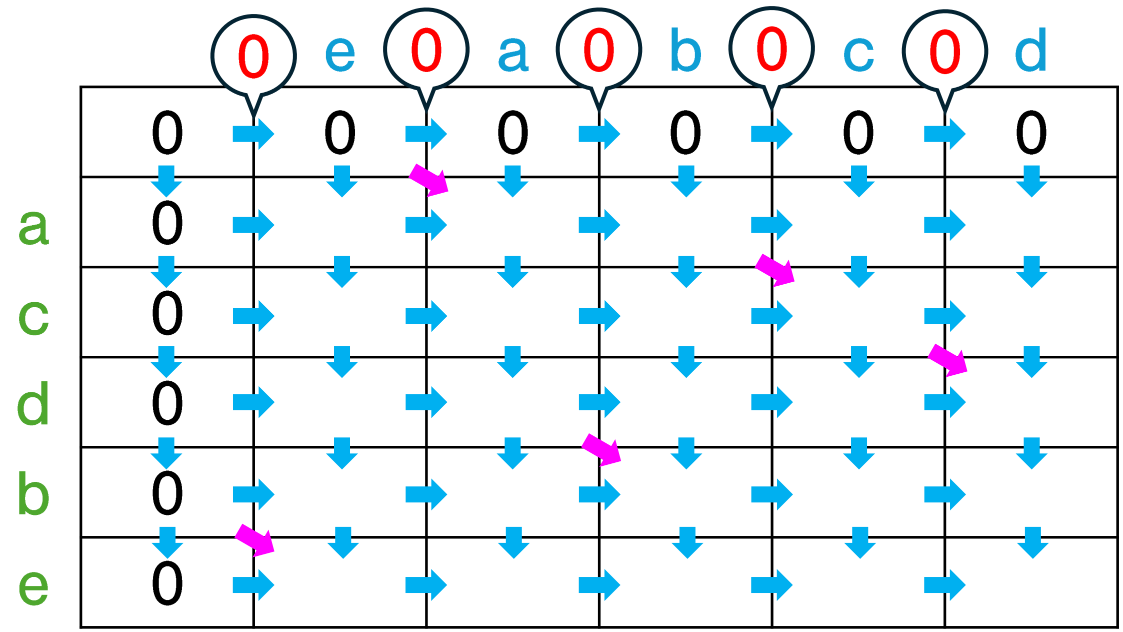
LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① (i – 1, j) から下矢印　② (i, j – 1) から右矢印

③ (i – 1, j – 1) から赤い矢印　（値を +1 する）



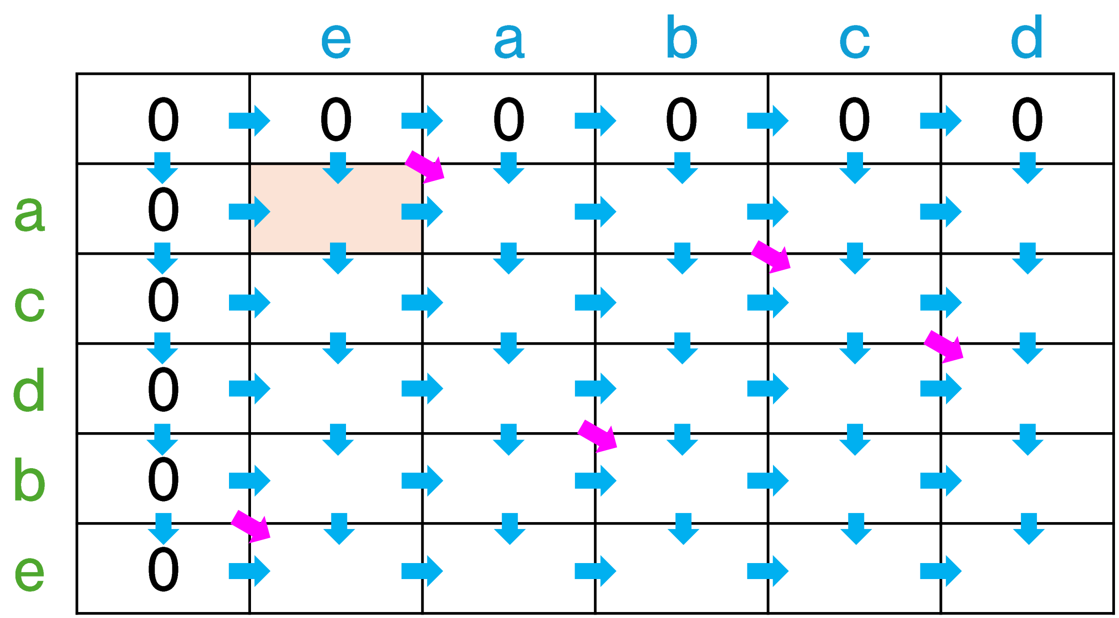
LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

　dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① $(i-1, j)$ から下矢印　② $(i, j-1)$ から右矢印

　　　　　③ $(i-1, j-1)$ から赤い矢印（値を +1 する）



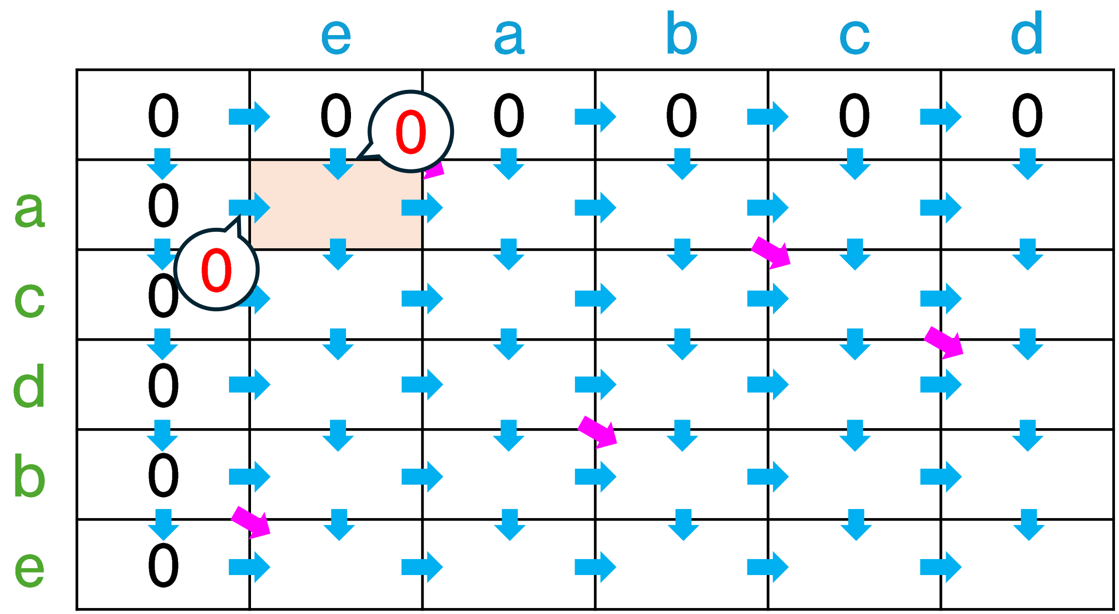
LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① ($i-1, j$) から下矢印　② ($i, j-1$) から右矢印

③ ($i-1, j-1$) から赤い矢印　（値を +1 する）



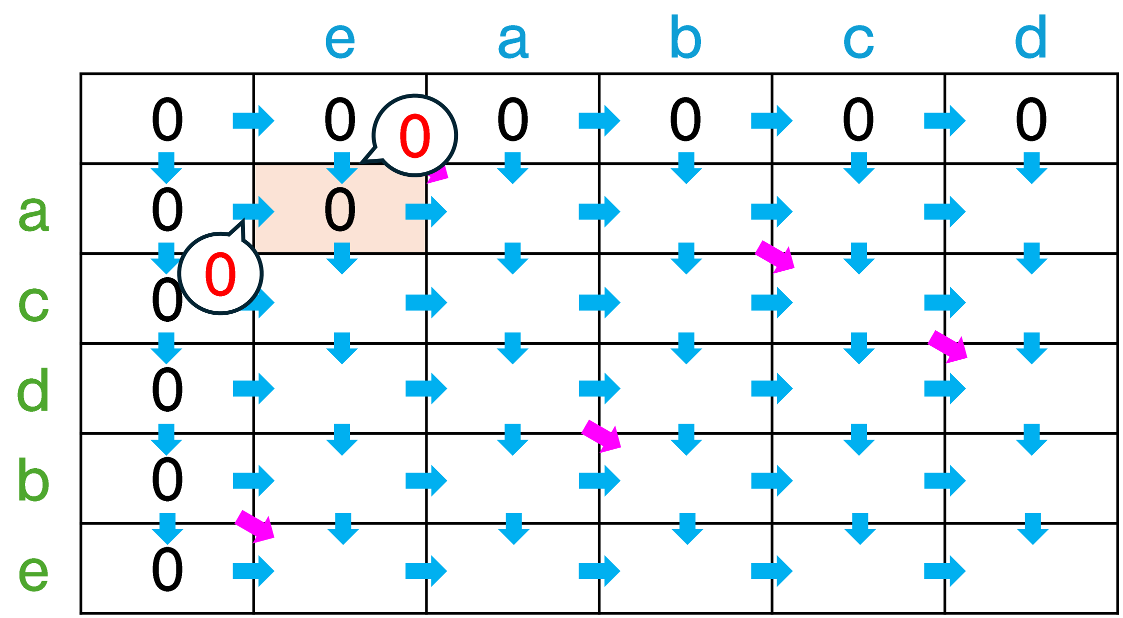
LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① $(i-1, j)$ から下矢印　② $(i, j-1)$ から右矢印

