

第200回 アルゴリズム研究発表会

凸多面体の重なりを持たない 展開図の数え上げ

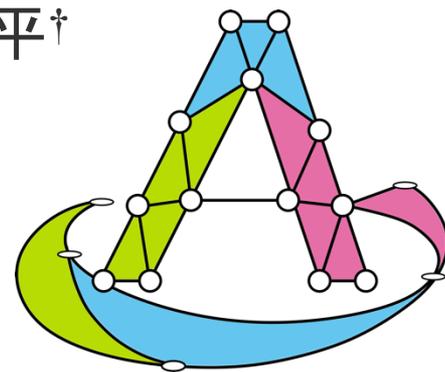
◎ 塩田 拓海^{*‡} 榎本 優大^{**} 五郎部 誠士^{**}

堀山 貴史^{**} 鎌田 斗南[†] 斎藤 寿樹^{*} 上原 隆平[†]

*九州工業大学 **北海道大学

†北陸先端科学技術大学院大学 ‡JSPS 特別研究員

2024年 11月 26日 (火)



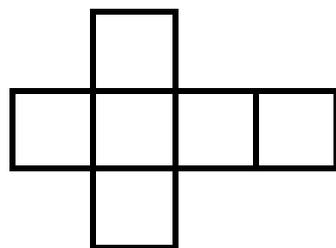
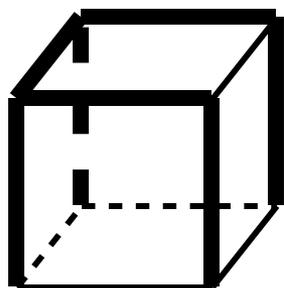
展開図とは



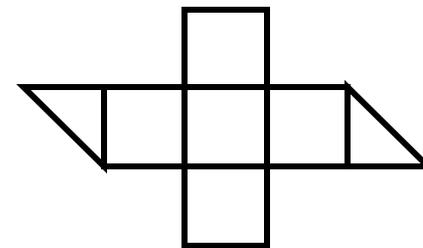
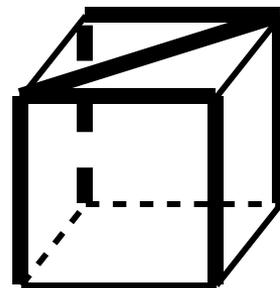
定義1 [E. D. Demaine and J. O'Rourke, 2007]

多面体の辺や面に切れ込み(切断線)を入れて, 平坦に開いた多角形を**展開図**という. 切断線が辺のみである場合, 特にこれを**辺展開図**といい, それ以外の場合を**一般展開図**という.

各立方体を太線に沿って切ると …



(a) 辺展開図



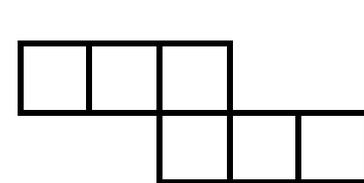
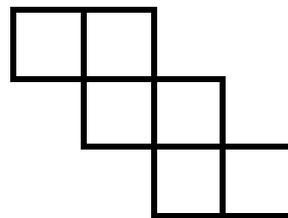
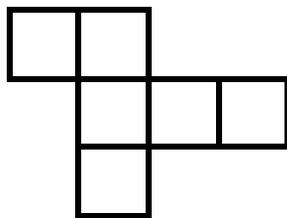
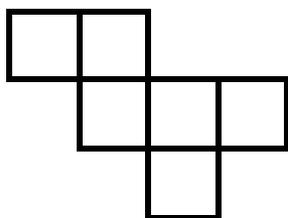
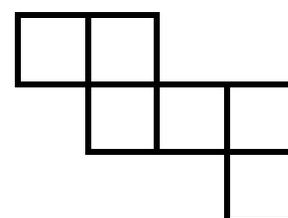
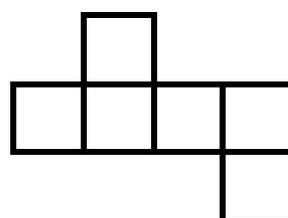
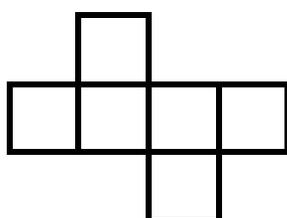
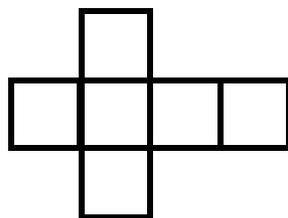
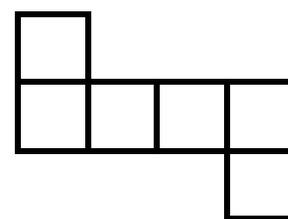
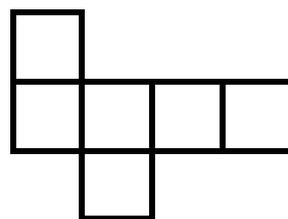
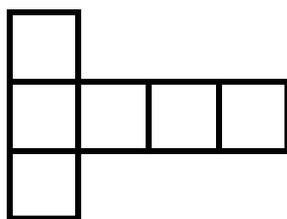
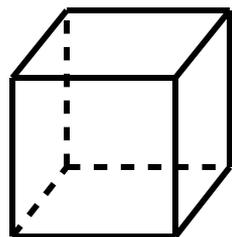
(b) 一般展開図

辺展開図の数え上げ



多面体は切断線の入れ方によって、異なる展開図が得られる

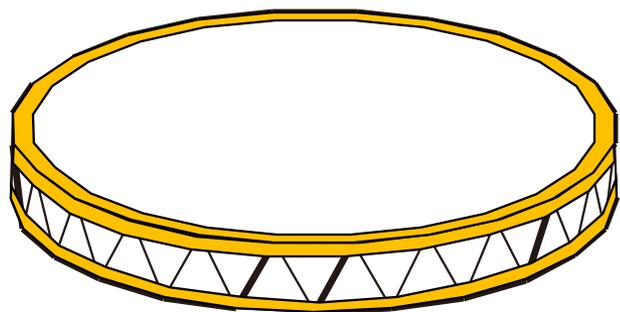
【例】立方体には、11種類の**辺展開図**がある



重なりを持たない/持つ辺展開図



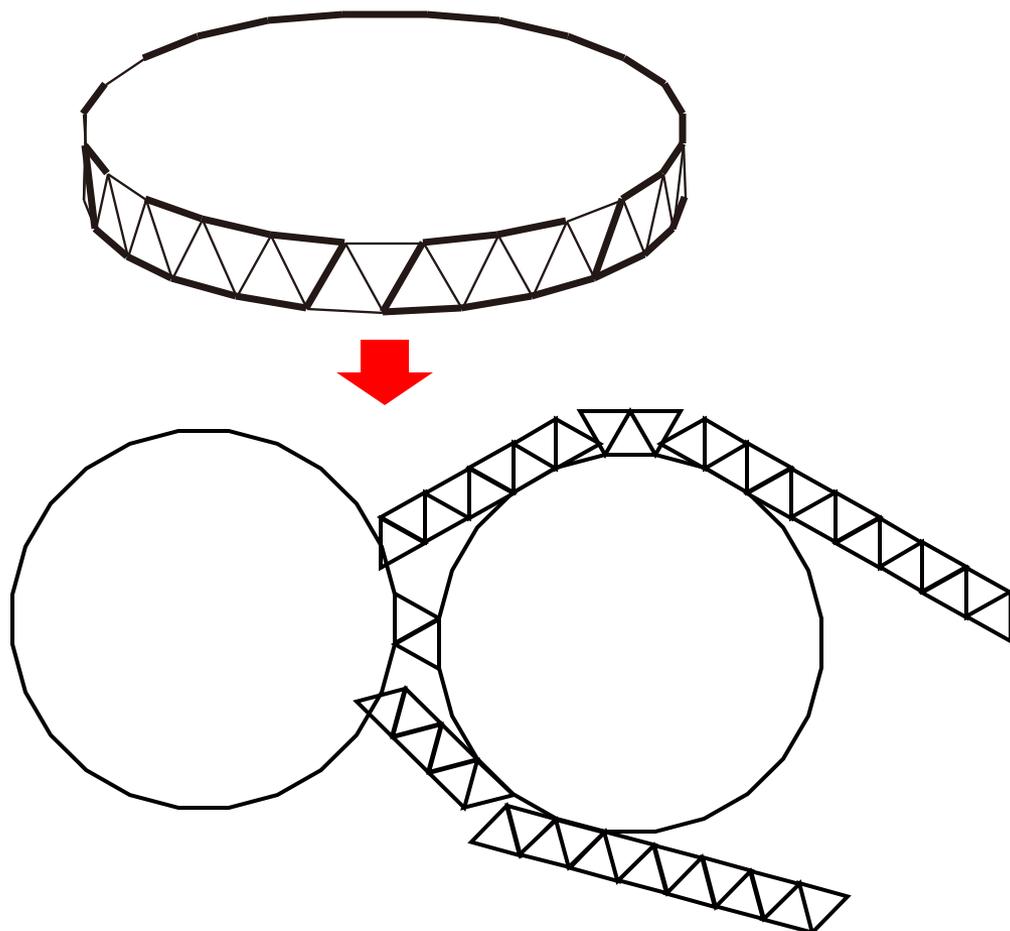
配布したモデルからマスキングテープを剥がしてください



重なりを持たない/持つ辺展開図



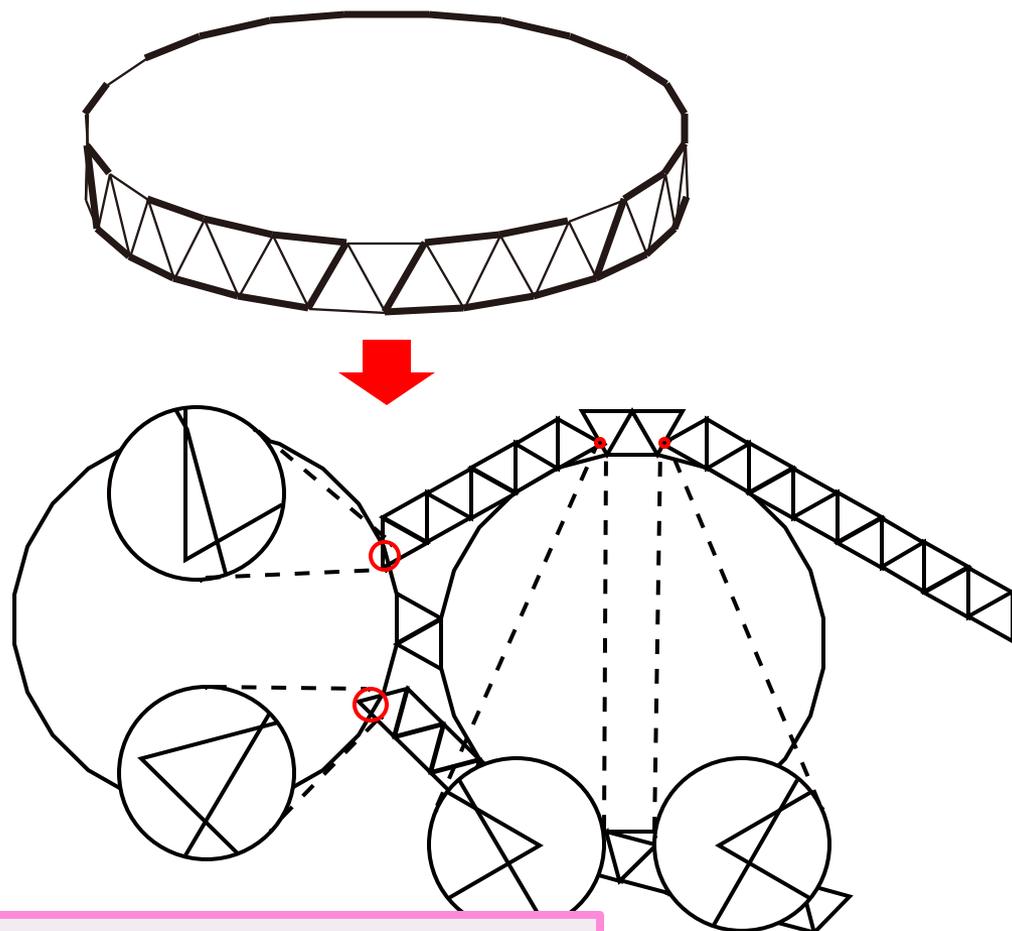
配布したモデルからマスキングテープを剥がしてください



重なりを持たない/持つ辺展開図



配布したモデルからマスキングテープを剥がしてください



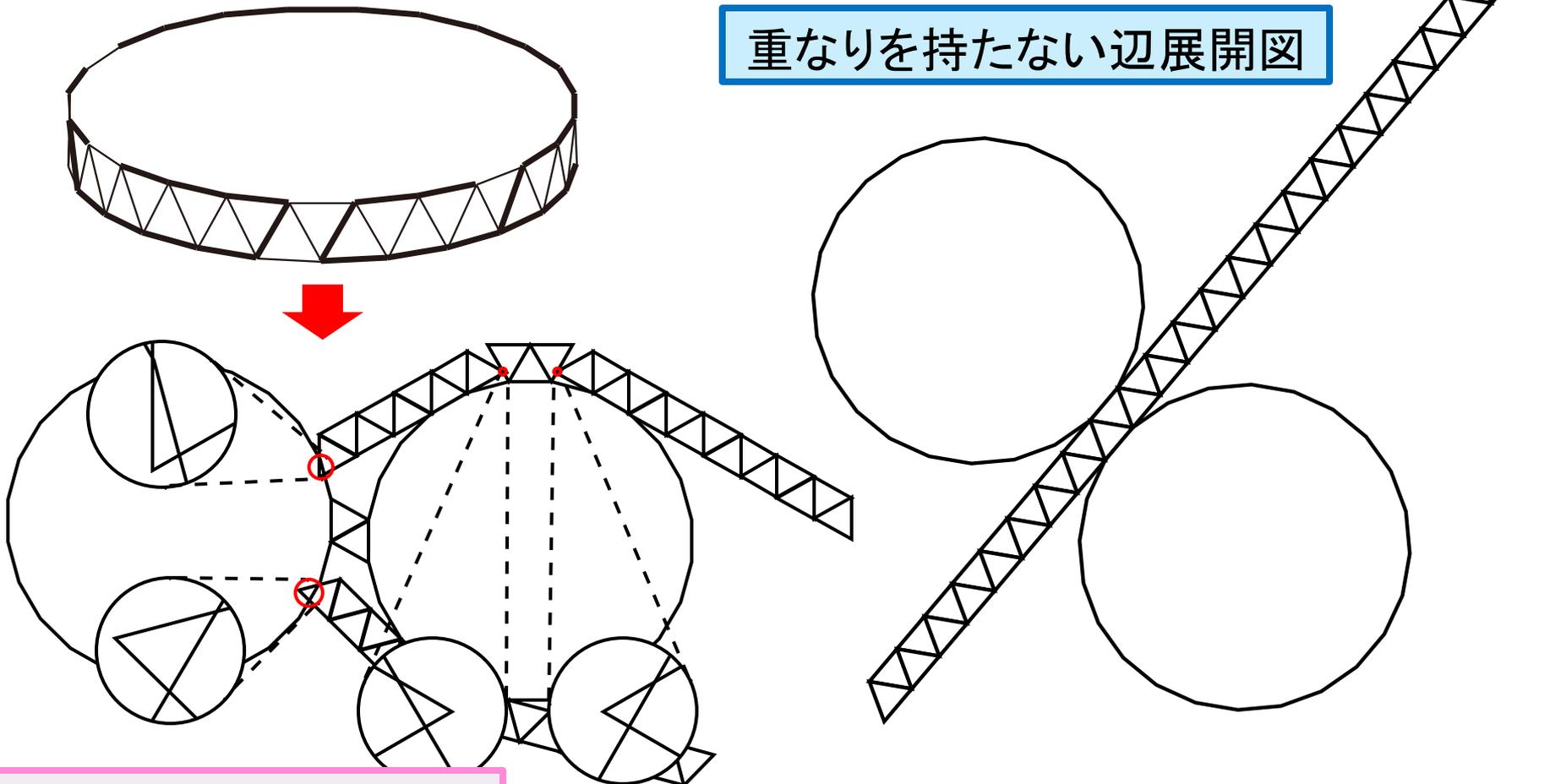
重なりを持つ辺展開図

重なりを持たない/持つ辺展開図



配布したモデルからマスキングテープを剥がしてください

重なりを持たない辺展開図

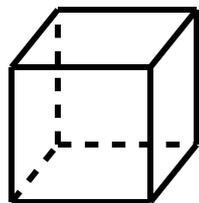


重なりを持つ辺展開図

重なりを持たない/持つ辺展開図

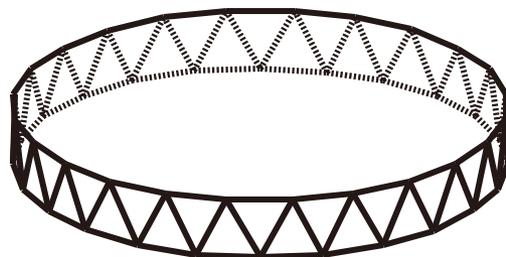


□ 立方体



→ 全てが重なりを持たない辺展開図

□ 配布した多面体



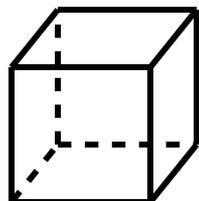
○ 重なりを持たない辺展開図: ?

○ 重なりを持つ辺展開図 : ?

重なりを持たない/持つ辺展開図

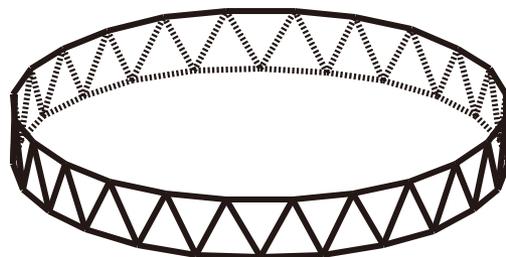


□ 立方体



→ 全てが重なりを持たない辺展開図

□ 配布した多面体



辺展開図の個数:
11垓 939京 1149兆
9984億 4981万 9648 個

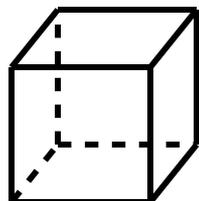
○ 重なりを持たない辺展開図: ?

○ 重なりを持つ辺展開図 : ?