③ $(i-1, j-1)$ から赤い矢印　（値を +1 する）



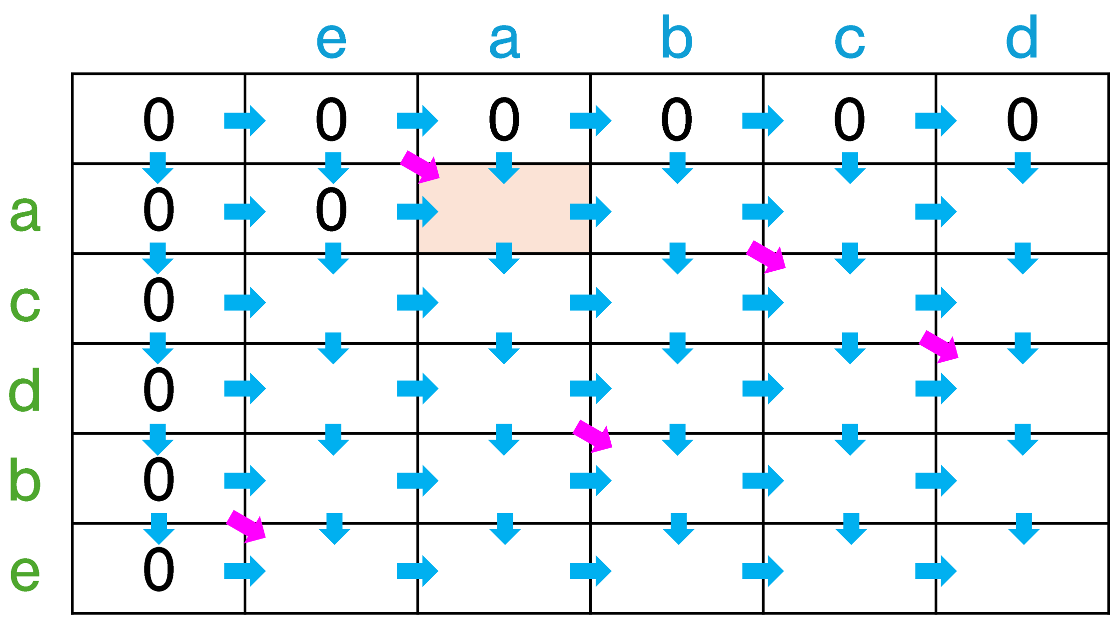
LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① ($i-1, j$) から下矢印　② ($i, j-1$) から右矢印

③ ($i-1, j-1$) から赤い矢印 （値を +1 する）



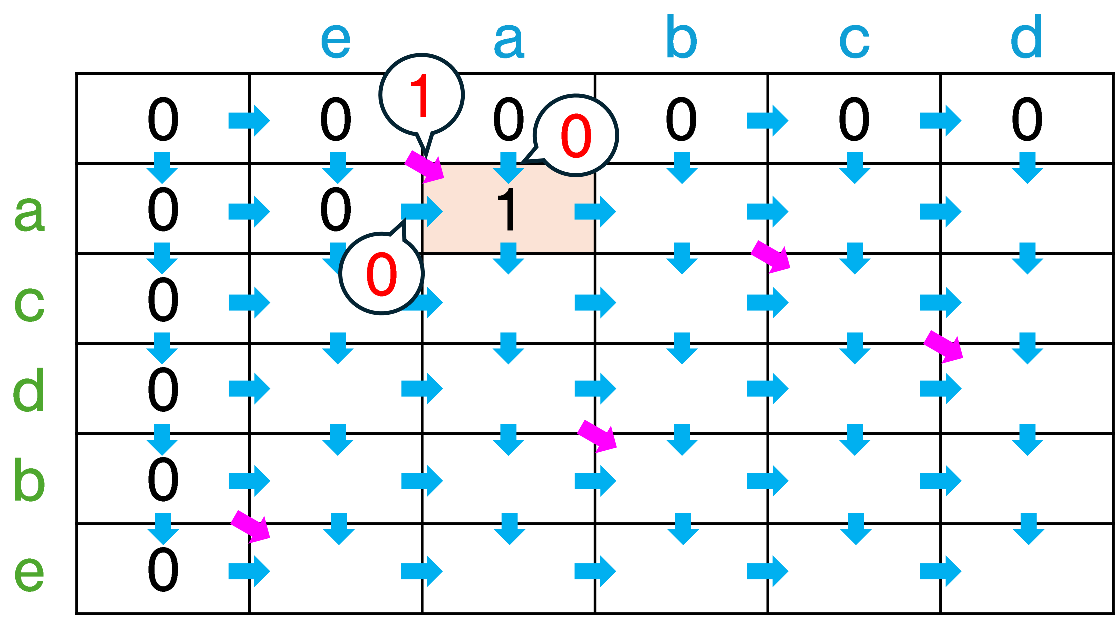
LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① $(i-1, j)$ から下矢印　② $(i, j-1)$ から右矢印

③ $(i-1, j-1)$ から赤い矢印 （値を +1 する）



LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① ($i-1, j$) から下矢印　② ($i, j-1$) から右矢印

③ ($i-1, j-1$) から赤い矢印（値を +1 する）

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	1	1	1	1
c	0	0	1	1	2	2
d	0	0	1	1	2	3
b	0	0	1	2	2	3
e	0	1	1	2	2	3

LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① $(i-1, j)$ から下矢印　② $(i, j-1)$ から右矢印

③ $(i-1, j-1)$ から赤い矢印　（値を +1 する）

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	1	1	1	1
c	0	0	1	1	2	2
d	0	0	1	1	2	3
b	0	0	1	2	2	3

テーブルを埋めるのに$(|S|+1)(|T|+1)$ ステップが必要

LCS 問題に対する既存アルゴリズム

赤い矢印の最大本数を求めるための動的計画法を考える

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

移動方法：① $(i-1, j)$ から下矢印　② $(i, j-1)$ から右矢印

③ $(i-1, j-1)$ から赤い矢印　（値を +1 する）

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	1	1	1	1
c	0	0	1	1	2	2
d	0	0	1	1	2	3
b	0	0	1	2	2	3

$O(|S||T|)$

テーブルを埋めるのに$(|S|+1)(|T|+1)$ ステップが必要

変更制約付き最長共通部分列問題

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \dots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する

添字列 $A = (a_0, a_1, \dots, a_{|Z|-1})$，$B = (b_0, b_1, \dots, b_{|Z|-1})$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i]\ \ (0 \le i \le |Z| - 1)$

目的： k 組み以下の ($S[a_i]$, $T[b_i]$) を削除するとき，LCS の長さを求める

削除する組みの組合せを 2^k 通り考えないといけない？

BD-LCS問題の例

解 = 5

5

$S =$ a b c d e e a b c d

$T =$ e a b c d a c d b e

9

$Z =$ e e　$A = (4, 5)$

$B = (0, 9)$　$k = 1$

共通部分列の長さ= 5

変更制約付き最長共通部分列問題

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \ldots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する
添字列 $A = (a_0, a_1, \ldots, a_{|Z|-1})$，$B = (b_0, b_1, \ldots, b_{|Z|-1})$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i] \ (0 \leq i \leq |Z| - 1)$