重なりを持たない/持つ辺展開図

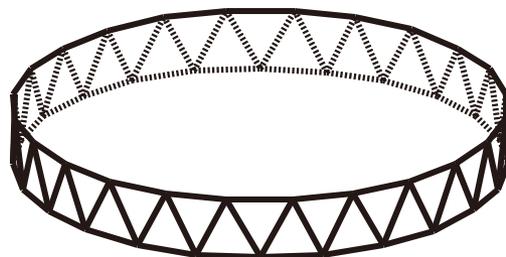


□ 立方体



→ 全てが重なりを持たない辺展開図

□ 配布した多面体



辺展開図の個数：
11垓 939京 1149兆
9984億 4981万 9648 個

○ 重なりを持たない辺展開図：？

○ 重なりを持つ辺展開図：？

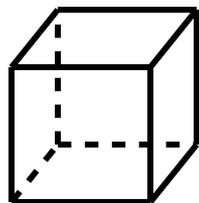
本研究の成果①

重なりを持つ辺展開図が存在するいくつかの整面凸多面体に対し、重なりを持つ/持たない辺展開図がいくつあるか示した。

重なりを持たない/持つ辺展開図

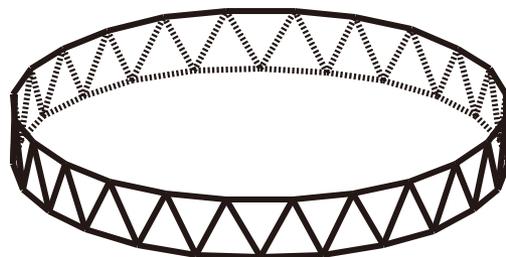


□ 立方体



→ 全てが重なりを持たない辺展開図

□ 配布した多面体



辺展開図の個数：
11垓 939京 1149兆
9984億 4981万 9648 個

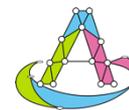
○ 重なりを持たない辺展開図 : 162,941,846,136,285,049,392 個

○ 重なりを持つ辺展開図 : 946,449,303,862,164,770,256 個

本研究の成果①

重なりを持つ辺展開図が存在するいくつかの整面凸多面体に対し、重なりを持つ/持たない辺展開図がいくつあるか示した。

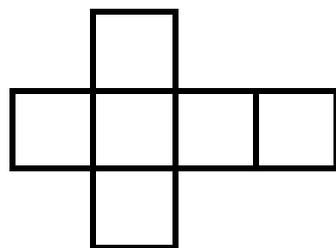
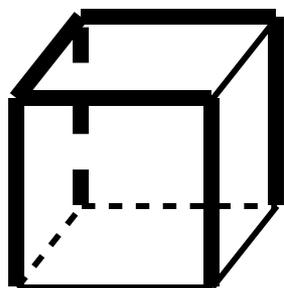
展開図とは(再掲)



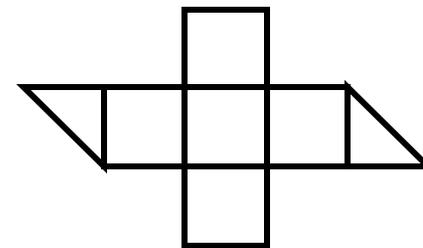
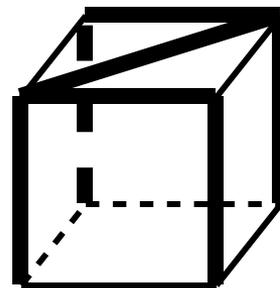
定義1 [E. D. Demaine and J. O'Rourke, 2007]

多面体の辺や面に切れ込み(切断線)を入れて, 平坦に開いた多角形を**展開図**という. 切断線が辺のみである場合, 特にこれを**辺展開図**といい, それ以外の場合を**一般展開図**という.

各立方体を太線に沿って切ると …



(a) 辺展開図



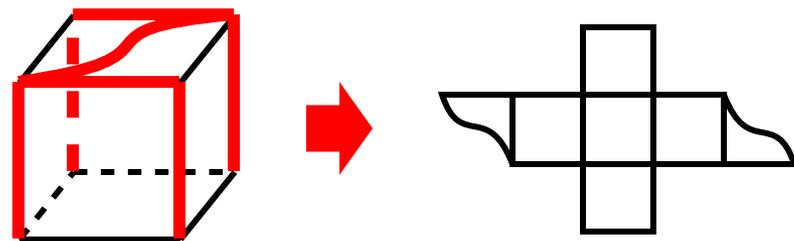
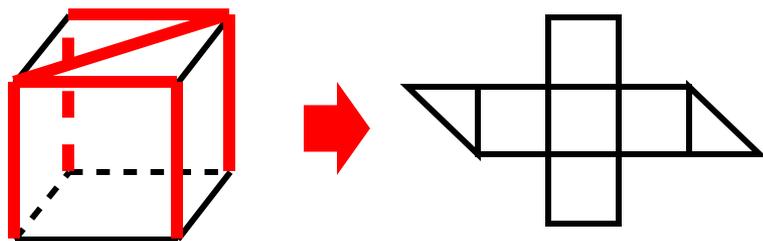
(b) 一般展開図

一般展開図の数え上げ



多面体は切断線の入れ方によって、異なる展開図が得られる

【例】立方体には、非可算無限個の一般展開図がある

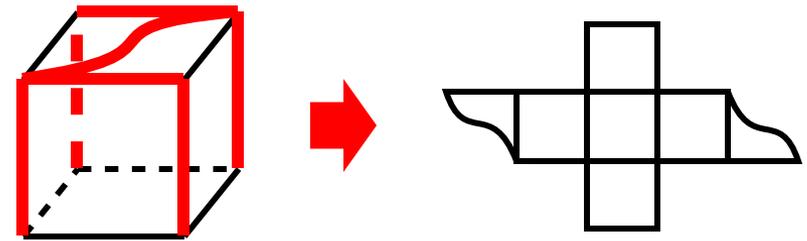
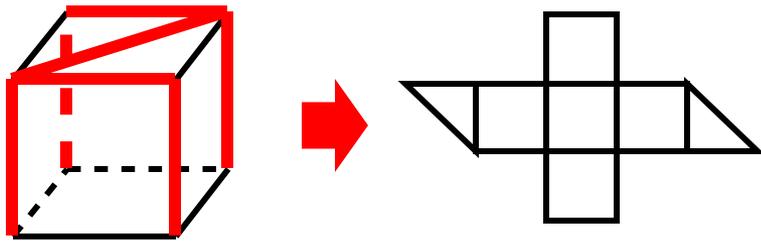




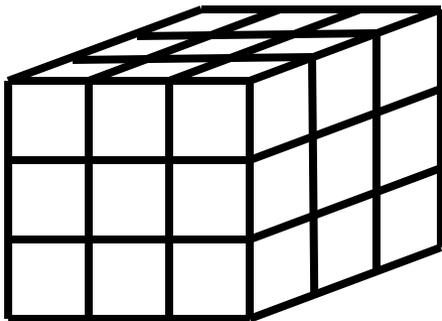
一般展開図の数え上げ

多面体は切断線の入れ方によって、異なる展開図が得られる

【例】立方体には、非可算無限個の一般展開図がある



- ✓ 切断線を格子状の線のみ
→ 展開図の個数は有限個

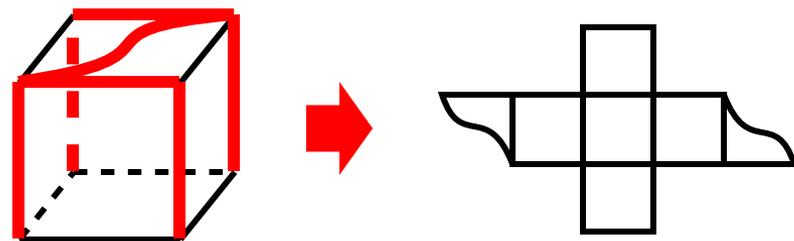
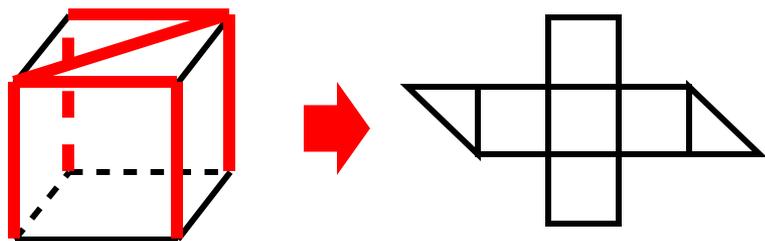


一般展開図の数え上げ

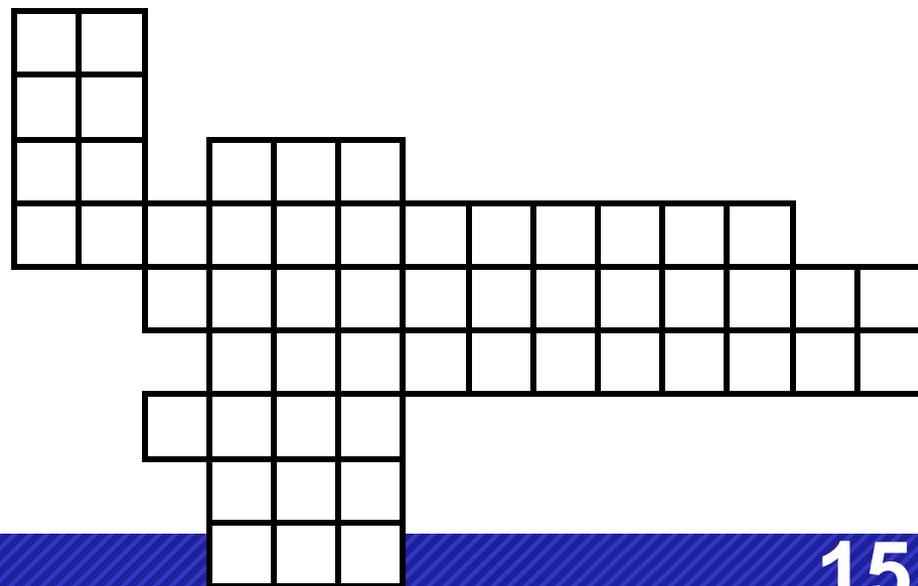
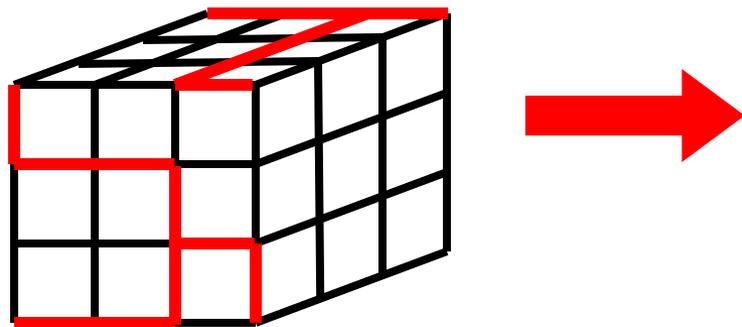


多面体は切断線の入れ方によって、異なる展開図が得られる

【例】立方体には、非可算無限個の一般展開図がある



- ✓ 切断線を格子状の線のみ
→ 展開図の個数は有限個

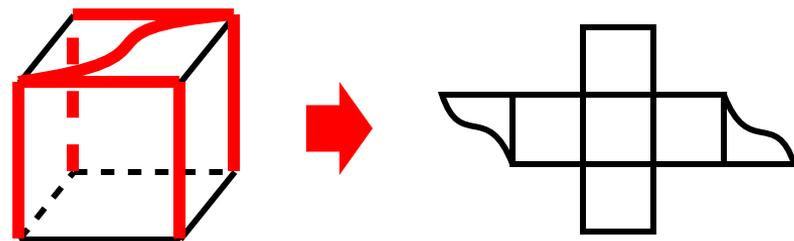
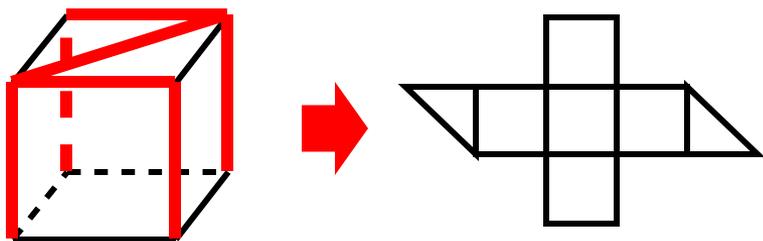


一般展開図の数え上げ

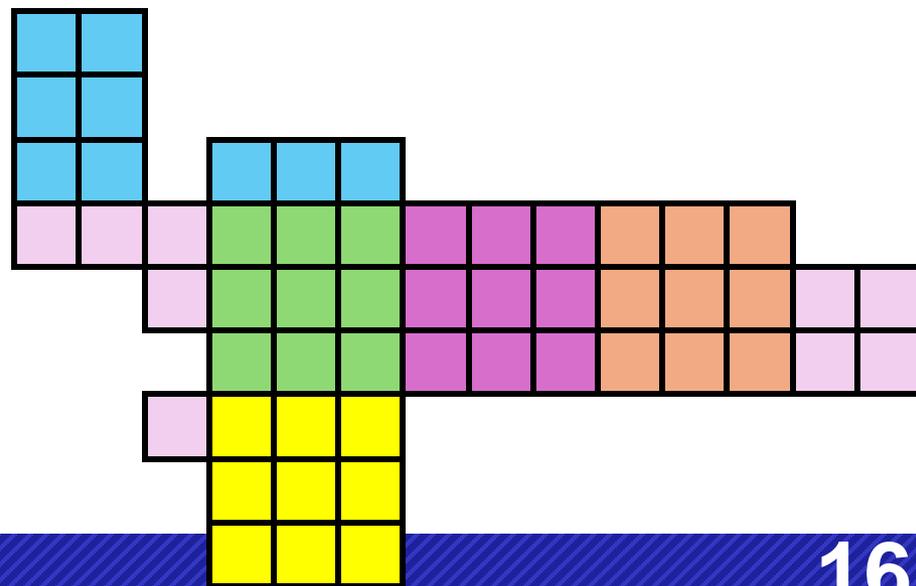
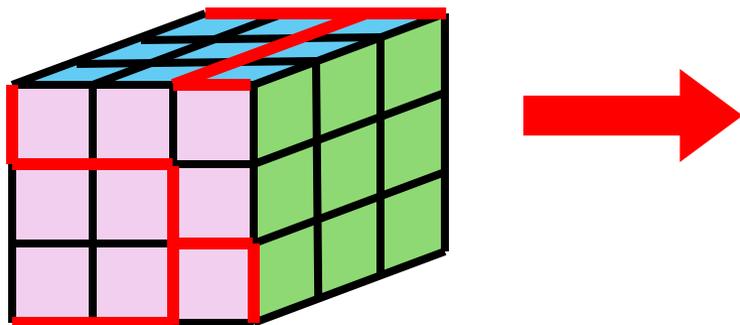


多面体は切断線の入れ方によって、異なる展開図が得られる

【例】立方体には、非可算無限個の一般展開図がある



- ✓ 切断線を格子状の線のみ
→ 展開図の個数は有限個

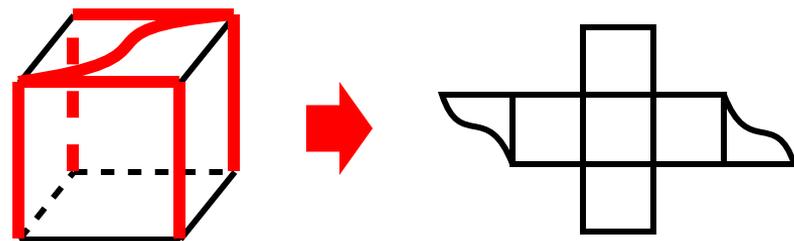
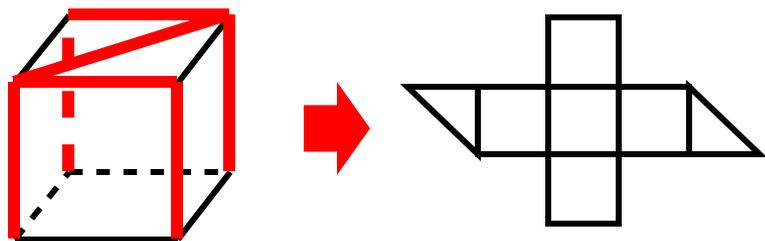


一般展開図の数え上げ

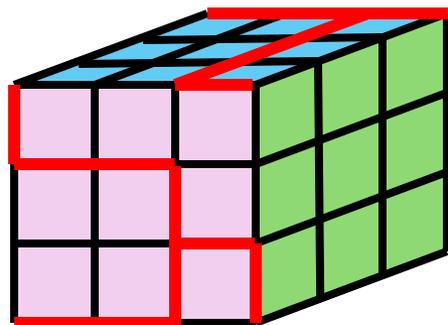


多面体は切断線の入れ方によって、異なる展開図が得られる

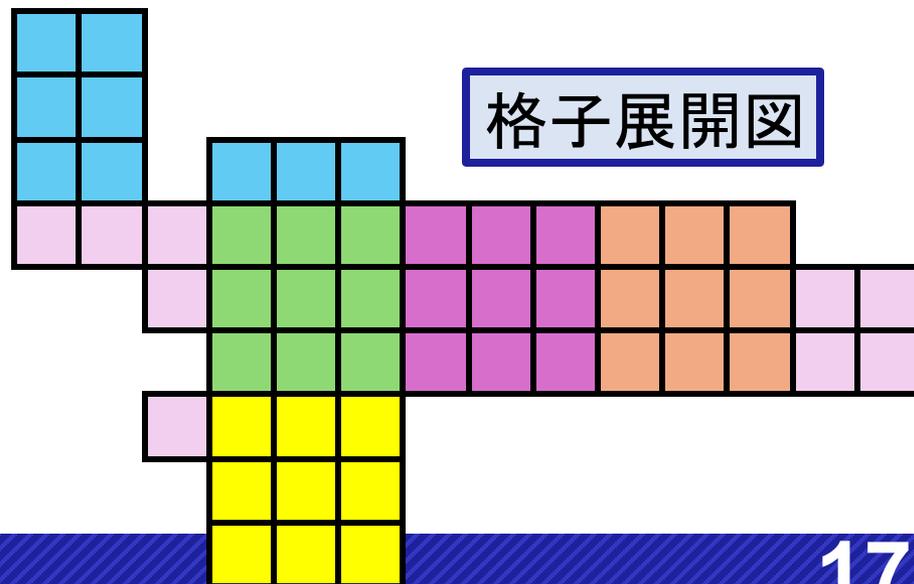
【例】立方体には、非可算無限個の一般展開図がある



- ✓ 切断線を格子状の線のみ
→ 展開図の個数は有限個



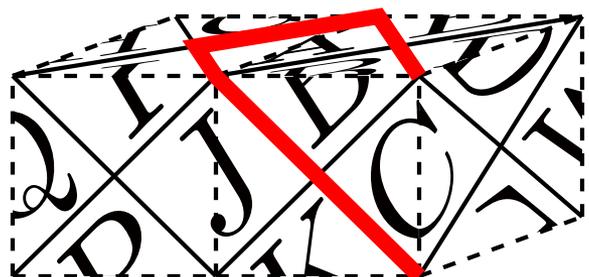
格子展開



重なりを持たない/持つ格子展開図



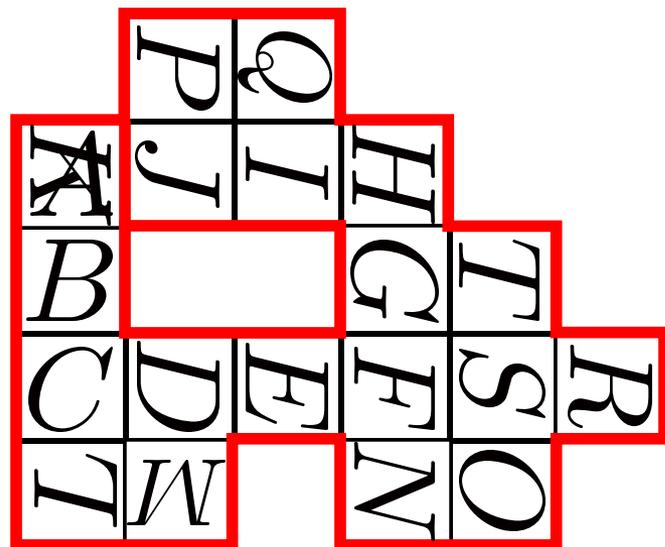
[T. Shiota et al., 2024]