目的： ~~k 組み以下の $(S[a_i], T[b_i])$ を削除するとき，LCS の長さを求める~~

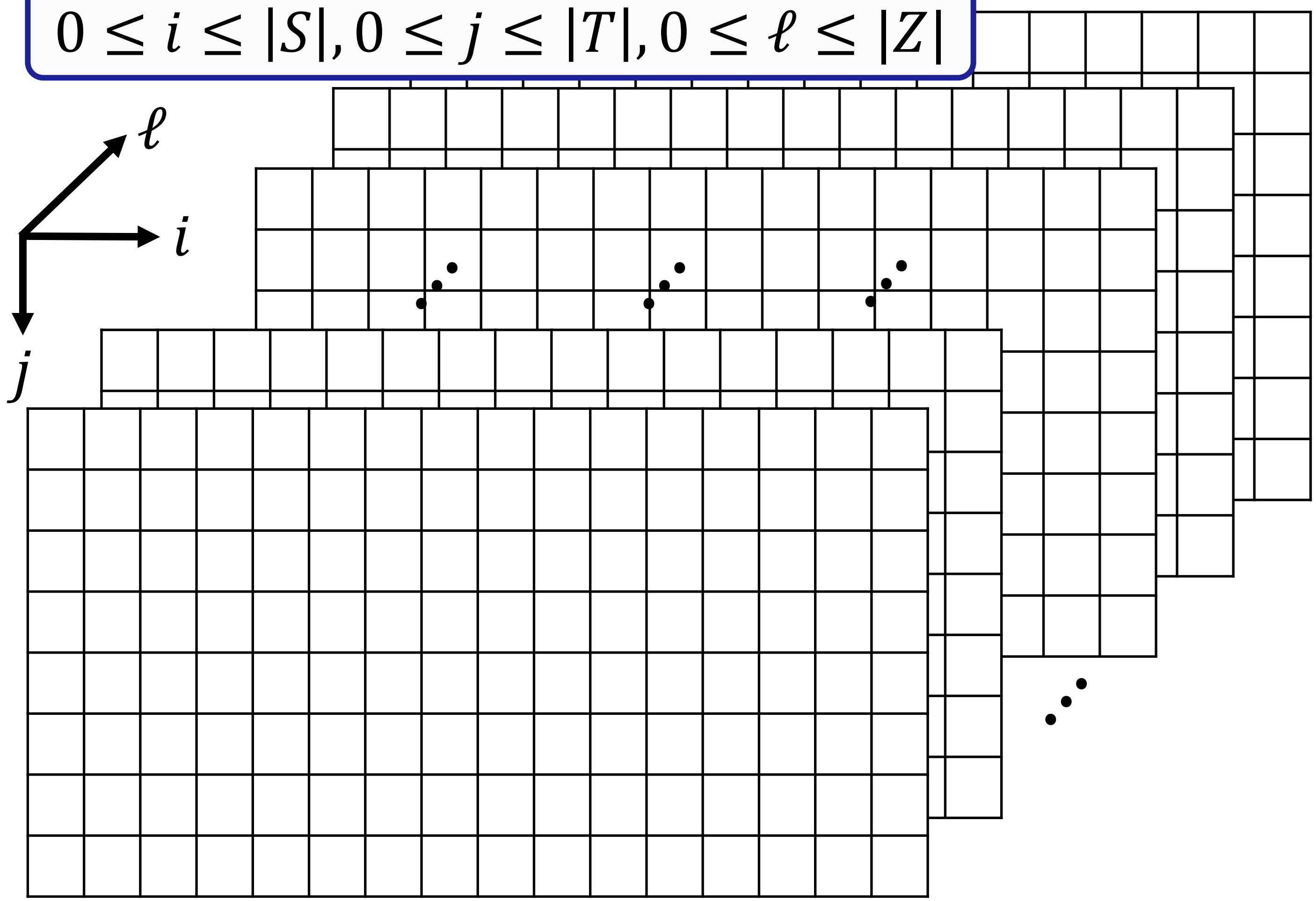
$\Downarrow$

$(|Z| - k)$ 組み以上の $(S[a_i], T[b_i])$ からなる，LCS の長さを求める

BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

$\mathrm{dp}[i][j][\ell]$: (i, j, ℓ) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

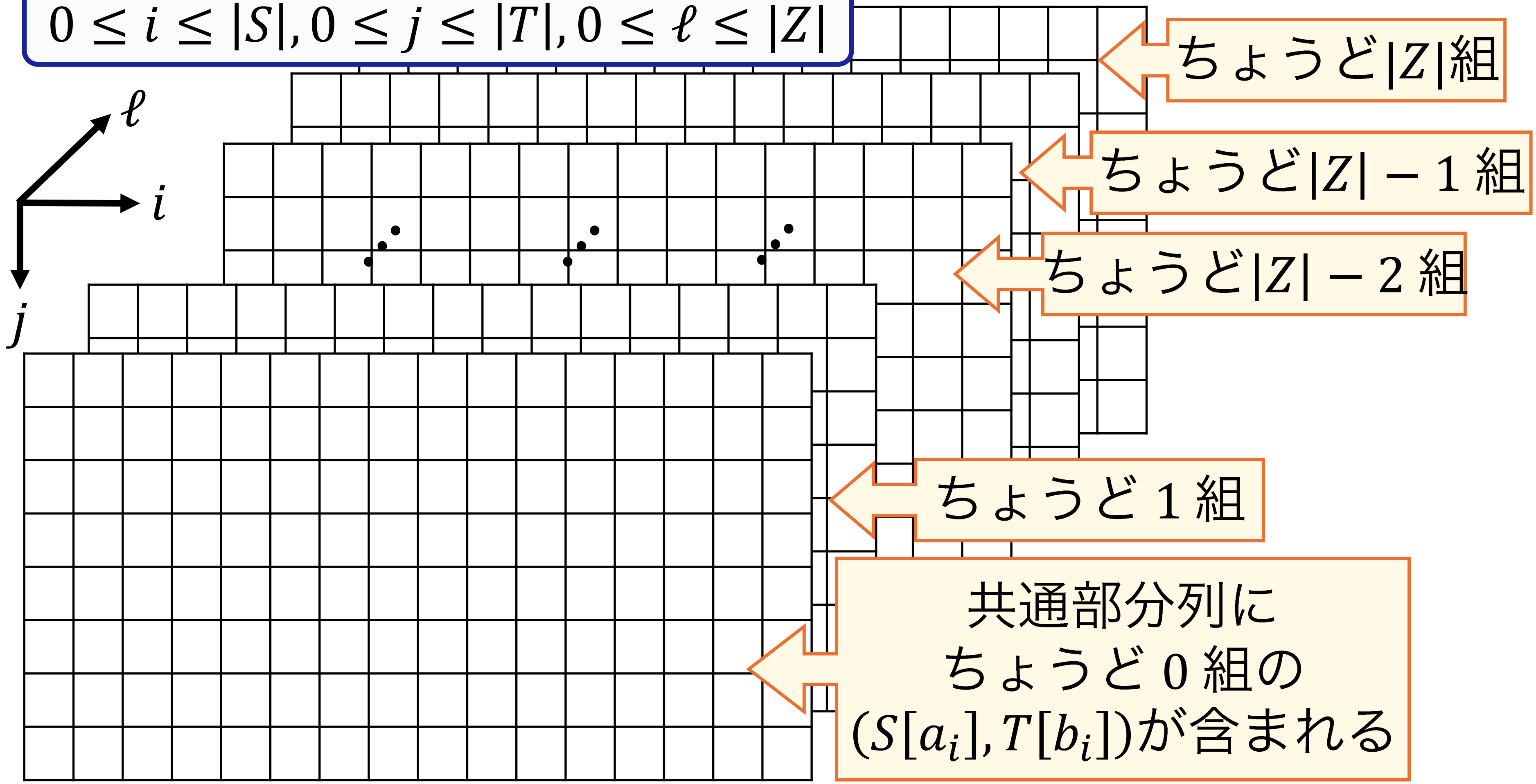
$0 \leq i \leq |S|, 0 \leq j \leq |T|, 0 \leq \ell \leq |Z|$



BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

dp[i][j][ℓ]: (i, j, ℓ) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

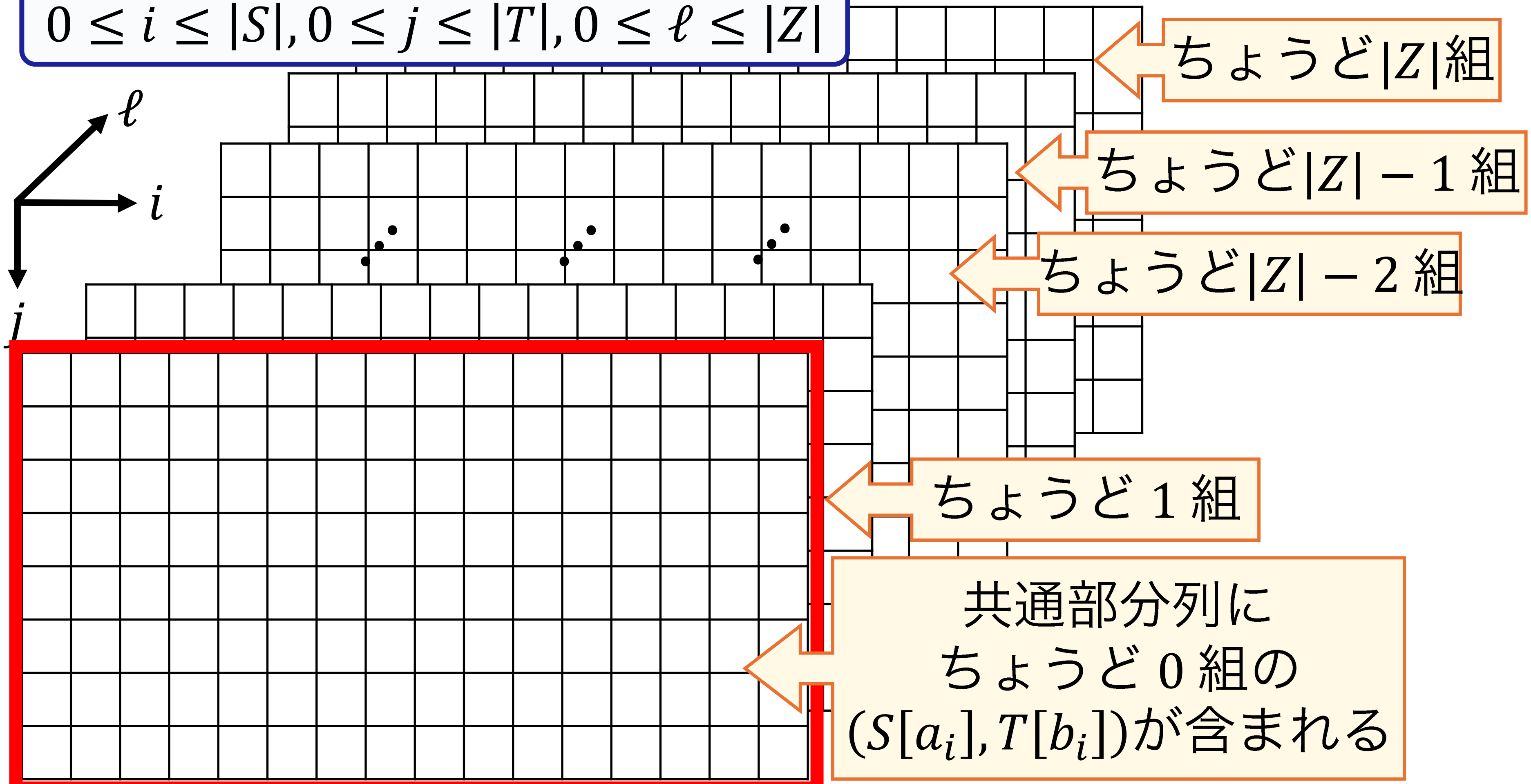
$0 \le i \le |S|, 0 \le j \le |T|, 0 \le \ell \le |Z|$



BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

dp[i][j][ℓ]: (i, j, ℓ) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

$0 \leq i \leq |S|, 0 \leq j \leq |T|, 0 \leq \ell \leq |Z|$



BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S=$ e a b c d, $T=$ a c d b e, $Z=$ a c, $A=(2,4)$, $B=(1,2)$

条件 共通部分列にちょうど 0 組の $(S[a_i], T[b_i])$ が含まれる

dp[i][j]: マス (i,j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

（dp[i][j][ℓ] の ℓ の値は 0 であるため省略）

		e	a	b	c	d
	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)
a	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
c	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
d	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
b	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
e	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

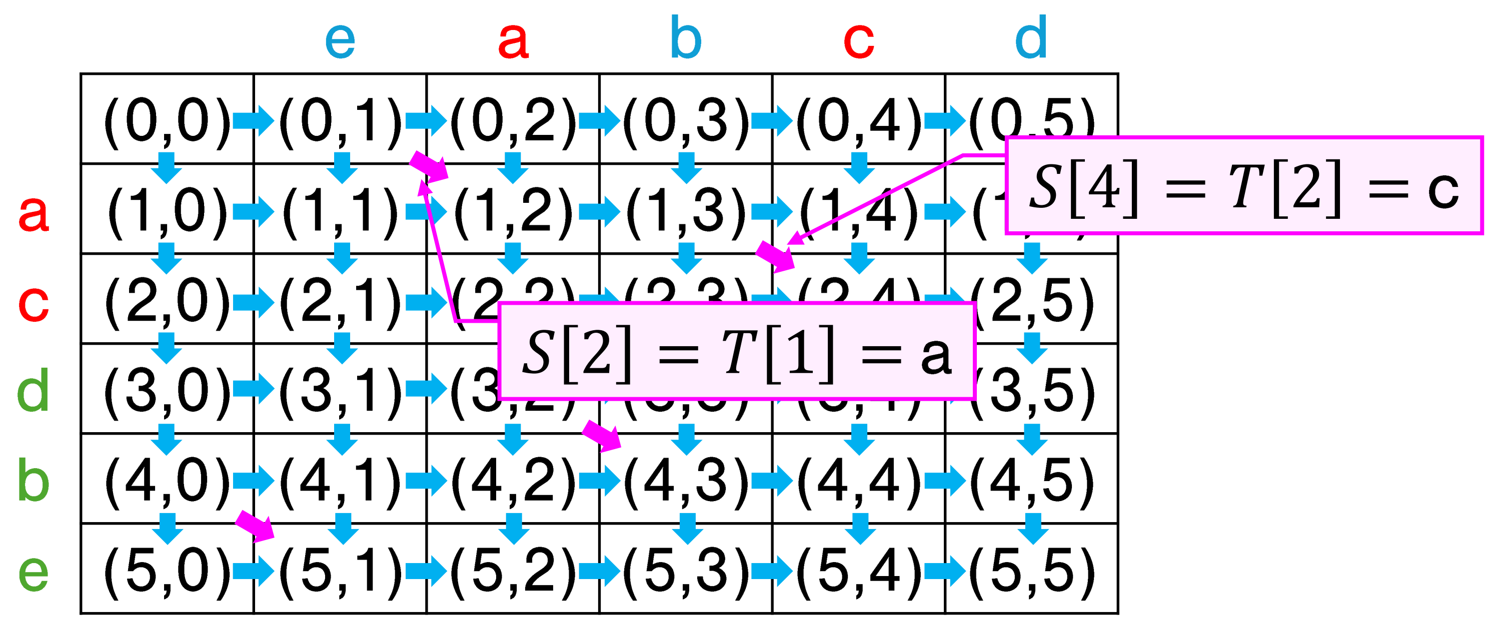
BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S =$ e a b c d, $T =$ a c d b e, $Z =$ a c, $A = (2, 4)$, $B = (1, 2)$

条件 共通部分列にちょうど 0 組の $(S[a_i], T[b_i])$ が含まれる

dp$[i][j]$: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

（dp[i][j][ℓ] の ℓ の値は 0 であるため省略）



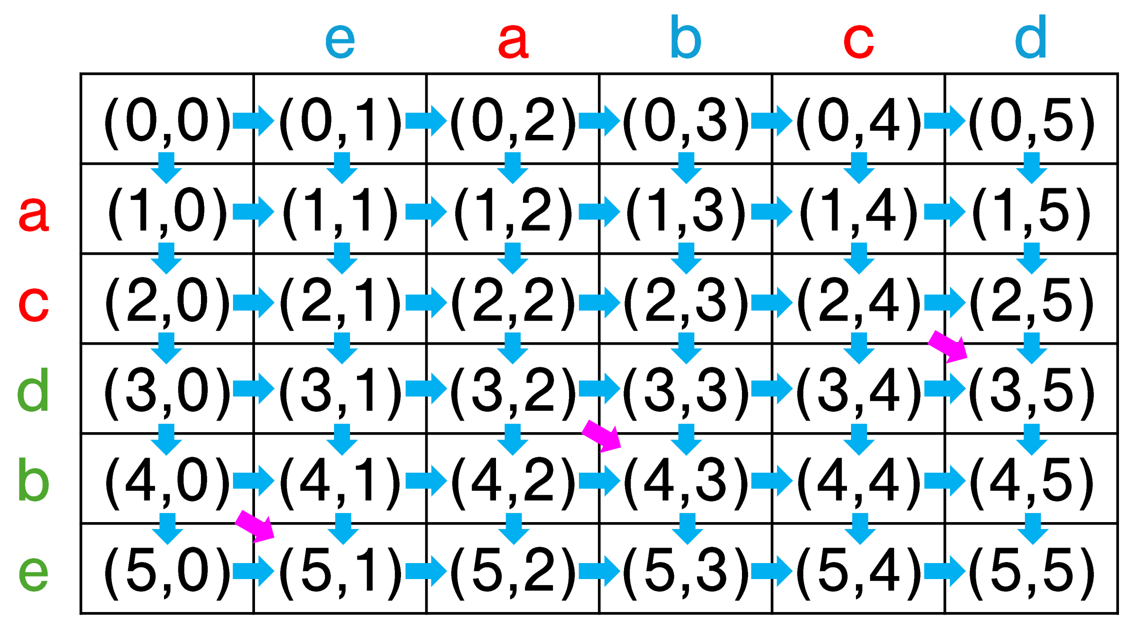
BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S =$ e a b c d, $T =$ a c d b e, $Z =$ a c, $A = (2, 4)$, $B = (1, 2)$

条件 共通部分列にちょうど 0 組の $(S[a_i], T[b_i])$ が含まれる

dp[i][j]: マス (i, j) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

（dp[i][j][ℓ] の ℓ の値は 0 であるため省略）



BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S =$ e a b c d, $T =$ a c d b e, $Z =$ a c, $A = (2,4)$, $B = (1,2)$

条件 共通部分列にちょうど 0 組の $(S[a_i], T[b_i])$ が含まれる

移動方法：① $(i-1, j)$ から下矢印　② $(i, j-1)$ から右矢印

③ $(i-1, j-1)$ から赤い矢印（値を +1 する）

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1
b	0	0	0	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1

BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S=$ e a b c d, $T=$ a c d b e, $Z=$ a c, $A=(2,4)$, $B=(1,2)$

条件 共通部分列にちょうど 0 組の $(S[a_i], T[b_i])$ が含まれる

移動方法：① $(i-1,j)$ から下矢印　② $(i,j-1)$ から右矢印

③ $(i-1,j-1)$ から赤い矢印（値を +1 する）

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	[illegible]
c	0	0	0	0	0	0
d	0	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
b	0	0	0	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1

?

?