格子直方体



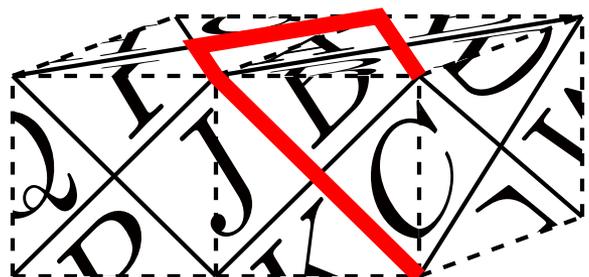
格子展開



重なりを持たない/持つ格子展開図



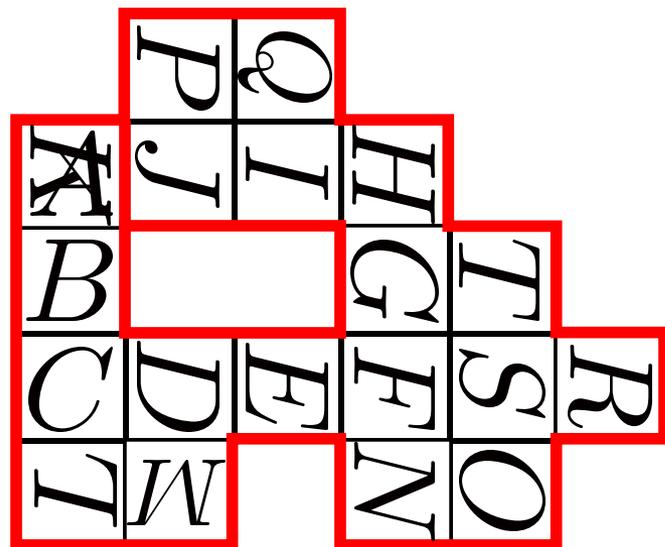
[T. Shiota et al., 2024]



格子直方体



格子展開



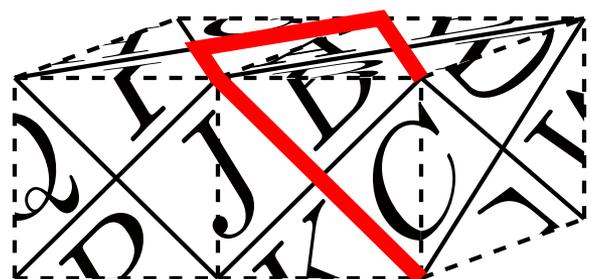
○ 重なりを持たない格子展開図: ?

○ 重なりを持つ格子展開図: ?

重なりを持たない/持つ格子展開図



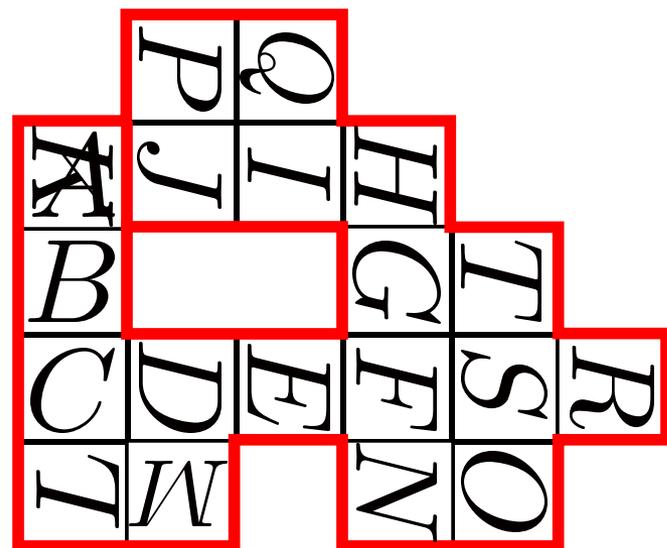
[T. Shiota et al., 2024]



格子直方体



格子展開



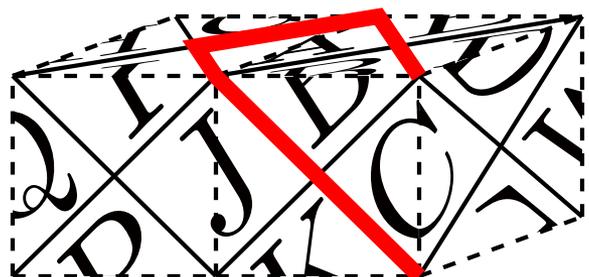
格子展開図 : 3604万5144個

- 重なりを持たない格子展開図 : ?
- 重なりを持つ格子展開図 : ?

重なりを持たない/持つ格子展開図



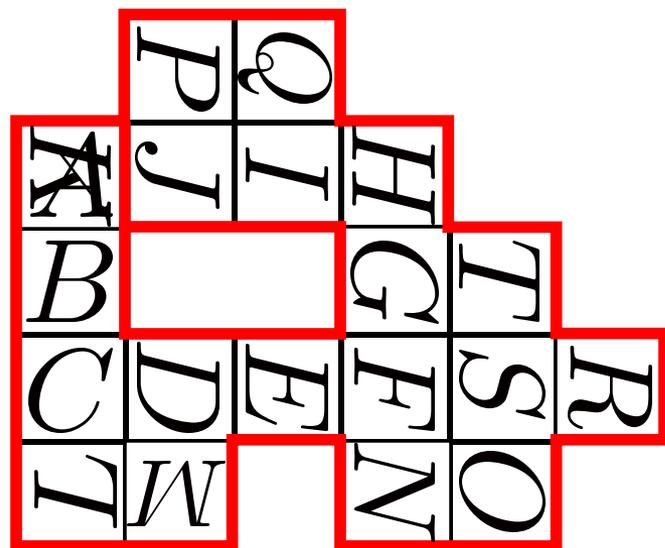
[T. Shiota et al., 2024]



格子直方体



格子展開



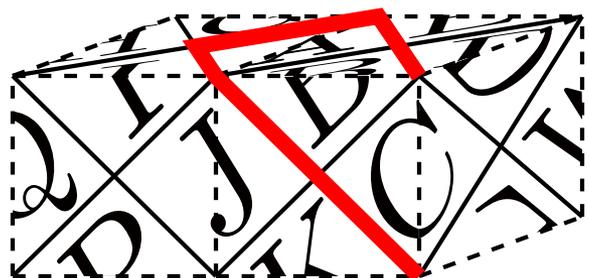
格子展開図 : 3604万5144個

- 重なりを持たない格子展開図 : 3581万0728 個
- 重なりを持つ格子展開図 : 23万4416 個

重なりを持たない/持つ格子展開図



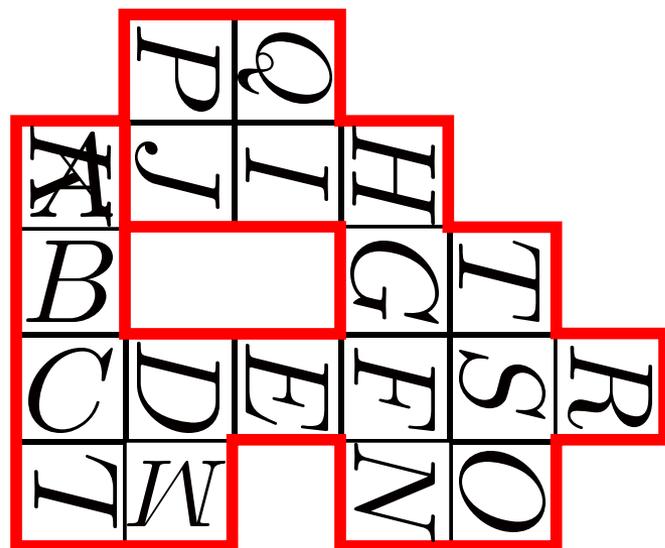
[T. Shiota et al., 2024]



格子直方体



格子展開



格子展開図: 3604万5144個

本研究の成果②

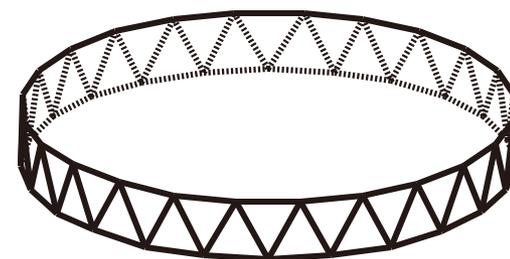
重なりを持つ格子展開図が存在するいくつかの格子直方体に対し、重なりを持つ/持たない格子展開図がいくつあるか示した。

本研究の成果



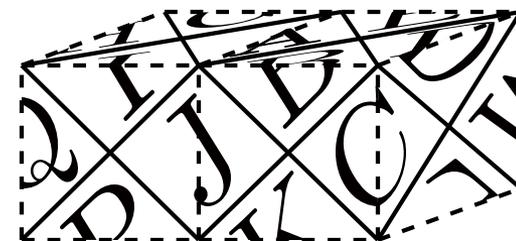
本研究の成果①

重なりを持つ辺展開図が存在するいくつかの整面凸多面体に対し、重なりを持つ/持たない辺展開図がいくつあるか示した。



本研究の成果②

重なりを持つ格子展開図が存在するいくつかの格子直方体に対し、重なりを持つ/持たない格子展開図がいくつあるか示した。

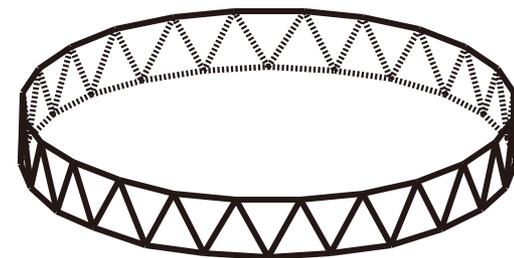


本研究の成果



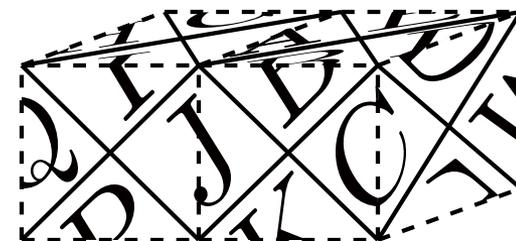
本研究の成果①

重なりを持つ辺展開図が存在するいくつかの整面凸多面体に対し、重なりを持つ/持たない辺展開図がいくつあるか示した。



本研究の成果②

重なりを持つ格子展開図が存在するいくつかの格子直方体に対し、重なりを持つ/持たない格子展開図がいくつあるか示した。



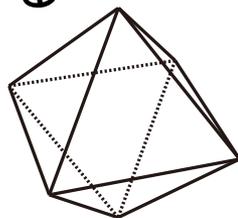
整面凸多面体



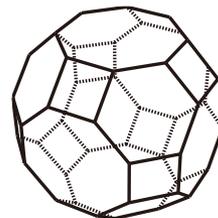
定義2

全ての面が, 正多角形で構成される(辺の長さが等しい)凸多面体を
整面凸多面体という.

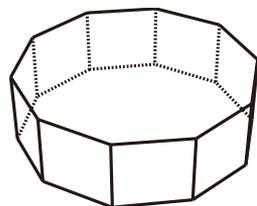
5種類に分類される



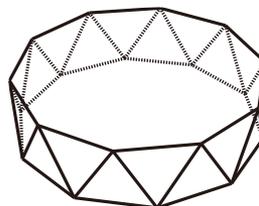
正多面体
(5種類)



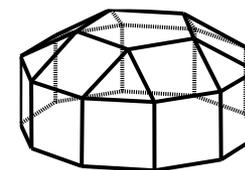
半正多面体
(13種類)



アルキメデスの n 角柱
($n \geq 3$)



アルキメデスの m 反角柱
($m \geq 3$)



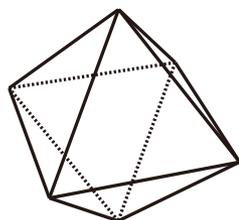
ジョンソンの立体
(92種類)

(どう辺展開しても重ならない / 特定の**方法**で辺展開すると**重なる**)

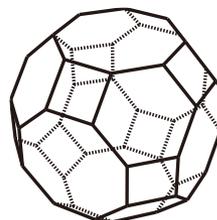
辺展開に関する数え上げの主結果



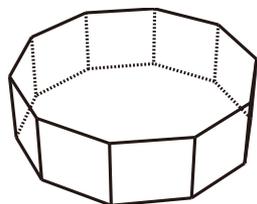
整面凸多面体では、重なりを持つ辺展開図の有無が分かってる
[T. Horiyama et al., 2011] [Hirose, 2015] [T. Shiota et al., 2024]



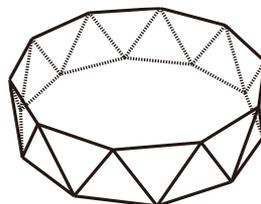
正多面体
(5種類 / 0種類)



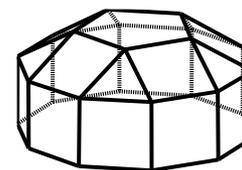
半正多面体
(7種類 / 6種類)



アルキメデスの n 角柱
($3 \leq n \leq 23$ / $n \geq 24$)



アルキメデスの m 反角柱
($3 \leq m \leq 11$ / $m \geq 12$)



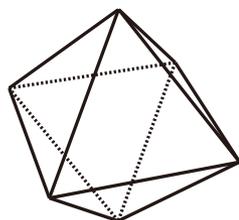
ジョンソンの立体
(48種類 / 44種類)

(どう辺展開しても重ならない / 特定の**方法**で辺展開すると**重なる**)

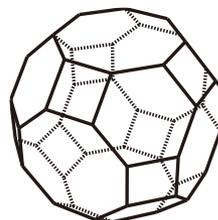
辺展開に関する数え上げの主結果



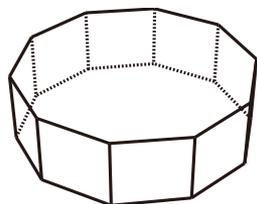
整面凸多面体では、重なりを持つ辺展開図の有無が分かってる
[T. Horiyama et al., 2011] [Hirose, 2015] [T. Shiota et al., 2024]



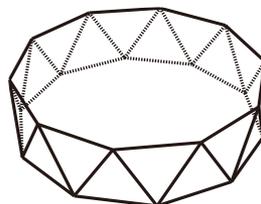
正多面体
(5種類 / 0種類)



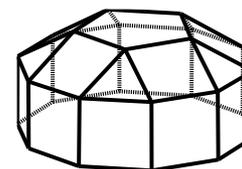
半正多面体
(7種類 / 6種類) ← 3種類



アルキメデスの n 角柱
($3 \leq n \leq 23$ / $n \geq 24$)



アルキメデスの m 反角柱
($3 \leq m \leq 11$ / $m \geq 12$)



ジョンソンの立体
(48種類 / 44種類)

24 ≤ n ≤ 99 (76種類)

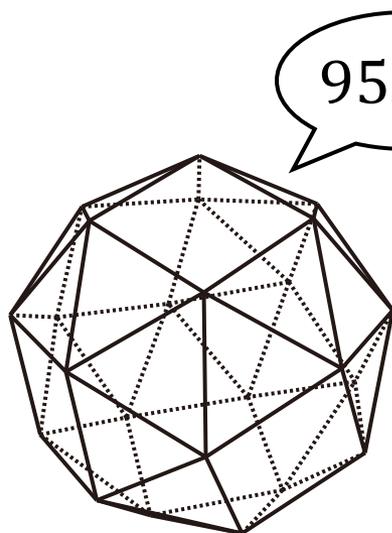
12 ≤ m ≤ 79 (68種類)

28種類

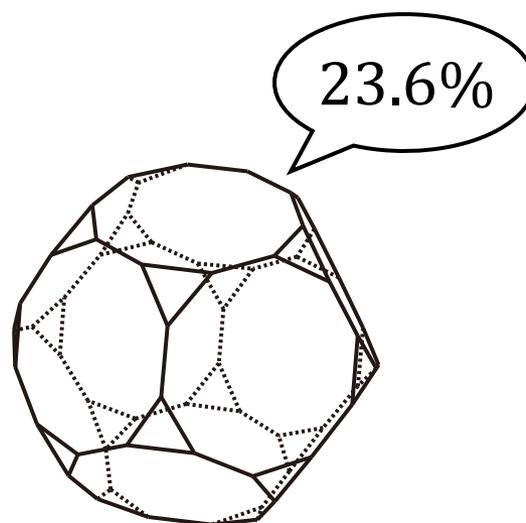
半正多面体における主結果



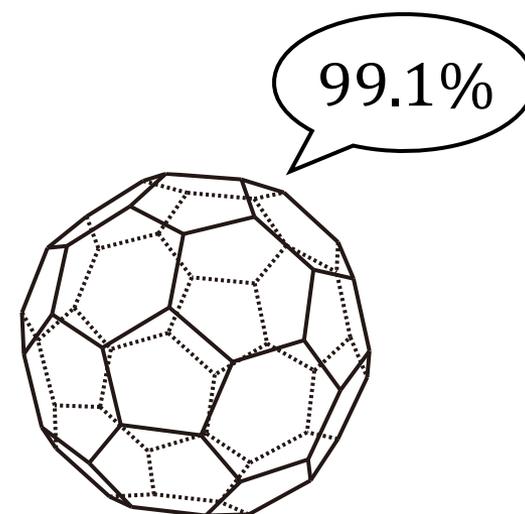
半正多面体	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
変形立方体	89,904,012,853,248	85,967,688,920,076
切頂十二面体	4,982,259,375,000,000,000	1,173,681,002,295,455,040
切頂二十面体	375,291,866,372,898,816,000	371,723,160,733,469,233,260