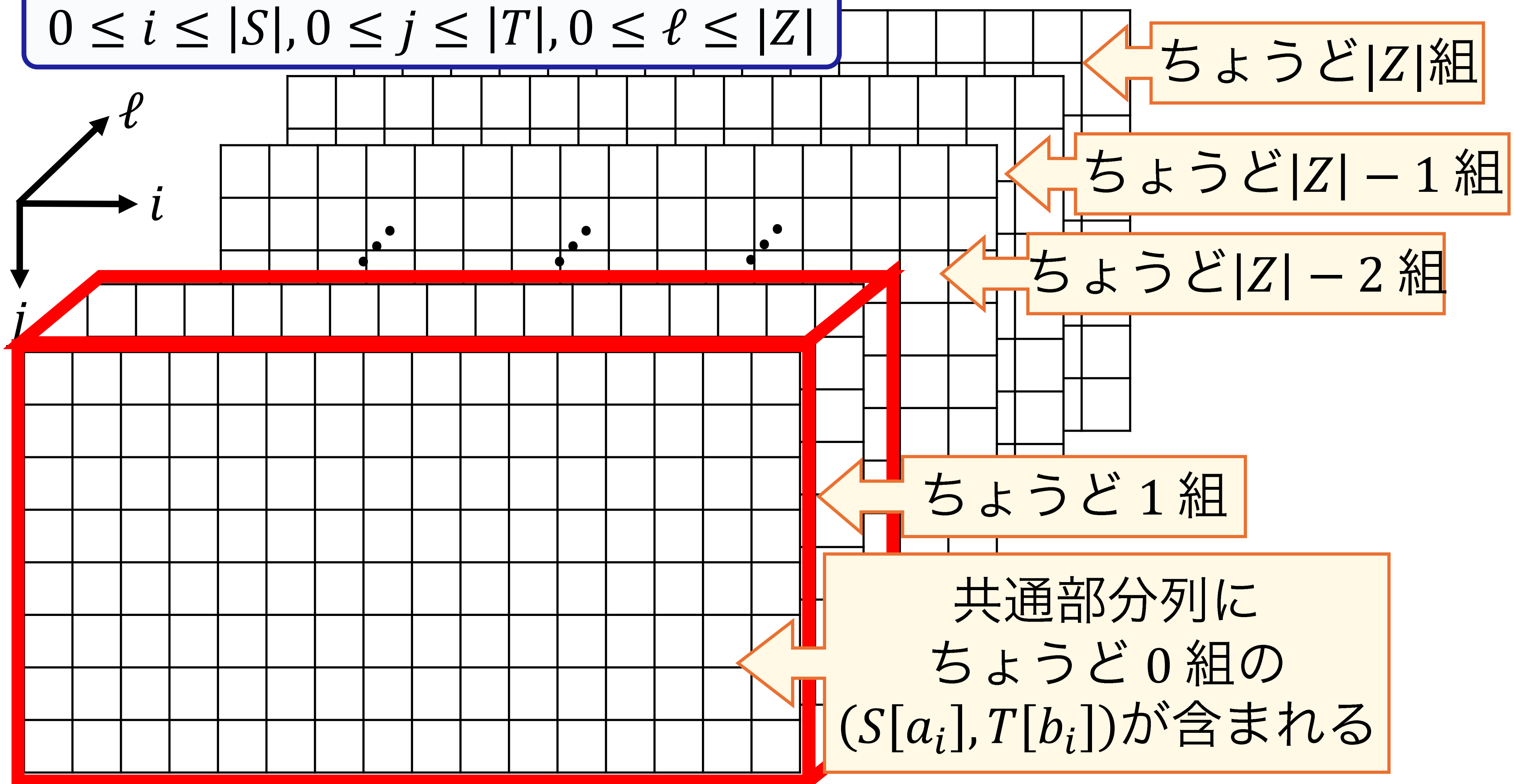
$S[4]=T[2]=$ c

$S[2]=T[1]=$ a

BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

$\mathrm{dp}[i][j][\ell]$: (i, j, ℓ) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

$0 \le i \le |S|, 0 \le j \le |T|, 0 \le \ell \le |Z|$



BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S =$ e a b c d, $T =$ a c d b e, $Z =$ a c, $A = (2, 4)$, $B = (1, 2)$

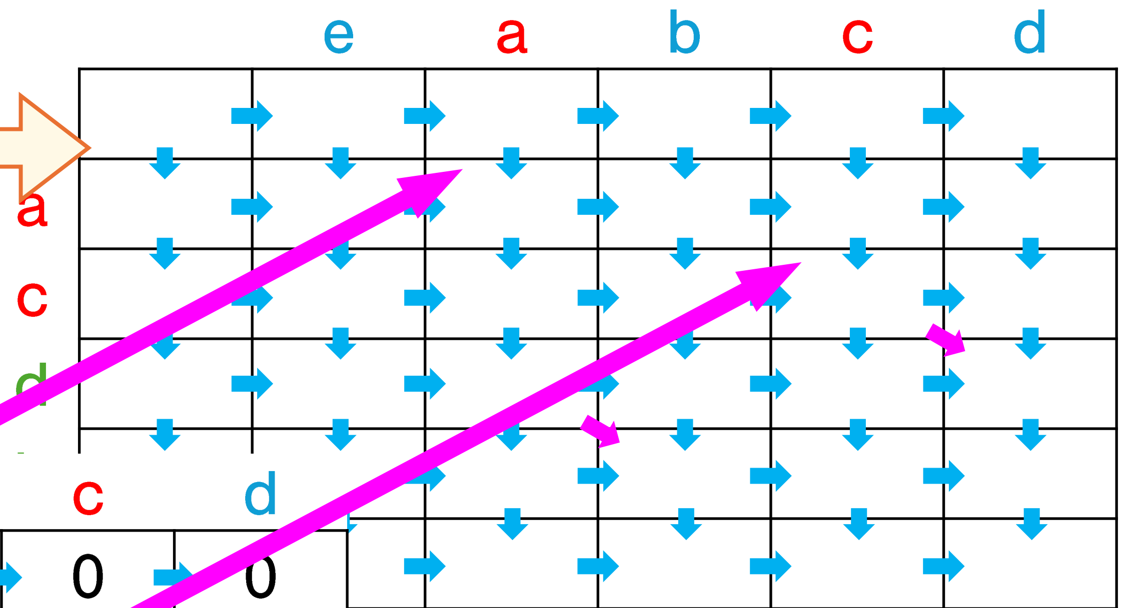
		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1
b	0	0	0	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1

共通部分列に
ちょうど 0 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S =$ e a b c d, $T =$ a c d b e, $Z =$ a c, $A = (2,4)$, $B = (1,2)$

共通部分列に
ちょうど 1 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる



		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1
b	0	0	0	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1

共通部分列に
ちょうど 0 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S =$ e a b c d, $T =$ a c d b e, $Z =$ a c, $A = (2,4)$, $B = (1,2)$

共通部分列に
ちょうど 1 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0					
c	0					
d	0					

0 0

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1
b	0	0	0	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1

共通部分列に
ちょうど 0 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S =$ e a b c d, $T =$ a c d b e, $Z =$ a c, $A = (2,4)$, $B = (1,2)$

共通部分列に
ちょうど 1 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

0 0

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0				
c	0					
d	0					

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1
b	0	0	0	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1

共通部分列に
ちょうど 0 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S=$ e a b c d, $T=$ a c d b e, $Z=$ a c, $A=(2,4)$, $B=(1,2)$

共通部分列に
ちょうど 1 組の
$(S[a_i],T[b_i])$が含まれる

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0				
c	0					
d	0					

0

1

0

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1
b	0	0	0	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1

共通部分列に
ちょうど 0 組の
$(S[a_i],T[b_i])$が含まれる

BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S =$ e a b c d, $T =$ a c d b e, $Z =$ a c, $A = (2,4)$, $B = (1,2)$

共通部分列に
ちょうど 1 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	1			
c	0					
d	0					

1
0
0

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1
b	0	0	0	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1

共通部分列に
ちょうど 0 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S=$ e a b c d, $T=$ a c d b e, $Z=$ a c, $A=(2,4)$, $B=(1,2)$

共通部分列に
ちょうど 1 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	1	1	1	1
c	0	0	1	1	1	
d	0	0		1		
			1	2		
			1	2		

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1
b	0	0	0	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1

共通部分列に
ちょうど 0 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S =$ e a b c d, $T =$ a c d b e, $Z =$ a c, $A = (2,4)$, $B = (1,2)$