変形立方体



切頂十二面体

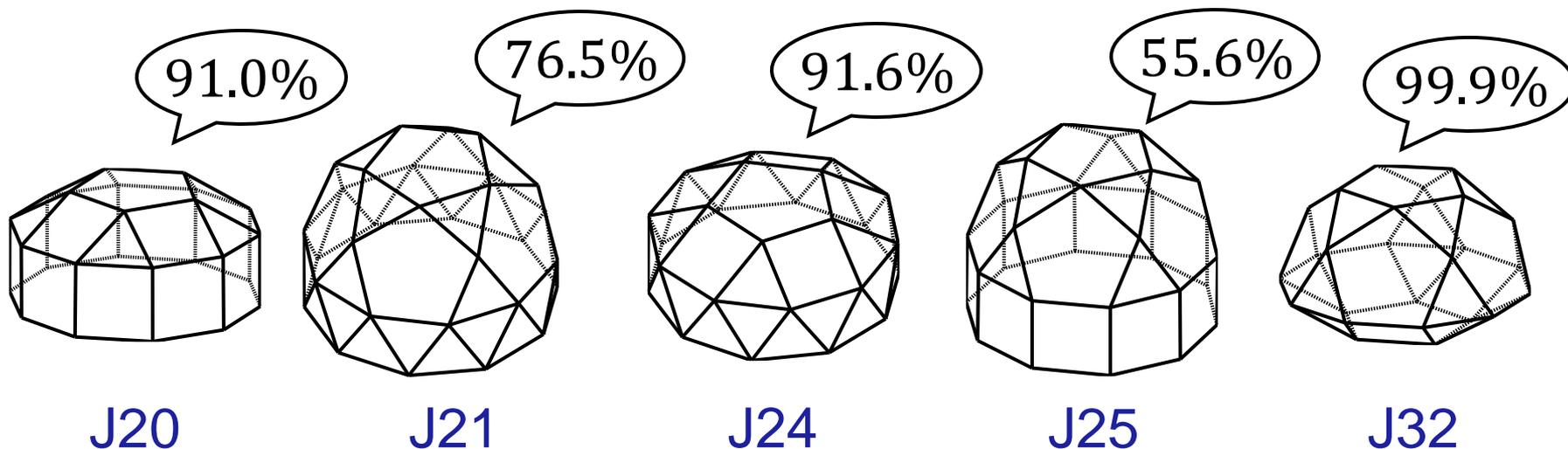


切頂二十面体

ジョンソンの立体における主結果①



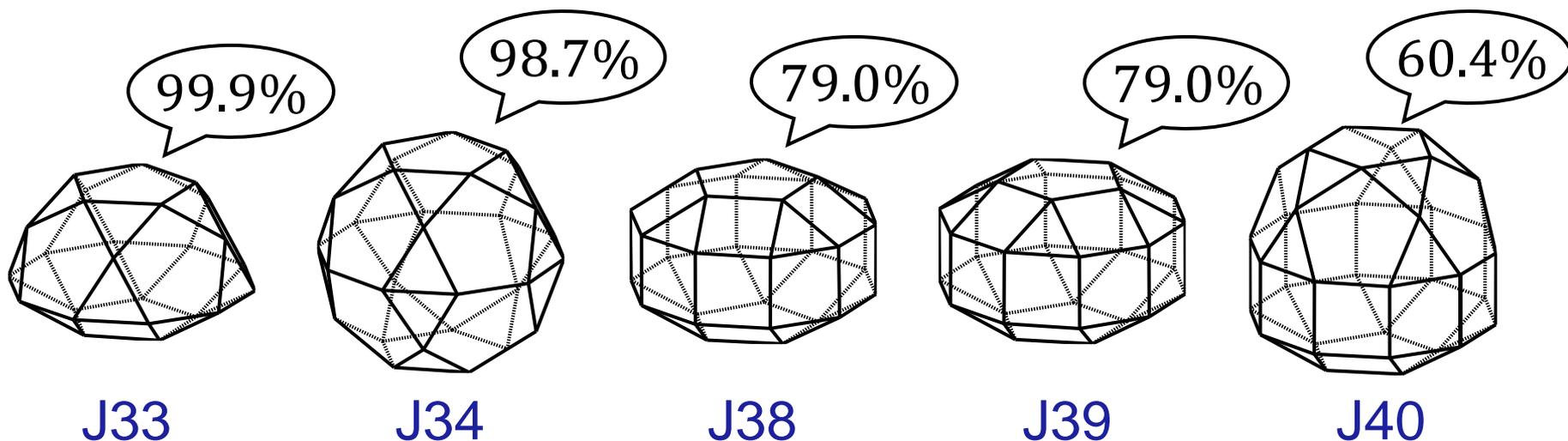
ジョンソンの立体	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
J20	29,821,320,745	27,158,087,415
J21	8,223,103,375,490	6,297,186,667,720
J24	5,996,600,870,820	5,492,624,228,190
J25	1,702,422,879,696,000	947,565,833,513,130
J32	699,537,024,120	699,433,603,320



ジョンソンの立体における主結果②



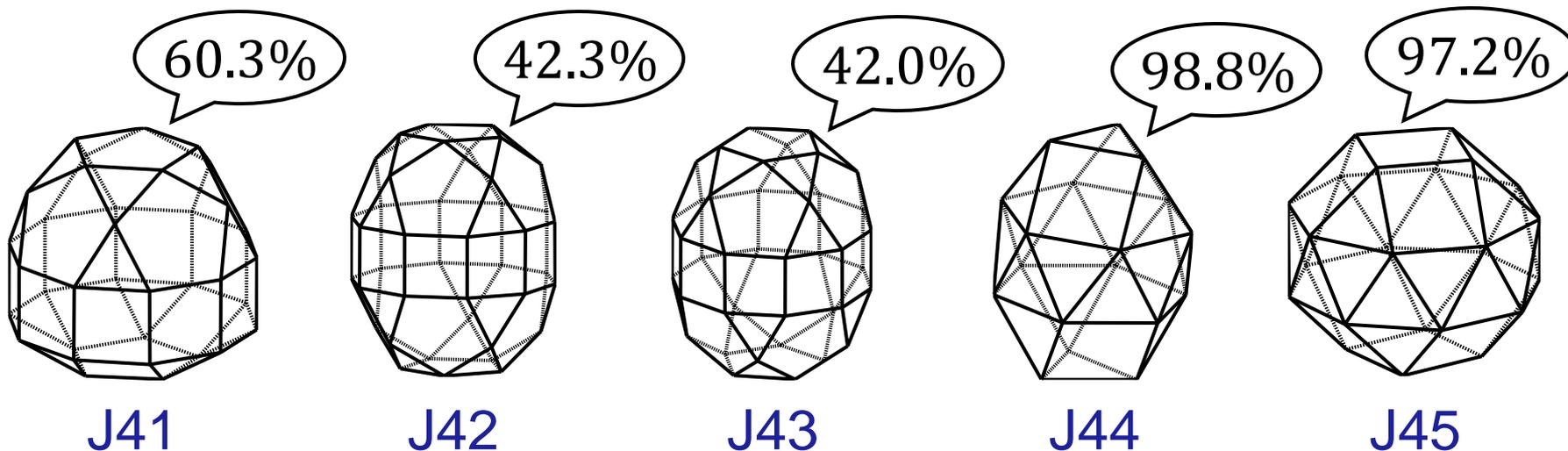
ジョンソンの立体	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
J33	745,208,449,920	745,105,029,120
J34	193,003,269,869,040	190,653,702,525,040
J38	270,745,016,304,350	214,085,775,357,270
J39	272,026,496,000,000	215,087,798,524,180
J40	75,378,202,163,880,700	45,541,858,035,543,690



ジョンソンの立体における主結果③



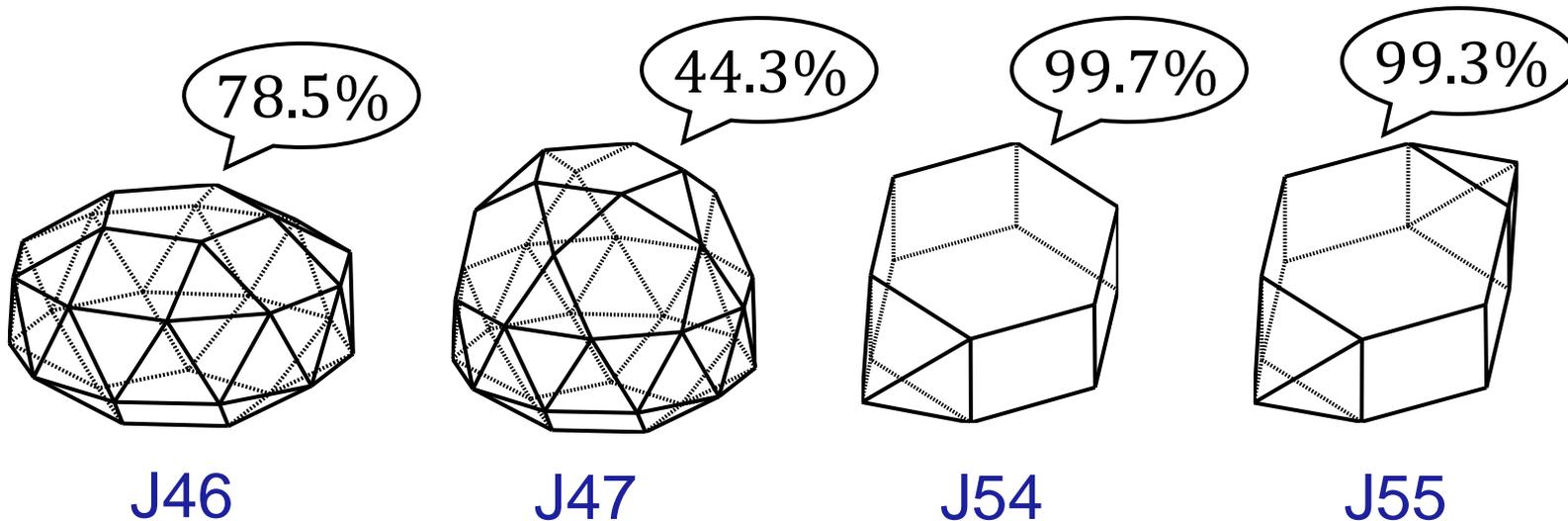
ジョンソンの立体	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
J41	75,804,411,381,317,500	45,774,968,967,924,850
J42	20,969,865,292,417,385,400	8,873,953,322,249,583,330
J43	21,115,350,368,078,435,000	8,884,490,741,507,534,860
J44	5,295,528,588	5,231,781,954
J45	13,769,880,349,680	13,386,219,088,644



ジョンソンの立体における主結果④



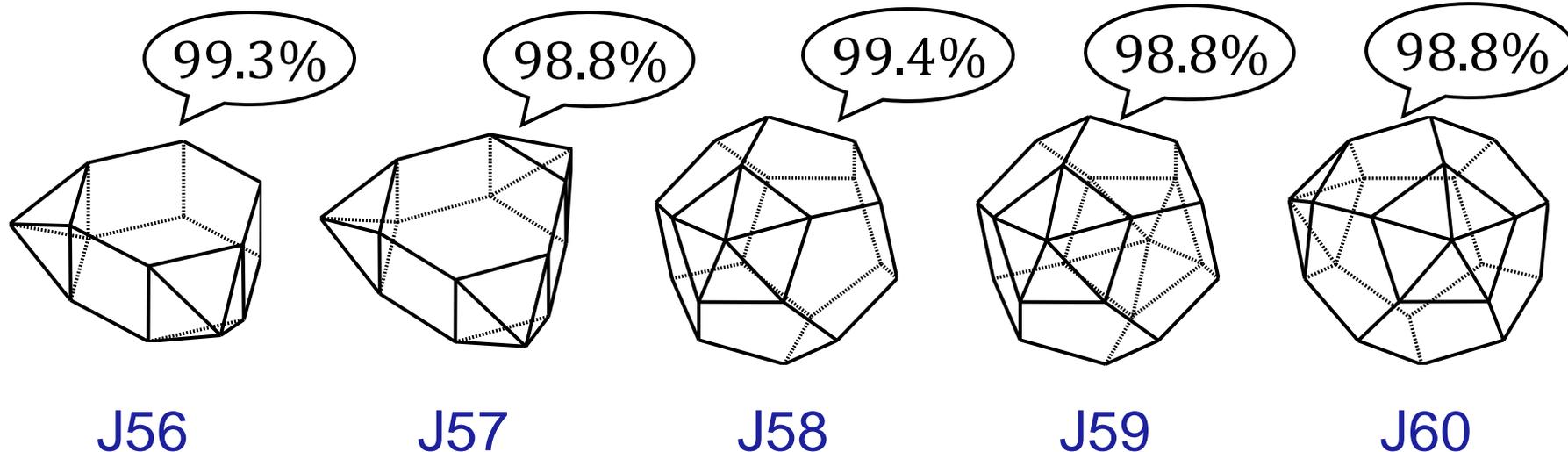
ジョンソンの立体	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
J46	32,543,644,773,848,180	25,553,553,814,333,235
J47	9,324,488,558,669,593,960	4,135,578,144,180,583,965
J54	75,973	75,749
J55	709,632	705,144



ジョンソンの立体における主結果⑤



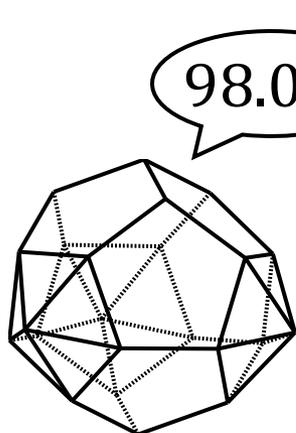
ジョンソンの立体	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
J56	707,232	702,520
J57	6,531,840	6,457,860
J58	92,724,962	92,219,782
J59	1,651,482,010	1,632,941,030
J60	1,641,317,568	1,621,738,522



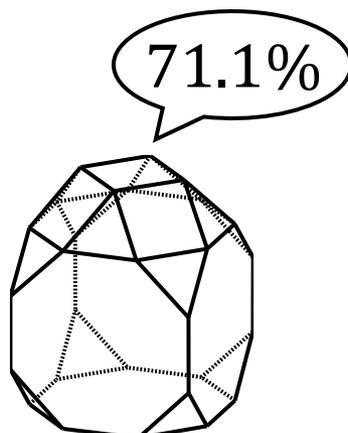
ジョンソンの立体における主結果⑥



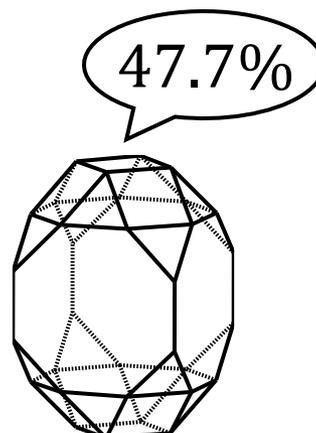
ジョンソンの立体	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
J61	28,745,798,400	28,183,512,978
J66	54,921,311,280	39,055,563,000
J67	90,974,647,120,896	43,437,626,181,464
J83	197,148,908,795,401,104	143,844,293,105,396,598



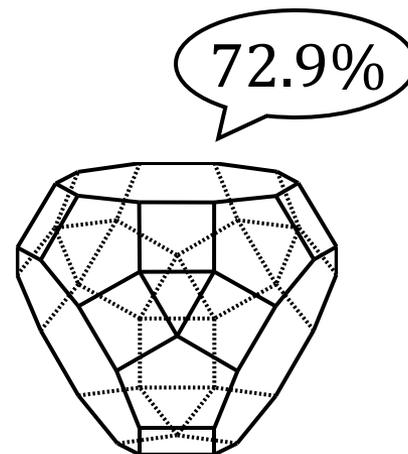
J61



J66



J67



J83

アルキメデスの角柱における主結果①



角柱	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
24 角柱	639,620,518,118,400	611,750,144,604,960
25 角柱	2,486,558,615,814,025	2,378,211,063,753,525
26 角柱	9,651,161,613,824,796	9,120,749,762,911,540
27 角柱	37,403,957,244,654,675	35,348,297,730,550,335
28 角柱	144,763,597,316,784,768	136,369,030,045,792,768
29 角柱	559,560,282,425,278,229	377,763,966,359,384,333
30 角柱	2,160,318,004,043,512,500	1,457,228,998,699,944,660
31 角柱	8,331,163,769,982,715,231	5,619,734,416,791,278,823
32 角柱	32,095,304,749,163,937,792	21,649,687,090,073,296,384
33 角柱	123,524,473,883,545,449,825	83,322,661,319,000,341,161
34 角柱	474,969,297,739,230,927,564	320,315,730,957,505,974,740
35 角柱	1,824,745,126,233,358,110,635	1,224,788,877,353,311,603,655
36 角柱	7,004,614,136,879,907,849,600	4,397,626,384,555,854,813,048
37 角柱	26,867,730,730,869,118,775,917	16,841,247,868,506,593,664,113
38 角柱	102,981,783,095,242,242,871,908	64,245,596,838,412,691,619,868
39 角柱	394,447,279,575,099,709,694,775	245,972,761,433,859,004,882,155
40 角柱	1,509,843,372,596,510,348,221,440	898,435,929,860,914,751,335,120
41 角柱	5,775,682,482,451,356,835,464,761	3,436,774,701,162,733,316,551,373
42 角柱	22,080,875,606,379,223,850,418,300	13,138,720,470,258,404,605,154,004

アルキメデスの角柱における主結果②



角柱	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
43 角柱	84,369,019,868,106,350,841,057,283	49,292,119,107,345,418,821,464,335
44 角柱	322,192,014,517,039,121,756,425,344	188,238,848,570,683,472,535,311,712
45 角柱	1,229,765,080,878,981,092,880,253,125	718,483,241,070,056,103,676,962,705
46 角柱	4,691,535,669,063,616,134,304,408,596	2,731,490,668,982,448,941,464,299,772
47 角柱	17,889,680,992,955,476,025,801,057,807	10,224,003,439,425,442,252,695,897,017
48 角柱	68,185,734,533,013,527,410,214,707,200	38,248,653,878,322,746,431,035,217,728
49 角柱	259,774,138,662,539,598,798,853,632,529	142,720,047,356,681,793,679,714,971,049
50 角柱	989,275,799,980,653,489,079,068,384,300	543,491,856,931,615,421,592,902,162,300
51 角柱	3,765,868,099,190,667,877,509,098,288,475	2,068,859,848,320,328,618,349,489,286,879
52 角柱	14,329,987,768,640,883,479,630,169,743,232	7,785,152,064,553,875,176,792,718,269,152
53 角柱	54,508,708,624,877,734,355,711,282,194,973	29,613,250,778,119,135,586,129,657,023,707
54 角柱	207,267,558,157,030,661,743,340,920,104,900	112,603,308,544,085,153,945,426,983,878,660
55 角柱	787,857,744,058,382,475,503,456,540,986,855	425,875,823,447,530,794,507,732,415,080,195
56 角柱	2,993,785,586,870,888,884,013,575,853,822,976	1,618,161,634,602,851,785,742,807,896,140,064
57 角柱	11,372,477,058,547,594,072,637,405,171,464,425	6,144,514,101,474,823,054,337,696,869,965,123
58 角柱	43,187,270,299,014,781,811,139,187,410,691,548	23,326,536,057,764,626,358,265,044,412,279,868
59 角柱	163,956,002,289,170,289,778,245,356,488,769,459	88,555,357,584,032,953,873,552,819,154,790,741
60 角柱	622,263,183,812,606,109,322,543,144,035,600,000	336,093,972,645,843,991,118,728,788,427,726,200
61 角柱	2,361,023,114,629,354,318,988,404,829,601,017,461	1,153,365,956,554,130,834,065,584,588,770,576,537

アルキメデスの角柱における主結果③



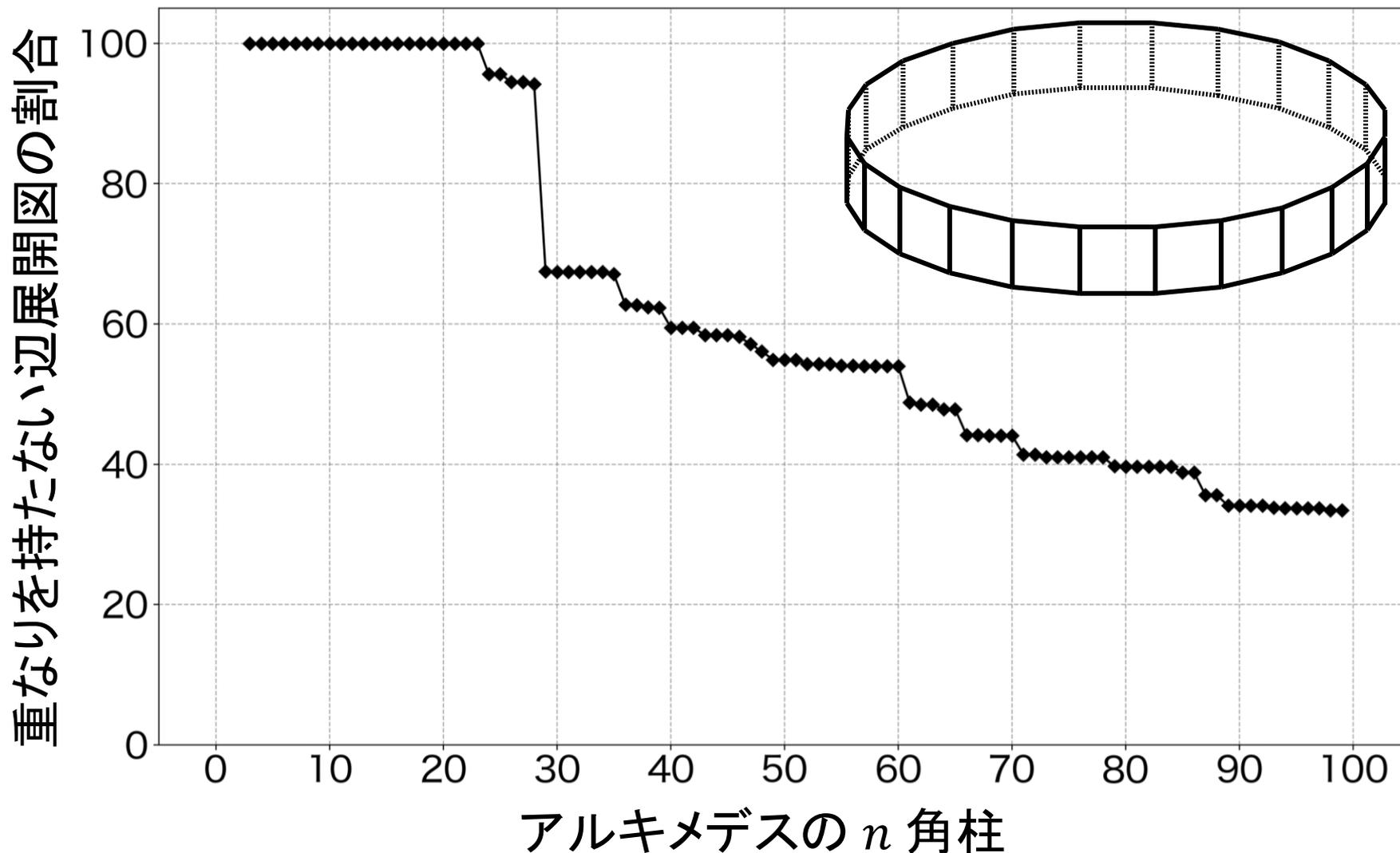
角柱	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
62 角柱	8,955,908,356,422,272,120,516,285,708,666,803,572	4,348,799,175,168,145,604,642,783,894,710,257,972
63 角柱	33,963,000,256,261,477,807,141,098,532,312,144,575	16,471,862,499,365,318,605,626,349,567,981,855,893
64 角柱	128,763,573,367,713,152,730,420,340,995,267,231,744	61,639,673,042,788,410,952,524,482,230,015,782,656
65 角柱	488,060,826,065,747,443,959,964,835,220,252,662,465	233,636,801,403,179,720,910,996,973,994,228,508,855
66 角柱	1,849,490,381,600,812,352,868,765,046,397,041,481,100	817,502,763,787,586,935,738,546,005,495,007,277,736
67 角柱	7,006,973,770,308,488,575,706,974,966,641,609,633,547	3,096,713,246,303,000,494,444,990,880,370,568,593,743
68 角柱	26,540,686,328,811,552,652,967,327,238,752,884,476,288	11,708,731,916,039,177,215,090,282,288,662,448,445,864
69 角柱	100,507,824,991,680,378,240,003,224,046,430,181,592,525	44,338,599,512,338,312,952,849,566,215,445,778,264,511
70 角柱	380,536,545,795,702,174,419,400,936,760,625,367,754,020	167,871,805,778,112,195,880,603,660,146,778,531,028,040
71 角柱	1,440,470,033,375,554,519,683,181,104,192,641,139,543,191	596,980,870,760,277,516,010,511,111,996,499,418,929,177
72 角柱	5,451,624,356,286,428,491,183,290,436,982,561,065,036,800	2,259,342,205,174,960,128,925,954,191,858,205,229,812,848
73 角柱	20,628,318,790,905,383,592,284,267,890,431,520,768,956,313	8,469,990,610,622,325,272,650,976,154,778,586,597,435,431
74 角柱	78,040,535,635,296,089,880,020,963,154,546,570,729,579,324	32,025,918,206,891,338,090,282,229,066,878,434,112,166,032
75 角柱	295,187,071,662,987,687,788,834,025,600,273,039,376,171,875	121,137,505,659,975,371,817,128,867,759,297,593,082,123,025
76 角柱	1,116,341,857,839,528,524,717,385,720,706,815,646,963,560,576	458,116,563,229,230,551,652,298,491,316,191,672,953,377,976
77 角柱	4,221,063,539,073,913,152,987,956,742,195,551,512,005,068,837	1,732,009,405,771,917,690,525,457,067,579,534,620,683,321,047
78 角柱	15,957,810,909,148,397,191,421,362,206,489,368,194,976,255,700	6,547,759,140,478,958,708,285,931,868,337,379,111,699,013,260
79 角柱	60,318,891,360,909,981,287,537,928,032,449,270,480,051,118,959	23,966,231,512,837,756,482,429,326,605,666,856,951,504,314,983
80 角柱	227,962,700,977,360,477,553,905,172,759,643,132,779,913,338,880	90,516,297,016,221,842,120,588,697,662,660,340,385,338,212,160

アルキメデスの角柱における主結果④

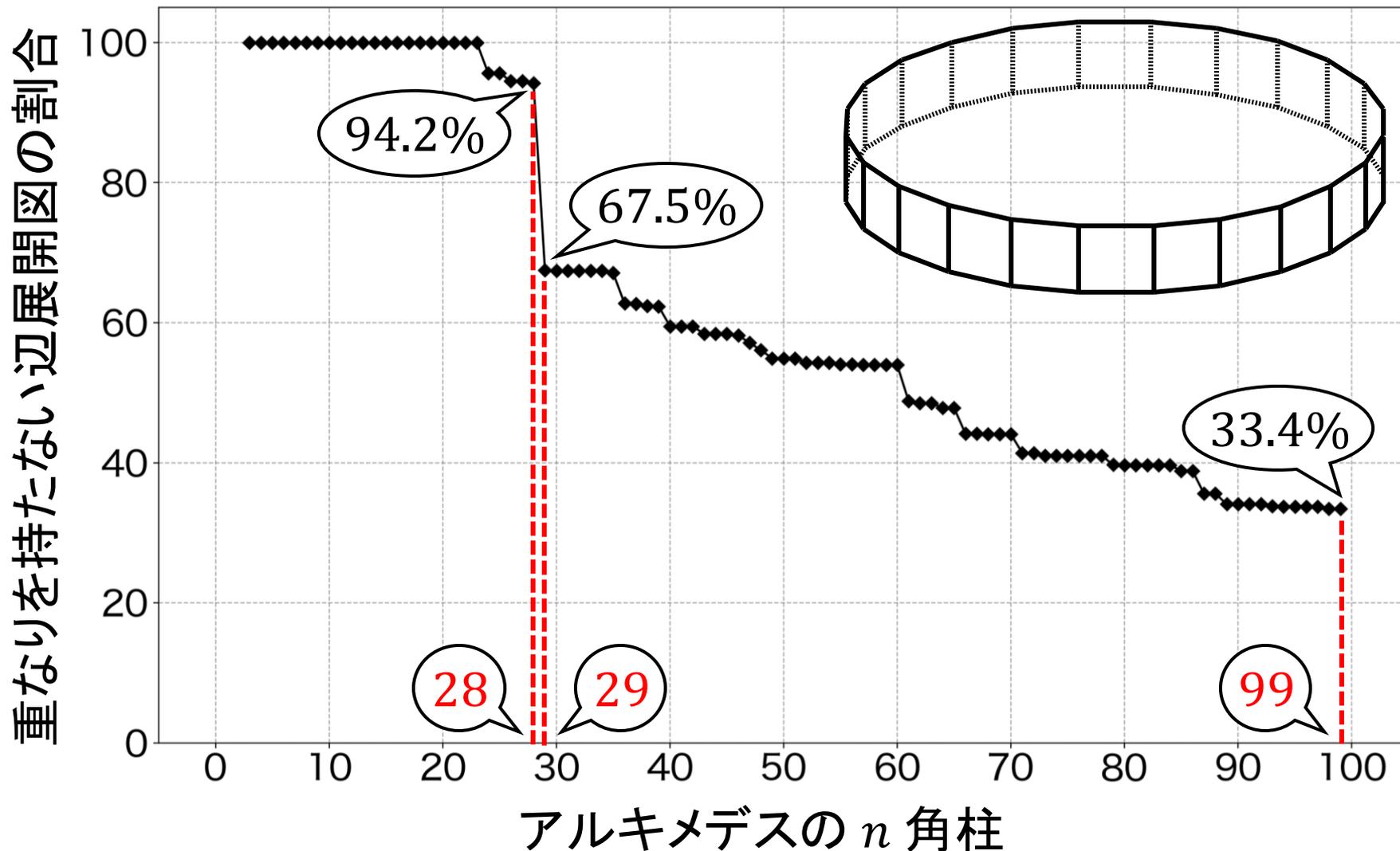


角柱	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
81 角柱	861,402,987,056,617,421,633,941,618,402,777,587,646,191,546,225	341,995,341,132,294,891,175,058,139,558,428,542,441,464,210,039
82 角柱	3,254,488,598,838,582,230,210,121,899,601,749,106,776,524,965,612	1,292,101,188,372,407,798,075,371,911,903,984,534,028,933,754,436
83 角柱	12,294,037,740,147,518,091,413,729,519,608,692,068,340,007,484,603	4,880,994,415,535,251,356,999,865,904,928,194,228,585,240,087,219
84 角柱	46,434,768,337,561,243,483,045,269,738,500,630,193,132,229,526,400	18,435,535,468,052,500,560,475,959,629,177,515,836,675,305,835,264
85 角柱	175,359,973,181,486,662,638,962,060,133,459,799,581,503,709,666,685	68,136,242,011,705,283,282,291,593,247,449,255,410,135,074,971,535
86 角柱	662,151,768,698,132,480,917,981,340,031,934,840,615,593,080,769,156	257,261,176,564,360,166,567,970,609,875,291,471,141,053,287,325,288
87 角柱	2,499,918,741,278,642,349,615,482,066,241,598,681,934,395,700,879,175	890,564,328,098,014,416,825,940,792,706,208,682,651,794,408,576,921
88 角柱	9,437,063,110,777,086,198,028,843,620,687,140,090,853,387,600,995,328	3,361,807,045,468,520,205,795,018,776,129,264,881,669,261,524,635,520
89 角柱	35,619,821,719,604,700,475,856,960,433,270,363,377,351,219,128,623,689	12,147,147,750,557,166,009,277,266,446,164,341,729,697,940,171,357,263
90 角柱	134,428,635,924,381,058,558,342,373,483,695,239,998,308,348,737,337,500	45,835,667,167,756,167,327,808,684,200,497,934,083,305,406,003,263,080
91 角柱	507,268,882,587,101,907,135,928,966,969,950,901,239,037,550,690,556,691	172,961,693,284,074,318,802,898,801,630,921,272,808,376,171,618,605,053
92 角柱	1,913,957,124,704,016,720,646,095,852,898,568,656,870,706,493,680,372,352	652,587,801,648,072,657,385,242,064,252,120,087,145,845,127,550,204,344
93 角柱	7,220,626,376,739,743,204,712,927,445,165,724,589,272,091,607,783,034,325	2,440,735,263,004,787,039,318,901,058,435,443,959,679,578,395,810,067,499
94 角柱	27,237,505,194,018,078,864,602,783,571,427,472,860,418,008,032,804,687,924	9,200,983,829,108,871,720,824,454,037,812,685,220,751,863,003,740,596,660
95 角柱	102,733,154,885,874,285,090,022,412,414,655,338,630,173,029,721,095,307,295	34,703,835,672,760,725,659,254,115,573,775,525,383,657,603,505,506,462,795
96 角柱	387,441,199,483,882,790,074,386,518,739,975,425,611,166,119,546,861,977,600	130,879,809,160,332,709,730,909,060,139,747,285,756,827,067,222,934,653,120
97 角柱	1,461,012,223,100,730,076,686,798,067,582,261,367,840,286,394,049,834,758,177	493,533,958,003,824,346,986,768,858,213,124,355,417,772,366,581,533,141,923
98 角柱	5,508,783,927,988,926,594,011,003,719,084,348,517,902,267,230,291,120,238,668	1,842,484,668,472,842,688,235,271,932,872,735,062,103,648,776,666,005,382,528
99 角柱	20,768,847,849,083,459,407,230,734,273,699,231,588,352,138,676,085,736,775,275	6,946,403,315,106,848,273,582,090,103,916,680,058,367,861,,235,272,392,879,353

アルキメデスの角柱における主結果



アルキメデスの角柱における主結果



アルキメデスの反角柱における主結果①



反角柱	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
12 反角柱	51,599,794,176	49,743,531,024
13 反角柱	383,142,771,674	369,359,503,344
14 反角柱	2,828,107,288,188	2,726,368,290,352
15 反角柱	20,768,716,848,000	20,021,578,135,380
16 反角柱	151,840,963,183,392	146,378,600,602,880
17 反角柱	1,105,779,284,582,146	989,008,190,008,480
18 反角柱	8,024,954,790,380,544	1,517,682,139,108,200
19 反角柱	58,059,628,319,357,318	10,550,126,657,845,736
20 反角柱	418,891,171,182,561,000	72,542,787,706,846,320
21 反角柱	3,014,678,940,049,375,872	500,034,989,831,068,818
22 反角柱	21,646,865,272,061,272,716	3,449,844,625,120,946,448
23 反角柱	155,113,904,634,576,144,814	23,752,014,262,731,255,118
24 反角柱	1,109,391,149,998,449,819,648	162,941,846,136,285,049,392
25 反角柱	7,920,708,398,483,722,531,250	1,117,782,108,867,439,830,950
26 反角柱	56,460,916,728,463,179,389,652	7,655,723,643,342,875,568,936
27 反角柱	401,873,068,071,158,383,691,136	40,561,091,359,603,932,081,708
28 反角柱	2,856,496,726,273,368,888,420,984	264,478,642,931,290,919,674,648

アルキメデスの反角柱における主結果②



反角柱	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
29 反角柱	20,277,959,821,998,087,658,569,178	1,739,241,575,214,473,110,359,470
30 反角柱	143,779,866,504,299,168,102,784,000	11,718,403,001,480,040,992,138,460
31 反角柱	1,018,331,261,238,041,888,906,149,982	79,227,778,390,260,949,681,648,022
32 反角柱	7,204,899,406,395,028,729,775,662,656	535,088,808,567,353,165,252,109,504
33 反角柱	50,926,337,537,628,456,148,426,034,304	3,609,765,503,967,786,066,361,340,190
34 反角柱	359,631,713,591,480,208,135,988,999,908	23,021,698,690,971,475,731,990,378,832
35 反角柱	2,537,451,036,289,964,010,662,071,375,750	155,062,662,340,102,785,066,461,404,560
36 反角柱	17,888,860,941,014,408,891,681,749,082,112	1,043,552,488,055,809,272,918,087,425,832
37 反角柱	126,017,967,976,156,654,397,534,266,950,026	6,992,936,456,851,489,392,078,163,320,978
38 反角柱	887,084,326,468,926,324,030,843,544,372,524	44,438,923,337,128,563,356,651,187,920,012
39 反角柱	6,240,170,805,918,890,922,630,444,422,537,088	297,478,382,005,821,691,364,579,412,449,706
40 反角柱	43,867,453,323,674,409,143,926,999,140,738,000	1,983,085,398,586,205,226,911,001,715,311,520
41 反角柱	308,188,798,032,167,102,842,859,597,775,205,042	13,033,685,199,501,916,122,251,960,215,169,912
42 反角柱	2,163,878,359,899,340,120,052,552,791,046,378,496	83,997,191,224,353,764,482,646,914,913,598,624
43 反角柱	15,184,572,514,675,762,272,842,247,131,661,635,894	557,611,275,066,805,327,907,702,044,873,987,094
44 反角柱	106,496,994,569,720,990,727,767,374,869,609,730,968	3,729,635,546,799,294,784,771,659,621,890,472,664
45 反角柱	746,530,833,968,188,588,851,681,523,936,666,896,000	24,431,729,185,673,950,396,752,450,635,669,388,990