共通部分列に
ちょうど 1 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

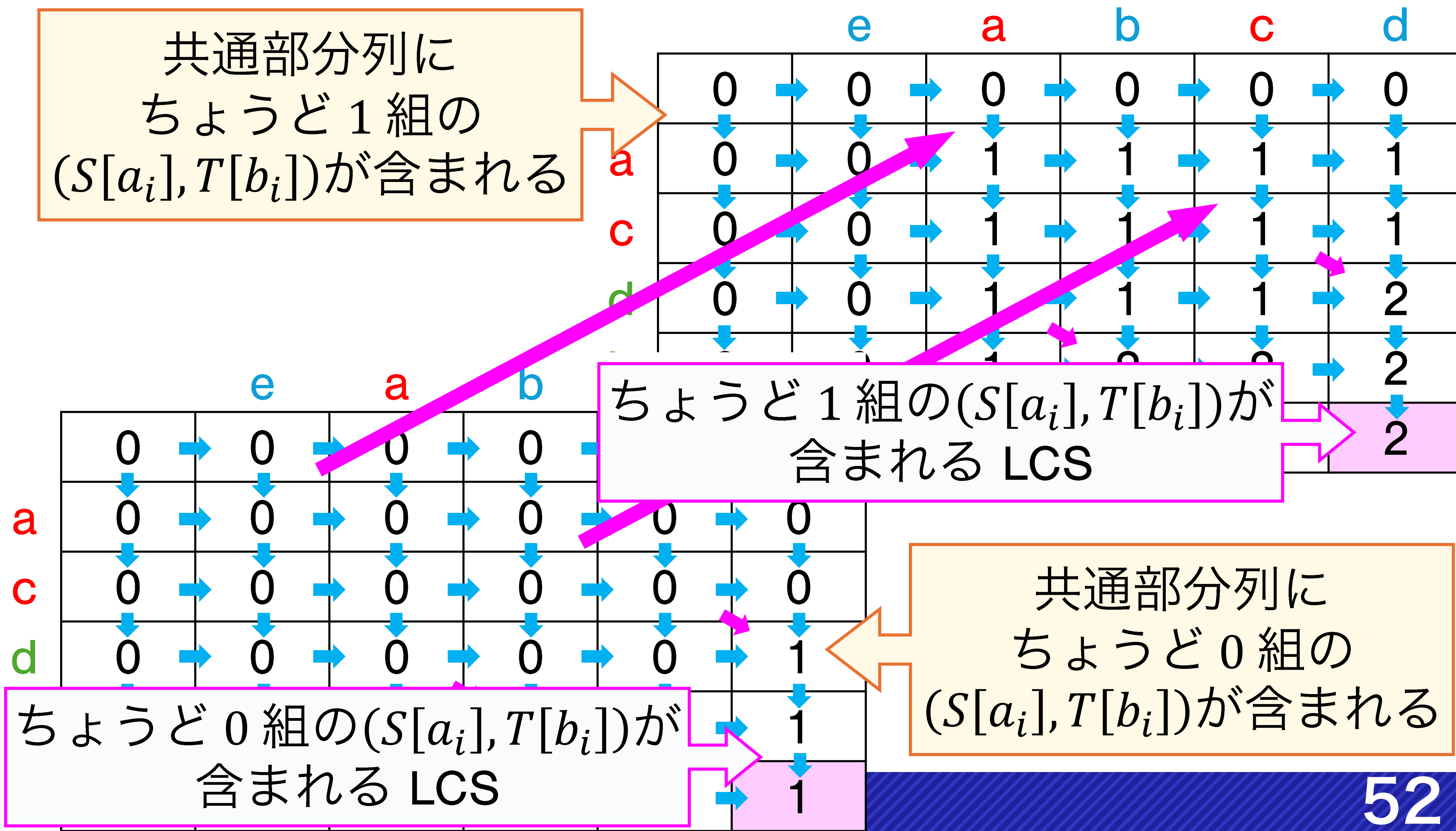
		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	1	1	1	1
c	0	0	1	1	1	1
d	0	0	1	1	1	2
	[illegible]	[illegible]	1	2	2	2
	[illegible]	[illegible]	1	2	2	2

		e	a	b	c	d
	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1
b	0	0	0	1	1	1
e	0	1	1	1	1	1

共通部分列に
ちょうど 0 組の
$(S[a_i], T[b_i])$が含まれる

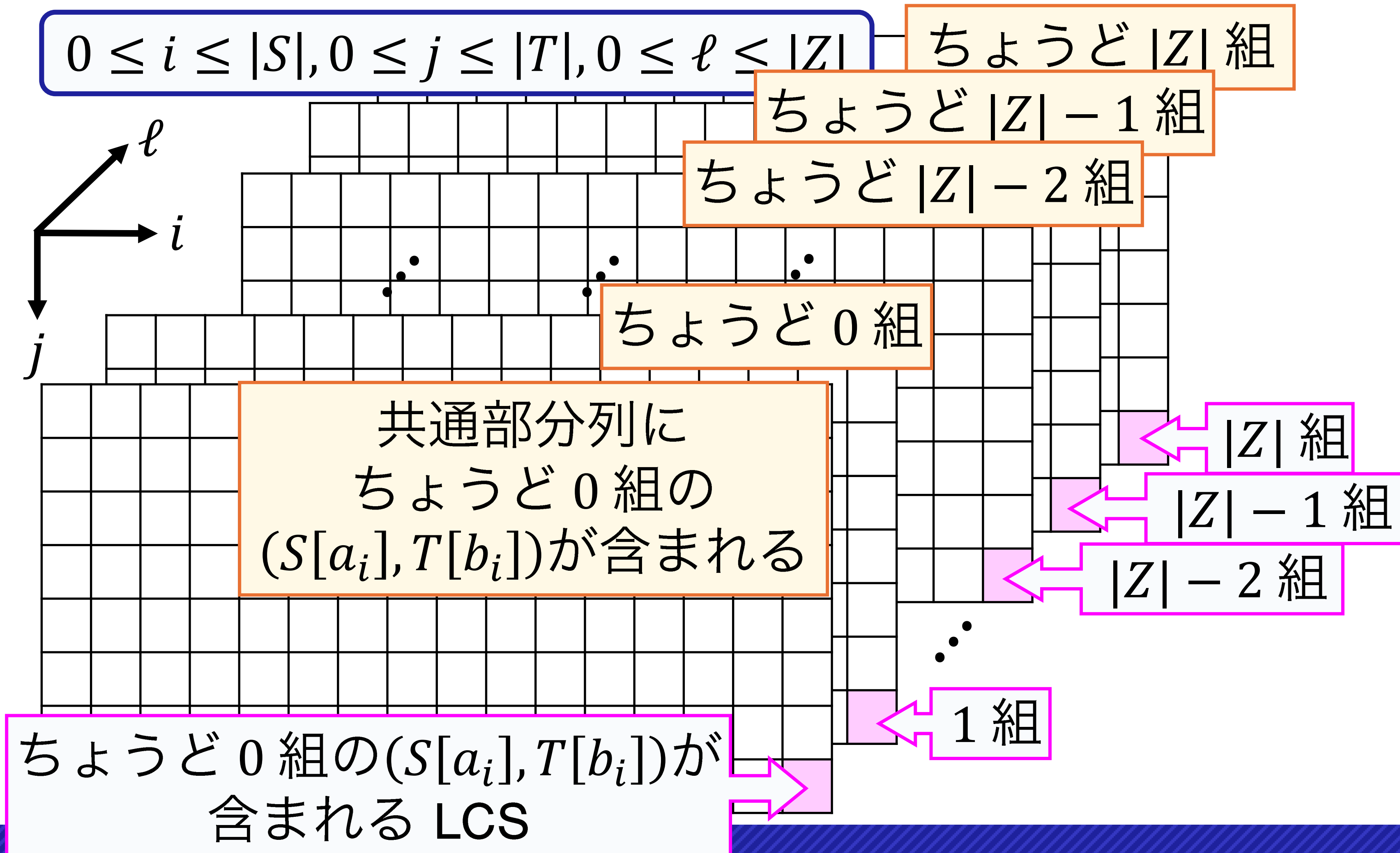
BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

例 $S=$ e a b c d, $T=$ a c d b e, $Z=$ a c, $A=(2,4)$, $B=(1,2)$



BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

$\mathrm{dp}[i][j][\ell]$: (i, j, ℓ) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値



変更制約付き最長共通部分列問題（再）

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \dots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する

添字列 $A = (a_0, a_1, \dots, a_{|Z|-1})$，$B = (b_0, b_1, \dots, b_{|Z|-1})$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i]$ $(0 \leq i \leq |Z| - 1)$