アルキメデスの反角柱における主結果③



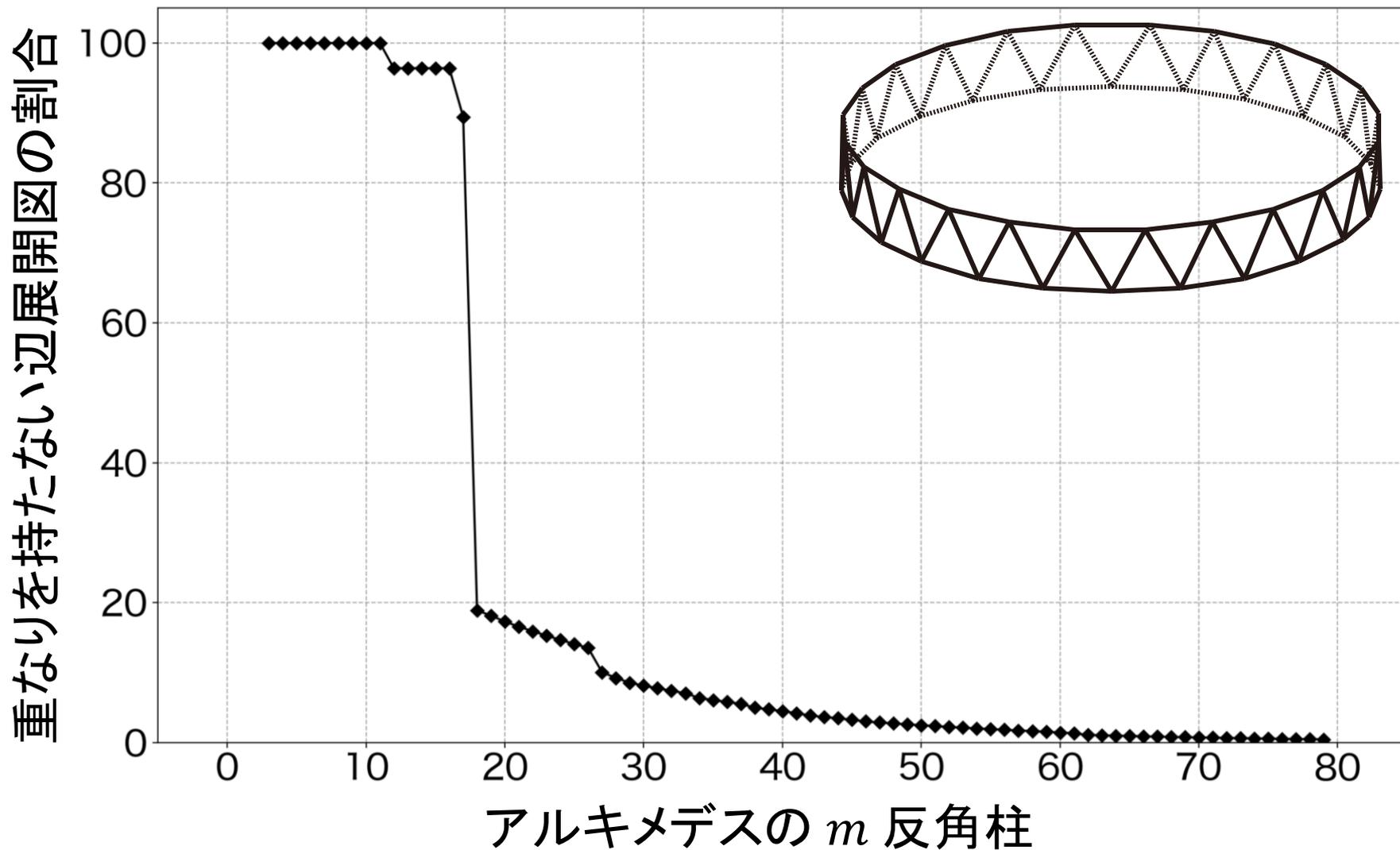
反角柱	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
46 反角柱	5,230,505,089,344,431,048,507,144,123,815,456,787,772	158,880,058,222,038,902,280,026,924,999,326,487,380
47 反角柱	36,629,772,069,905,834,755,580,161,013,689,257,929,566	1,060,539,783,181,405,072,337,781,040,938,759,619,342
48 反角柱	256,405,984,103,100,622,357,453,677,837,305,041,649,664	7,079,805,121,439,383,694,342,635,647,608,115,253,632
49 反角柱	1,794,045,942,295,064,986,560,011,614,233,598,156,819,298	47,081,894,856,079,882,568,065,465,270,204,379,835,426
50 反角柱	12,547,524,306,762,115,327,139,640,139,635,651,225,562,500	313,979,052,982,335,359,074,797,901,078,961,675,923,700
51 反角柱	87,722,051,242,994,803,143,643,140,957,694,192,485,255,552	2,093,220,753,862,771,345,181,080,442,901,094,417,625,334
52 反角柱	613,045,214,965,087,171,516,365,035,207,733,551,443,709,736	13,847,372,368,702,386,134,230,159,841,426,631,160,249,520
53 反角柱	4,282,679,690,470,859,990,496,705,254,406,531,422,464,957,834	92,254,873,128,059,280,848,212,456,691,530,042,110,511,660
54 反角柱	29,907,770,896,467,759,248,303,121,099,365,111,834,448,227,328	612,564,147,448,713,555,111,946,603,958,121,691,610,818,284
55 反角柱	208,787,039,294,802,995,558,997,194,768,329,038,664,289,012,750	4,066,189,399,259,848,921,000,213,749,369,244,891,377,708,200
56 反角柱	1,457,066,704,859,013,168,857,939,059,215,469,544,106,252,283,632	26,882,734,603,660,531,639,929,002,113,295,431,420,663,838,960
57 反角柱	10,165,220,976,851,309,359,988,036,885,968,497,679,868,602,544,256	177,996,738,793,784,313,663,675,391,748,841,946,567,960,370,322
58 反角柱	70,895,802,507,339,433,606,655,281,989,227,262,198,207,167,104,404	1,180,051,219,817,443,505,617,832,090,129,322,320,242,838,961,804
59 反角柱	494,305,112,112,066,674,502,236,216,299,036,533,680,424,852,661,558	7,834,254,664,590,050,866,382,827,703,061,557,850,624,078,276,054
60 反角柱	3,445,441,668,665,681,646,962,862,224,080,264,597,391,436,598,272,000	50,403,377,478,963,170,902,563,467,427,787,499,348,682,069,083,400
61 反角柱	24,008,998,657,730,043,418,999,210,016,836,054,318,873,476,626,984,762	326,358,125,570,791,131,913,614,291,766,990,868,139,803,779,993,658
62 反角柱	167,257,831,873,332,437,880,307,618,553,808,550,206,593,147,036,070,876	1,854,939,808,105,063,172,332,156,437,560,469,843,454,970,270,135,872

アルキメデスの反角柱における主結果④

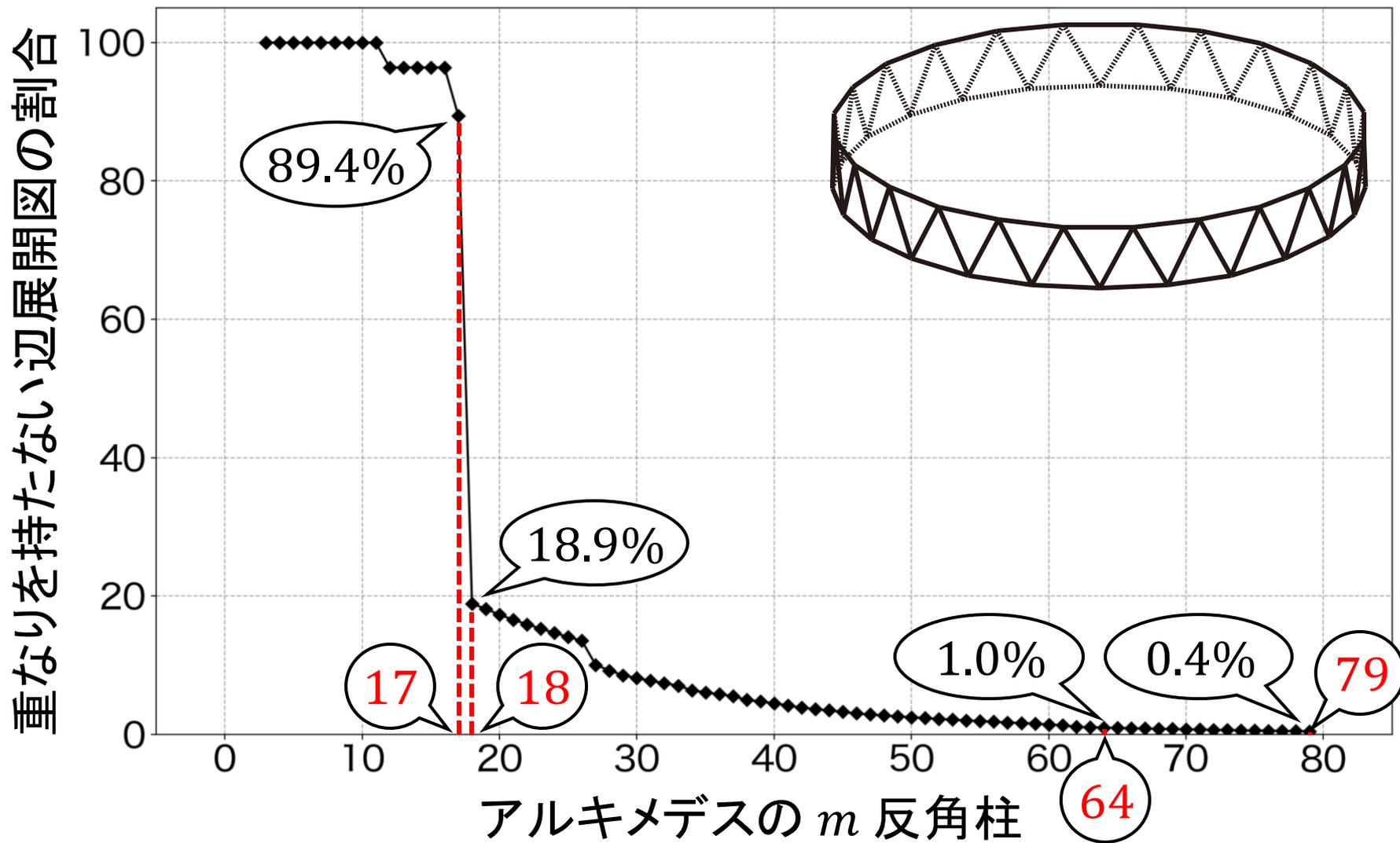


反角柱	辺展開図の個数 [T. Horiyama et al., 2013]	重なりを持たない 辺展開図の個数
63 反角柱	1,164,892,592,931,629,392,338,324,783,815,505,600,459,556,438,051,914,624	12,307,784,791,893,071,962,543,568,932,644,431,739,514,519,035,956,010
64 反角柱	8,111,027,415,042,412,087,059,884,505,184,466,841,764,376,870,066,703,488	81,711,622,221,644,705,528,593,850,868,389,602,010,305,415,118,773,632
65 反角柱	56,462,462,218,649,594,296,489,126,547,728,233,809,837,328,422,164,209,250	542,324,566,561,175,718,389,472,139,379,279,869,381,405,090,020,827,940
66 反角柱	392,953,311,363,100,782,765,649,901,258,650,734,263,966,574,522,587,784,192	3,596,222,163,944,667,874,762,237,572,824,582,243,007,524,492,920,016,364
67 反角柱	2,734,150,277,149,943,789,424,653,221,975,737,385,578,070,013,528,736,239,846	23,843,879,380,617,148,795,466,186,545,241,390,034,312,194,471,190,721,410
68 反角柱	19,019,848,444,227,125,038,960,788,030,632,146,757,126,643,109,790,562,588,744	158,047,277,673,032,158,023,557,741,664,008,526,923,236,605,161,466,417,144
69 反角柱	132,281,097,981,397,378,649,216,327,599,160,829,981,177,127,561,996,392,778,368	1,047,172,473,392,558,836,251,756,065,865,616,682,360,236,358,525,772,236,994
70 反角柱	919,808,251,652,716,036,371,207,892,032,413,807,786,850,000,883,510,526,443,500	6,940,458,038,739,497,932,445,601,709,547,911,589,835,564,772,106,776,166,220
71 反角柱	6,394,523,254,028,788,004,842,904,160,103,465,297,190,061,440,230,870,478,513,422	45,780,684,032,708,802,155,441,190,837,474,021,683,024,682,589,684,818,605,684
72 反角柱	44,446,020,245,409,850,388,919,123,546,153,029,436,510,863,260,931,308,786,876,416	303,133,167,415,275,991,480,997,730,729,891,095,322,066,594,918,858,437,619,312
73 反角柱	308,868,631,905,426,344,328,427,311,641,720,314,433,493,675,086,071,079,589,514,514	1,993,862,494,867,116,801,892,228,563,979,771,114,995,027,333,450,860,247,871,268
74 反角柱	2,146,017,331,464,816,766,794,536,512,479,696,001,159,731,435,059,847,042,295,248,948	13,209,556,361,833,768,036,797,427,669,629,105,268,373,114,777,374,196,971,004,696
75 反角柱	14,907,792,173,512,400,291,813,743,106,474,046,926,942,024,685,661,040,985,606,000,000	87,479,366,310,664,176,876,248,551,641,616,300,775,155,031,501,800,307,738,254,650
76 反角柱	103,541,921,350,898,507,949,080,104,593,610,092,290,674,442,999,146,438,446,892,628,952	575,728,071,259,409,983,216,254,627,908,333,000,969,928,942,023,795,016,355,188,312
77 反角柱	719,024,872,072,048,704,795,415,649,743,438,922,497,201,689,435,088,835,503,134,774,586	3,803,094,888,814,534,194,244,711,198,507,594,930,371,276,487,989,070,769,505,333,618
78 反角柱	4,992,273,293,210,566,749,051,331,629,112,187,169,112,455,673,298,970,063,008,551,517,184	25,178,232,163,989,764,173,902,561,452,762,553,210,080,327,618,722,145,846,907,592,560
79 反角柱	34,656,236,736,012,517,253,147,752,391,859,302,565,359,593,442,298,439,368,730,738,540,478	166,652,766,549,703,045,550,278,222,766,074,887,734,370,837,666,827,789,428,184,155,666

アルキメデスの反角柱における主結果



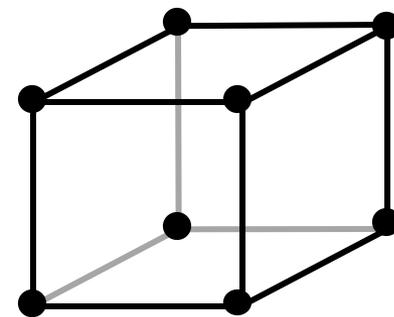
アルキメデスの反角柱における主結果



辺展開図の数え上げ(重なり有りも含む)



V を頂点の集合, E を辺の集合とすると,
 Q はグラフ $G_Q = (V, E)$ として見ることができる.



多面体 Q

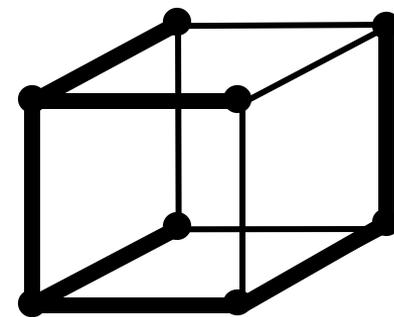
辺展開図の数え上げ(重なり有りも含む)



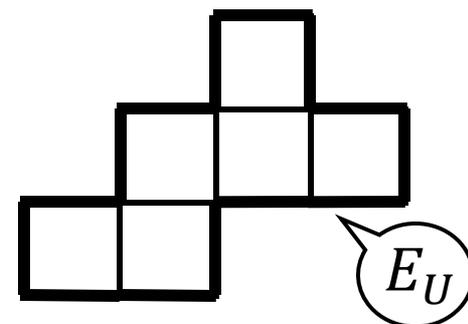
V を頂点の集合, E を辺の集合とするとき,
 Q はグラフ $G_Q = (V, E)$ として見ることができる.

補題3 [E. D. Demaine et. al., 2007]

$E_C (\subset E)$ を Q を辺展開するとき切る切断線の集合とする. このとき, 辺の集合 E_C はグラフ G_Q の全域木に対応する.



多面体 Q

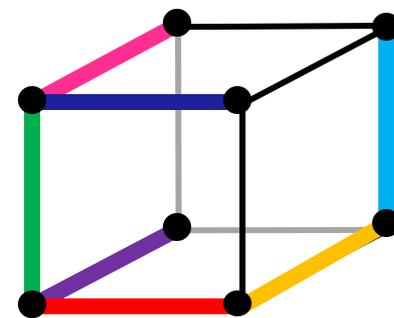


辺展開図 U

辺展開図の数え上げ(重なり有りも含む)



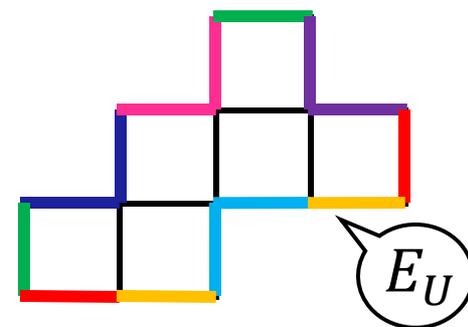
V を頂点の集合, E を辺の集合とするとき,
 Q はグラフ $G_Q = (V, E)$ として見ることができる.



多面体 Q

補題3 [E. D. Demaine et. al., 2007]

$E_C (\subset E)$ を Q を辺展開するとき切る切断線の集合とする. このとき, 辺の集合 E_C はグラフ G_Q の全域木に対応する.

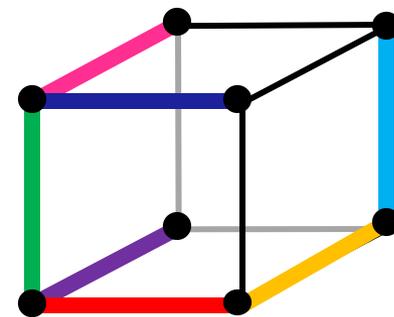


辺展開図 U

辺展開図の数え上げ(重なり有りも含む)



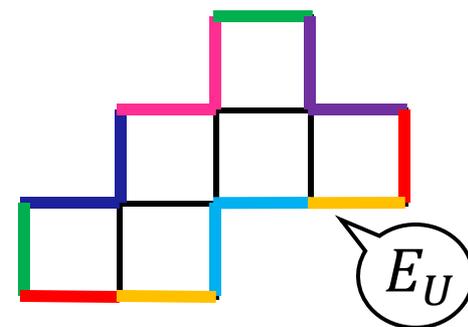
V を頂点の集合, E を辺の集合とするとき,
 Q はグラフ $G_Q = (V, E)$ として見ることができる.



多面体 Q

補題3 [E. D. Demaine et. al., 2007]

$E_C (\subset E)$ を Q を辺展開するとき切る切断線の集合とする. このとき, 辺の集合 E_C はグラフ G_Q の全域木に対応する.



辺展開図 U

要するに...

Q の辺展開図の個数 = G_Q の全域木の個数

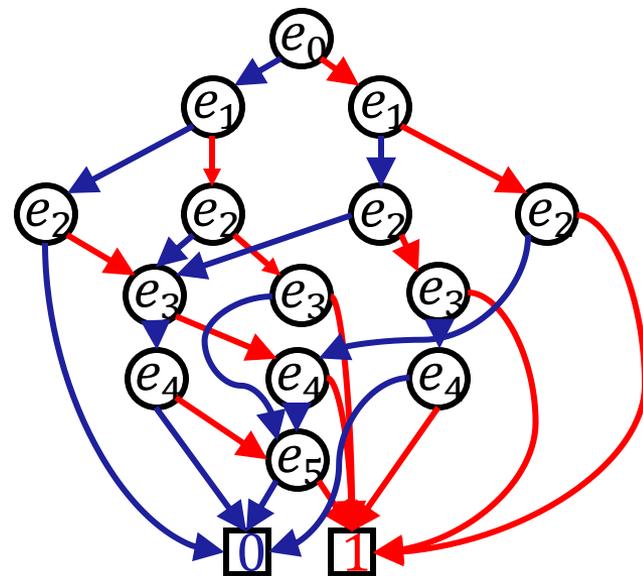
辺展開図の数え上げ(重なり有りも含む)



G_Q の全域木の個数は ZDD を用いて数え上げることができる

ZDD [S. Minato, 1993]

非巡回有向グラフを用いて, 集合族をコンパクトに表すことができるデータ構造



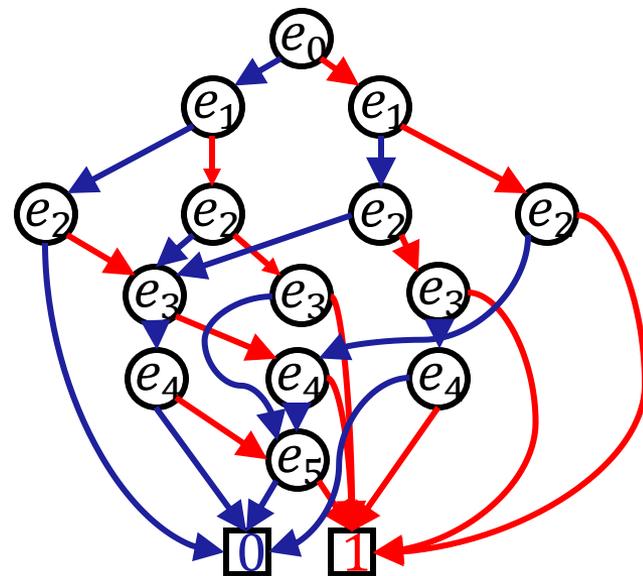
辺展開図の数え上げ(重なり有りも含む)



G_Q の全域木の個数は **ZDD** を用いて数え上げることができる

ZDD [S. Minato, 1993]

非巡回有向グラフを用いて, 集合族をコンパクトに表すことができるデータ構造



ZDD にはいくつかの演算体系が用意されている

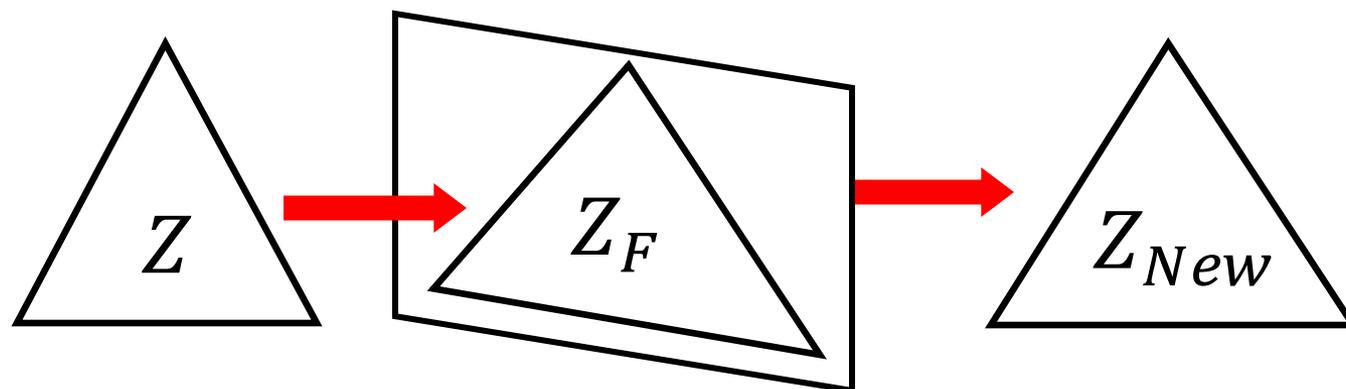
$$\triangle_{Z_A} \diamond \triangle_{Z_B} = \triangle_{Z_{New}} \quad \diamond = \{ \cup, \cap, \setminus, \dots \}$$

ZDD における演算



サブセッティング法 [H. Iwashita et al., 2013]

ZDD Z から制約 C を満たす集合族を抽出することで, 新しい ZDD Z_{New} を生成する演算.



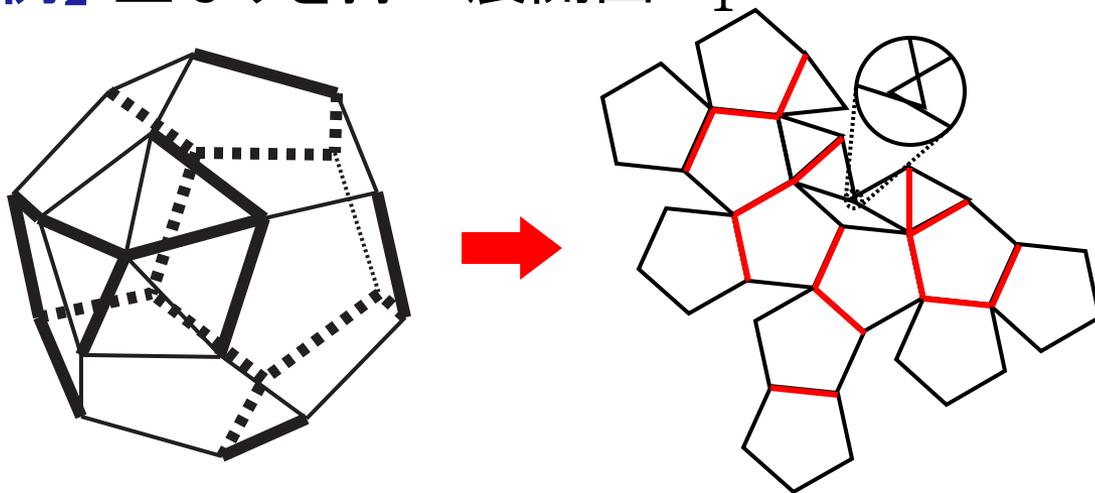
本研究では…

サブセッティング法を使い, 重なりを持つ展開図を除去することで, 重なりを持たない展開図の数え上げに成功した.

重なりを持たない展開図の数え上げ



【例】重なりを持つ展開図 U_1



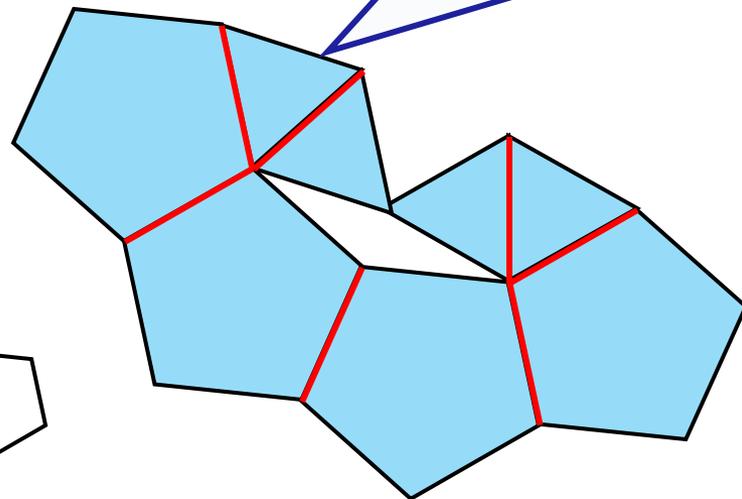
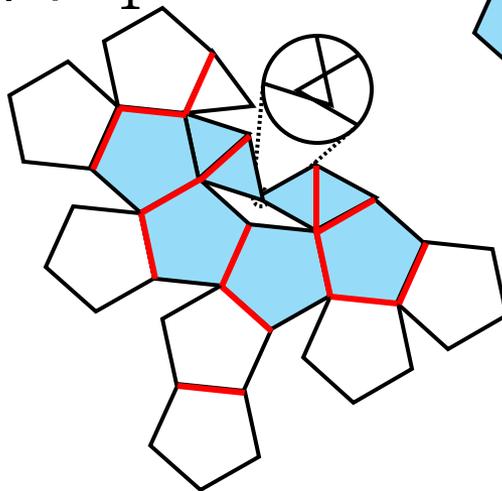
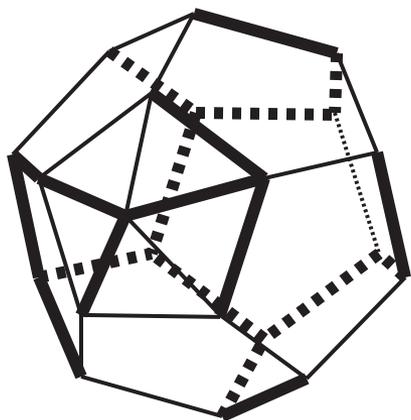
$NC[U]$: 展開図 U において切断されない辺の集合

$$NC[U_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, \dots, e_{21}\}$$

重なりを持つ

極小な重なりを持つ部分展開図 M_1
(Minimal overlapping partial unfolding: **MOPU**)

【例】重なりを持つ展開図 U_1



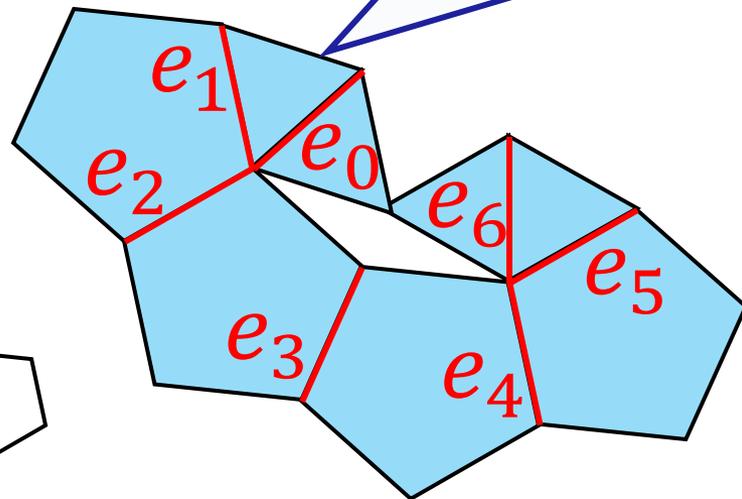
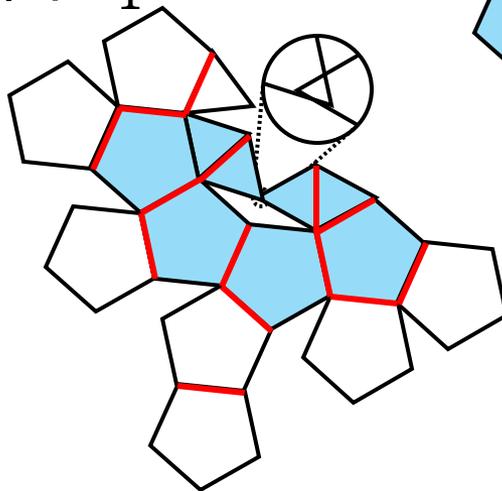
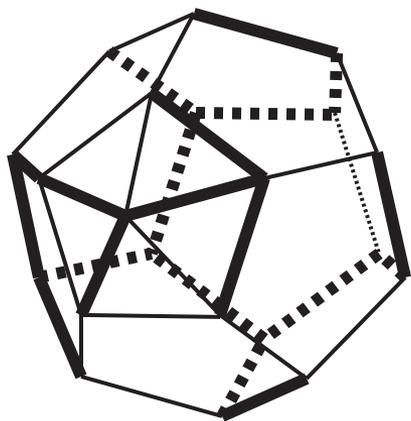
$NC[U]$: 展開図 U において切断されない辺の集合

$$NC[U_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, \dots, e_{21}\}$$

重なりを持つ

極小な重なりを持つ部分展開図 M_1
(Minimal overlapping partial unfolding: **MOPU**)

【例】重なりを持つ展開図 U_1



$NC[U]$: 展開図 U において切断されない辺の集合

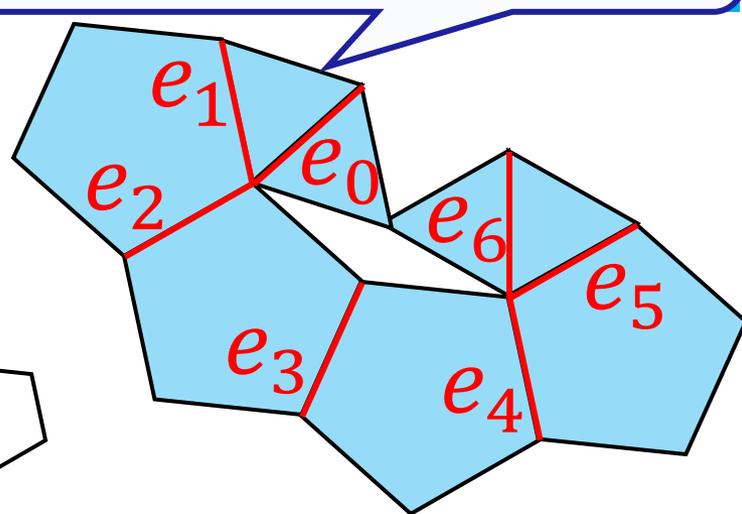
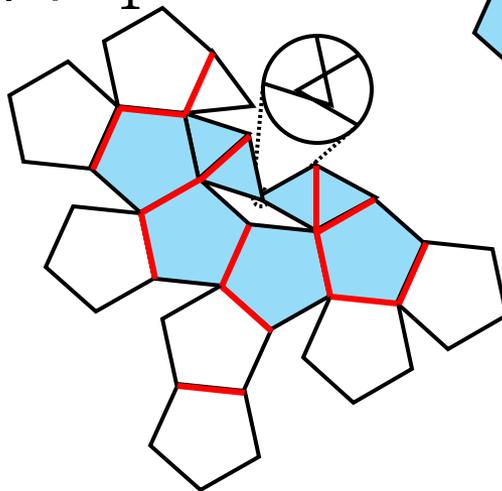
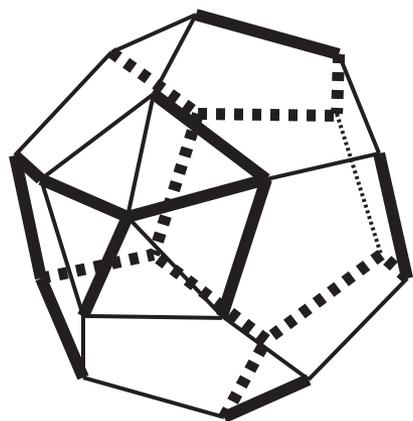
$$NC[U_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, \dots, e_{21}\}$$

$$NC[M_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

重なりを持つ

極小な重なりを持つ部分展開図 M_1
(Minimal overlapping partial unfolding: **MOPU**)

【例】重なりを持つ展開図 U_1



$NC[U]$: 展開図 U において切断されない辺の集合

$$NC[U_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, \dots, e_{21}\}$$

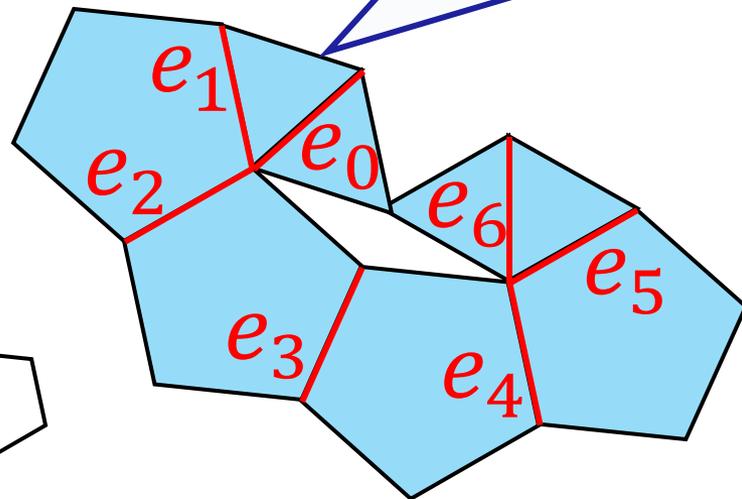
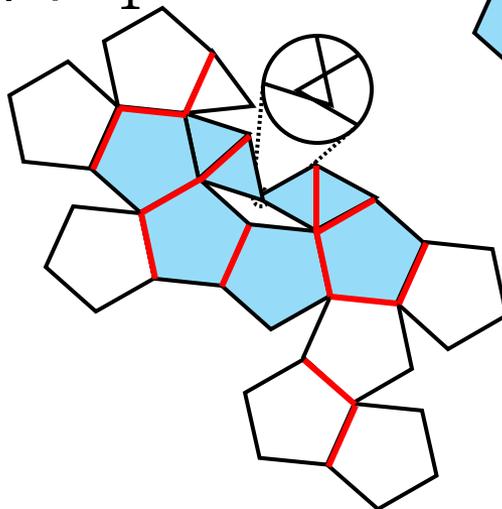
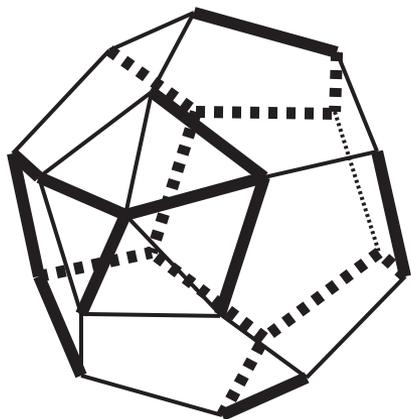
$$NC[M_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

ポイント $NC[M_1] \subseteq NC[U_1]$ であるとき, 展開図は必ず重なる

重なりを持つ

極小な重なりを持つ部分展開図 M_1
(Minimal overlapping partial unfolding: **MOPU**)

【例】重なりを持つ展開図 U_1



$NC[U]$: 展開図 U において切断されない辺の集合

$$NC[U_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, a, \dots, x\}$$

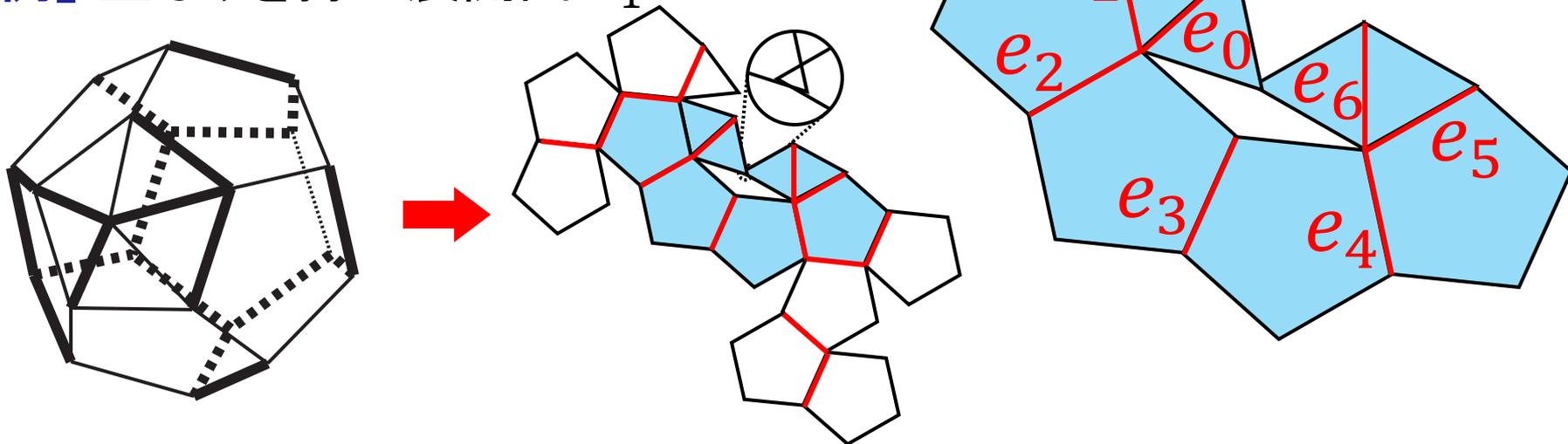
$$NC[M_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