目的： ~~k 組み以下の $(S[a_i],\ T[b_i])$ を削除するとき，LCS の長さを求める~~

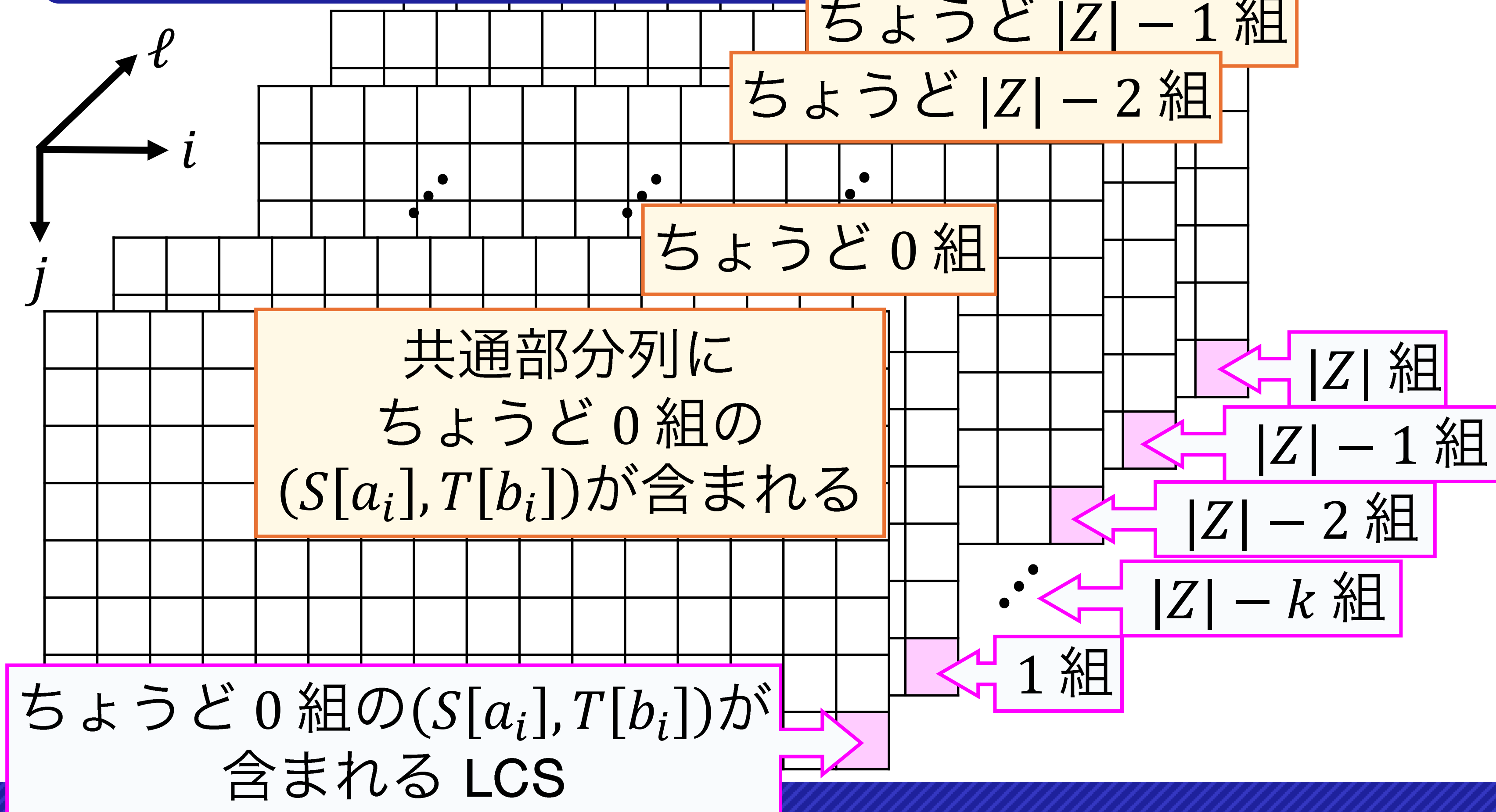
⇩

$(|Z| - k)$ 組み以上の $(S[a_i],\ T[b_i])$ からなる，LCS の長さを求める

BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

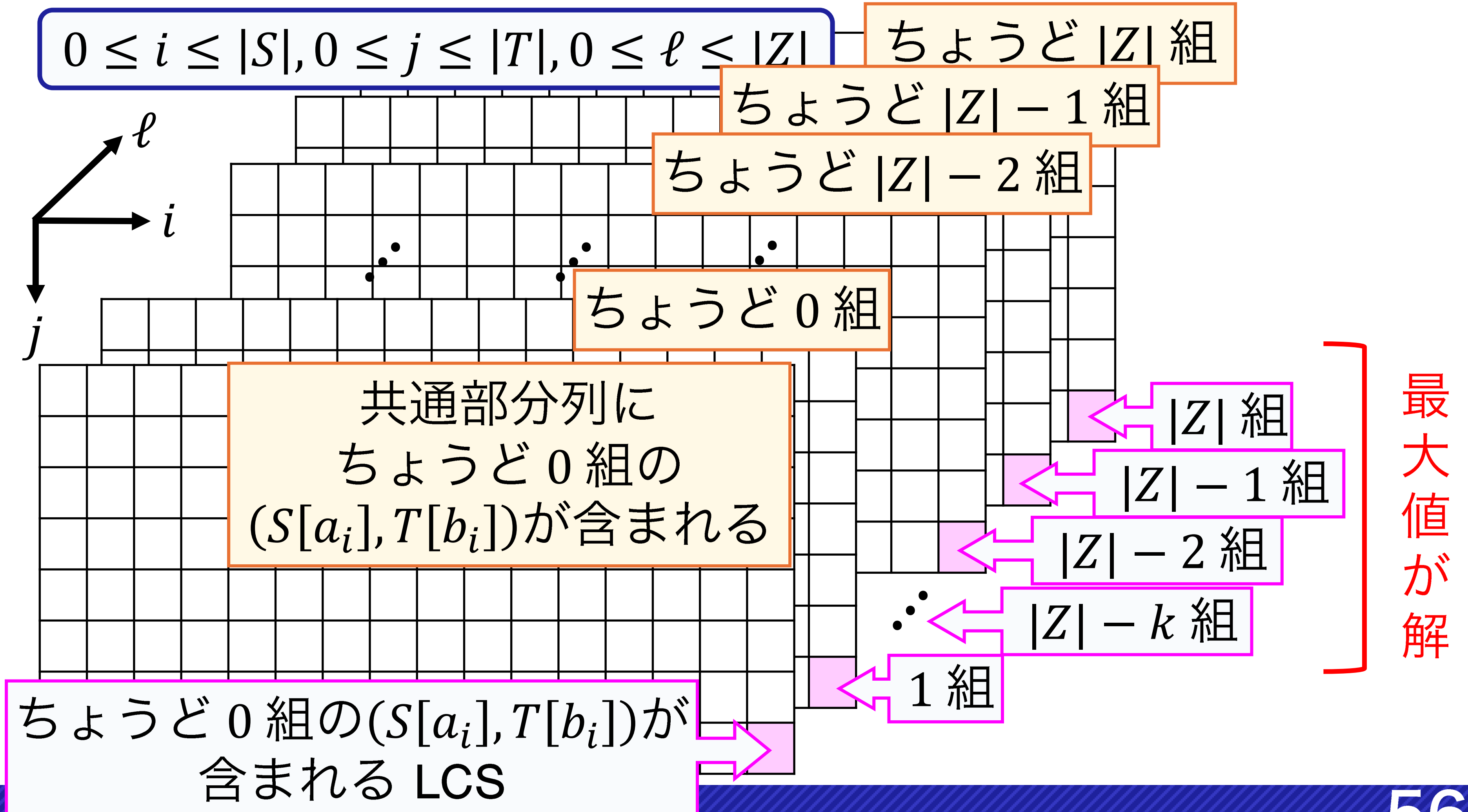
dp[i][j][ℓ]: (i, j, ℓ) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

$0 \le i \le |S|, 0 \le j \le |T|, 0 \le \ell \le |Z|$



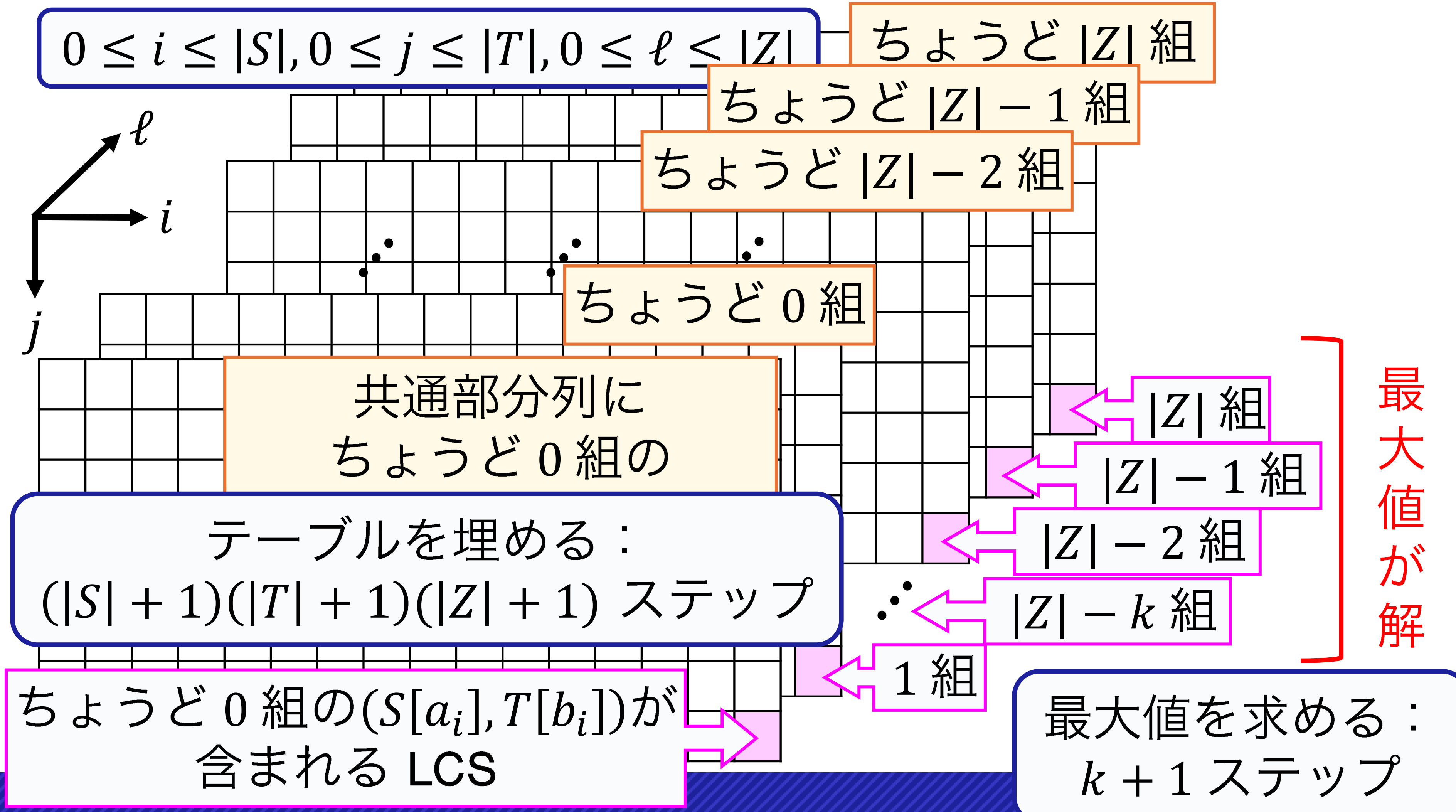
BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

dp[i][j][ℓ]: (i, j, ℓ) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値



BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

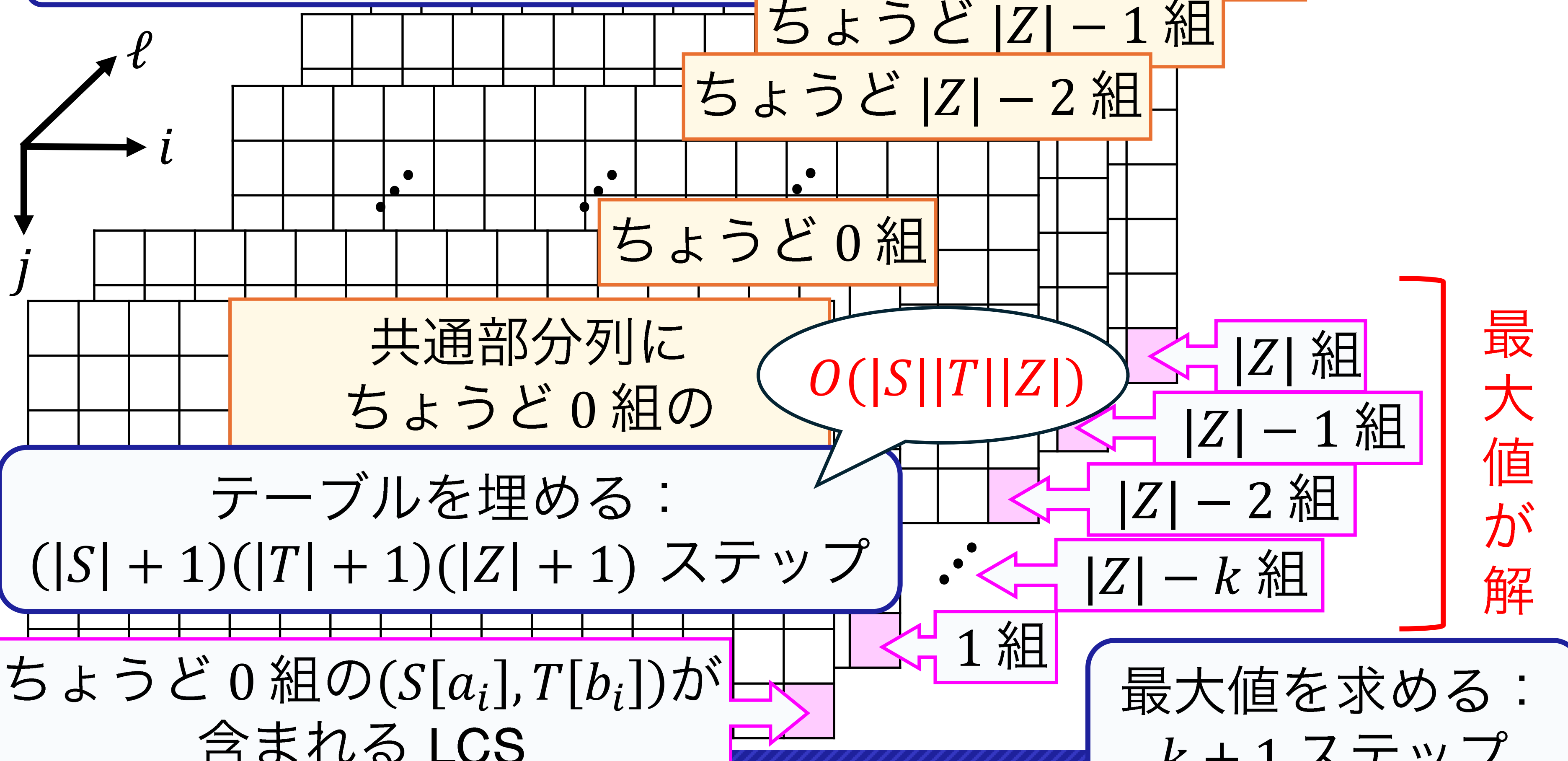
$\mathrm{dp}[i][j][\ell]$: (i, j, ℓ) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値



BD-LCS 問題に対するアルゴリズム

dp[i][j][ℓ]: (i, j, ℓ) に到達するまでに通る赤い矢印の最大値

$0 \le i \le |S|, 0 \le j \le |T|, 0 \le \ell \le |Z|$



テーブルを埋める：
$(|S|+1)(|T|+1)(|Z|+1)$ ステップ

ちょうど 0 組の$(S[a_i], T[b_i])$が
含まれる LCS

最大値を求める：
$k+1$ ステップ

まとめ

変更制約付き最長共通部分列問題（BD-LCS 問題）

入力： S, T，初期共通部分列 $Z = z_0\, z_1 \dots z_{|Z|-1}$，$S, T$ に対する添字列 $A = \left(a_0, a_1, \dots, a_{|Z|-1}\right)$, $B = \left(b_0, b_1, \dots, b_{|Z|-1}\right)$，$k \in \mathbb{N}_0$

条件： $S[a_i] = T[b_i] = Z[i]\ \ (0 \le i \le |Z| - 1)$

目的： k 組み以下の $(S[a_i], T[b_i])$ を削除するとき，LCS の長さを求める

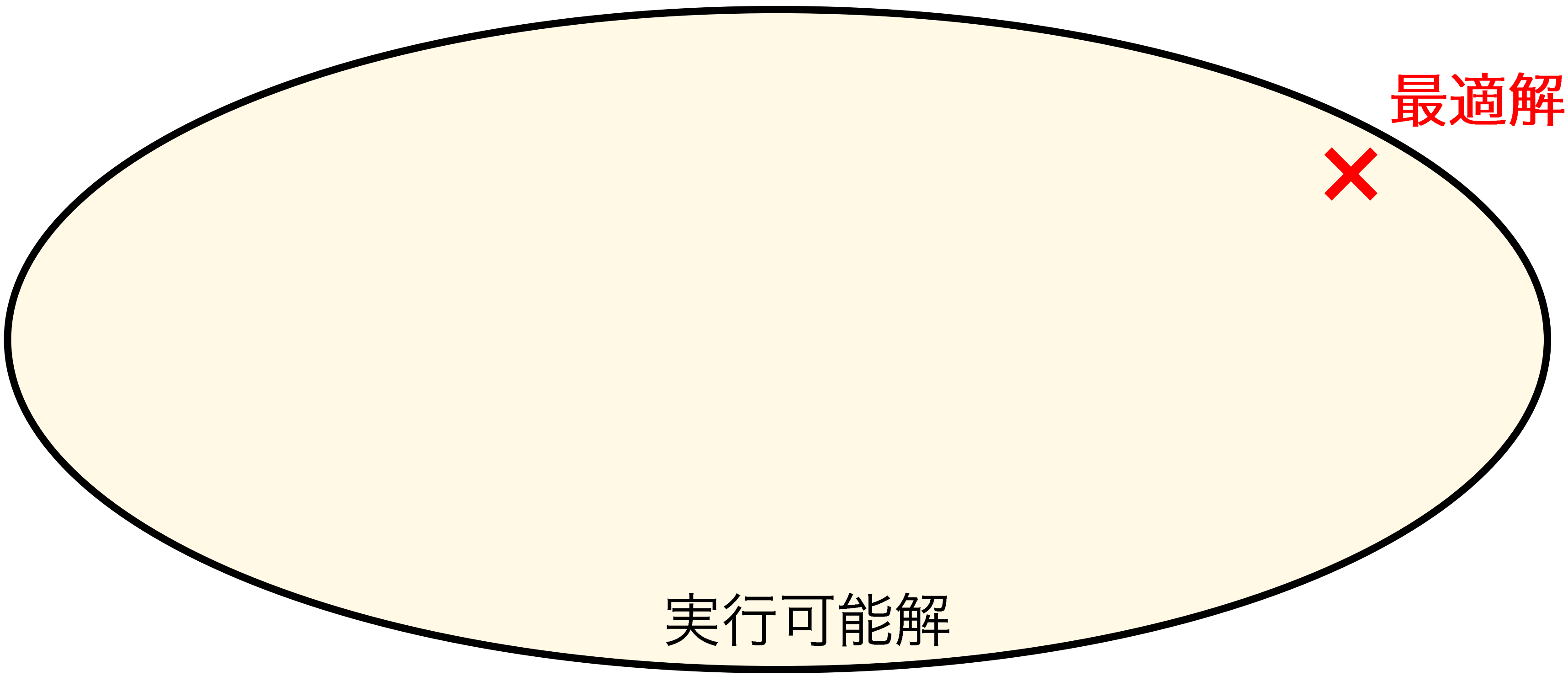
定理

文字列 S, T と，初期共通部分列 Z に対して $O(|S||T||Z|)$ の計算時間量で BD-LCS 問題の解を求めることができる．

本研究の背景

増分最適化 [Robert A et al., 1974]

　最適化問題に対して初期解を与え，変更を加えることで最適解を求める手法.



本研究の背景

増分最適化 [Robert A et al., 1974]

　最適化問題に対して初期解を与え，変更を加えることで最適解を求める手法.