ポイント $NC[M_1] \subseteq NC[U_1]$ であるとき, 展開図は必ず重なる

重なりを持つ

極小な重なりを持つ部分展開図 M_1
(Minimal overlapping partial unfolding: **MOPU**)

【例】重なりを持つ展開図 U_1



$NC[U]$: 展開図 U において切断されない辺の集合

$$NC[U_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, a, \dots, y\}$$

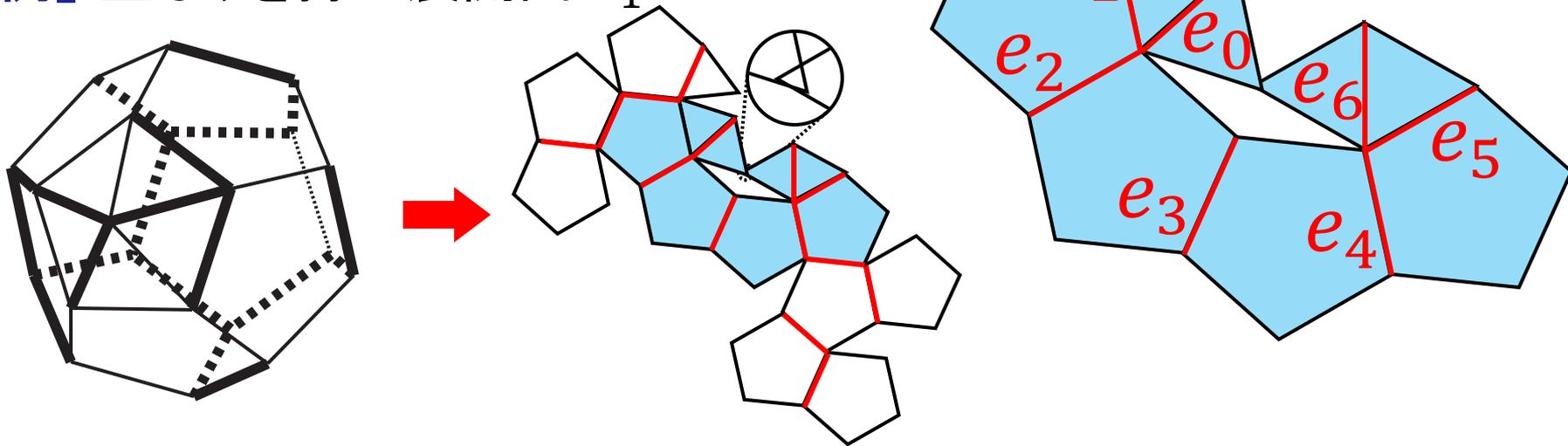
$$NC[M_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

ポイント $NC[M_1] \subseteq NC[U_1]$ であるとき, 展開図は必ず重なる

重なりを持つ

極小な重なりを持つ部分展開図 M_1
(Minimal overlapping partial unfolding: **MOPU**)

【例】重なりを持つ展開図 U_1



$NC[U]$: 展開図 U において切断されない辺の集合

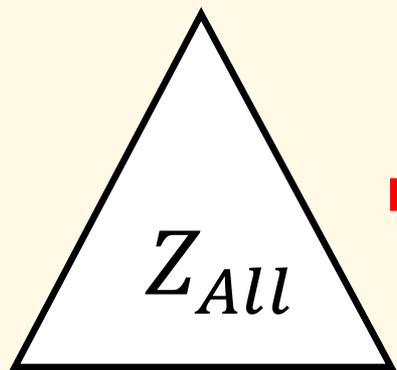
$$NC[U_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, a, \dots, y\}$$

$$NC[M_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

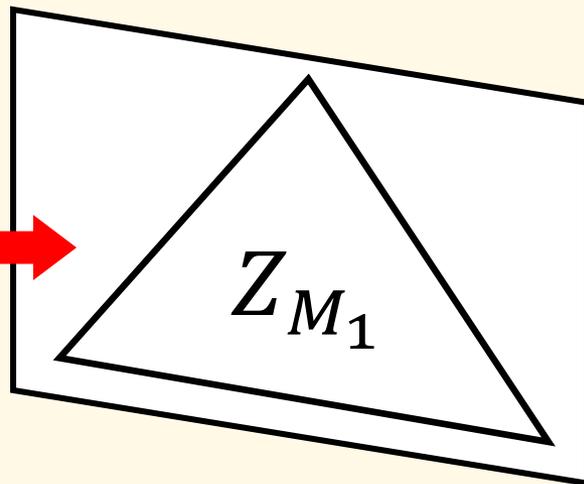
ポイント $NC[M_1] \subseteq NC[U_1]$ であるとき, 展開図は必ず重なる

重なりを持つ

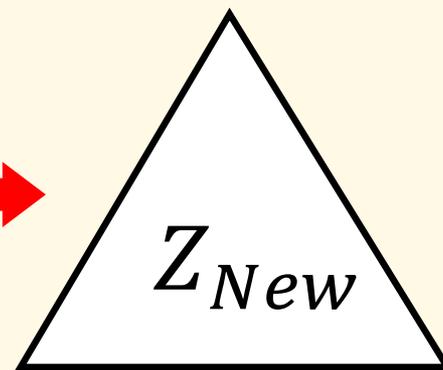
極小な重なりを持つ部分展開図 M_1
(Minimal overlapping partial unfolding: **MOPU**)



全ての展開図を表すZDD



$NC[M_1]$ の要素を**全て**含む集合族を表す ZDD



M_1 を含まない展開図を表すZDD

$$NC[U_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, a, \dots, y\}$$

サブセッティング法

$$NC[M_1] = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

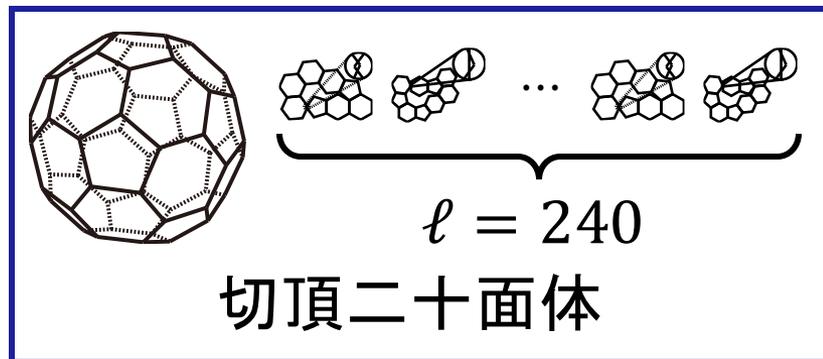
ポイント $NC[M_1] \subseteq NC[U_1]$ であるとき, 展開図は必ず重なる

重なりを持たない展開図の数え上げ



- 多面体 Q における MOPU M_k は
回転展開 [T. Shiota et al., 2024] を
使って列挙できる

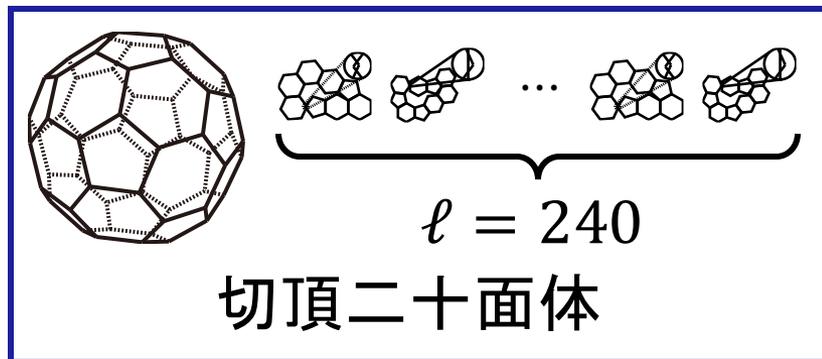
ℓ : Q における MOPU の個数



重なりを持たない展開図の数え上げ

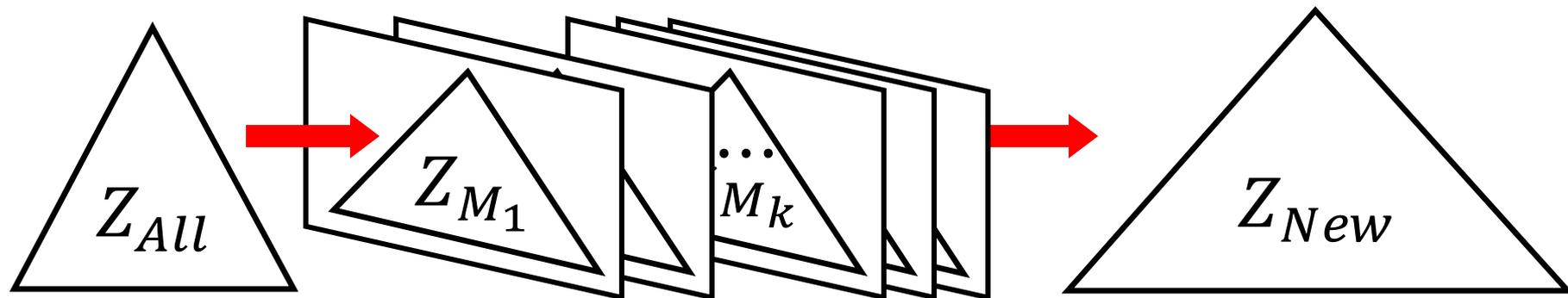


- 多面体 Q における MOPU M_k は
回転展開 [T. Shiota et al., 2024] を
使って列挙できる



ℓ : Q における MOPU の個数

- サブセッティング法を, MOPU $M_k (1 \leq k \leq \ell)$ に適用すると...

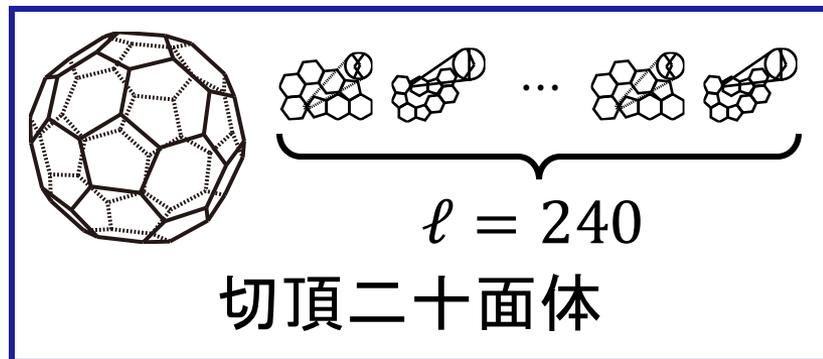


$M_1 \sim M_\ell$ を含まない
展開図を表す ZDD

重なりを持たない展開図の数え上げ

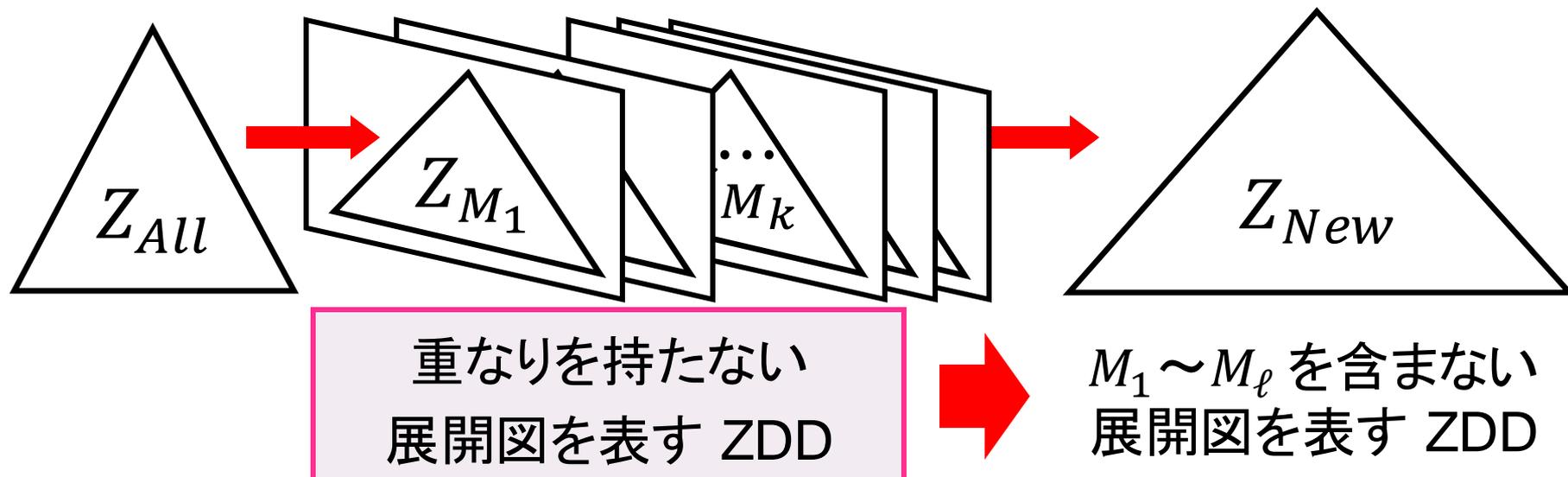


- 多面体 Q における MOPU M_k は
回転展開 [T. Shiota et al., 2024] を
使って列挙できる



ℓ : Q における MOPU の個数

- サブセッティング法を, MOPU $M_k (1 \leq k \leq \ell)$ に適用すると...



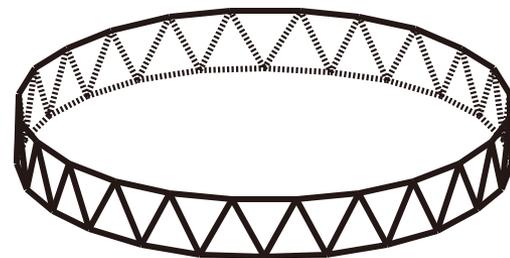
まとめ



- 列挙技法(ZDD)と, 回転展開で得られる MOPU を組合せて, 重なりを持たない展開図の個数を数え上げることに成功した

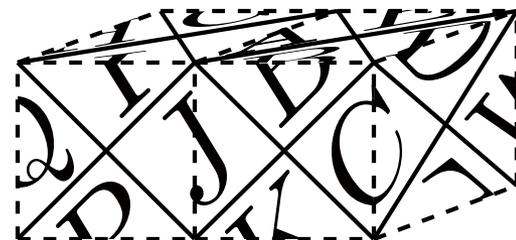
本研究の成果①

重なりを持つ辺展開図が存在するいくつかの整面凸多面体に対し, 重なりを持つ/持たない辺展開図がいくつあるか示した.



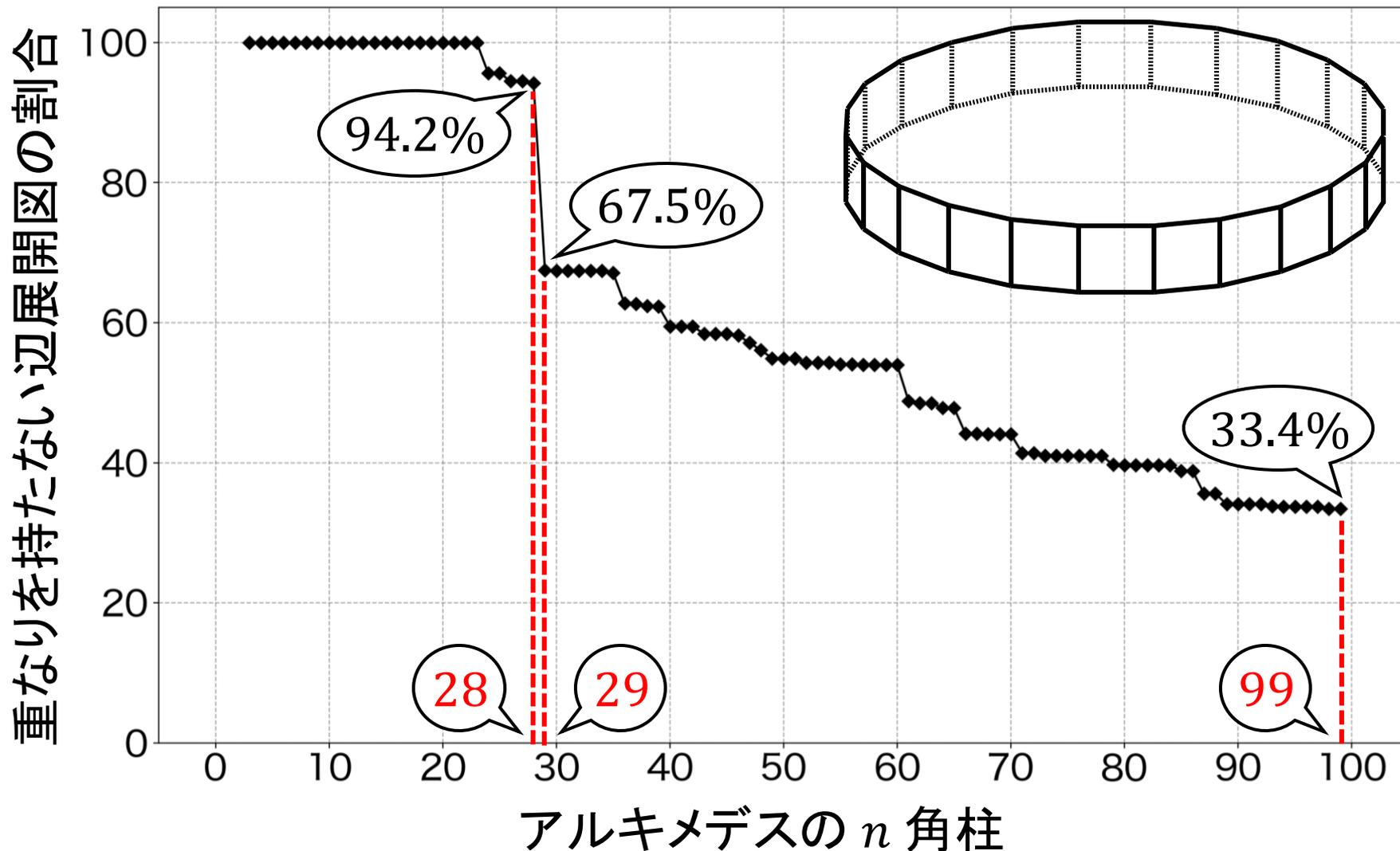
本研究の成果②

重なりを持つ格子展開図が存在するいくつかの格子直方体に対し, 重なりを持つ/持たない格子展開図がいくつあるか示した.



補助スライド

重なりを持たない割合が急減する原因



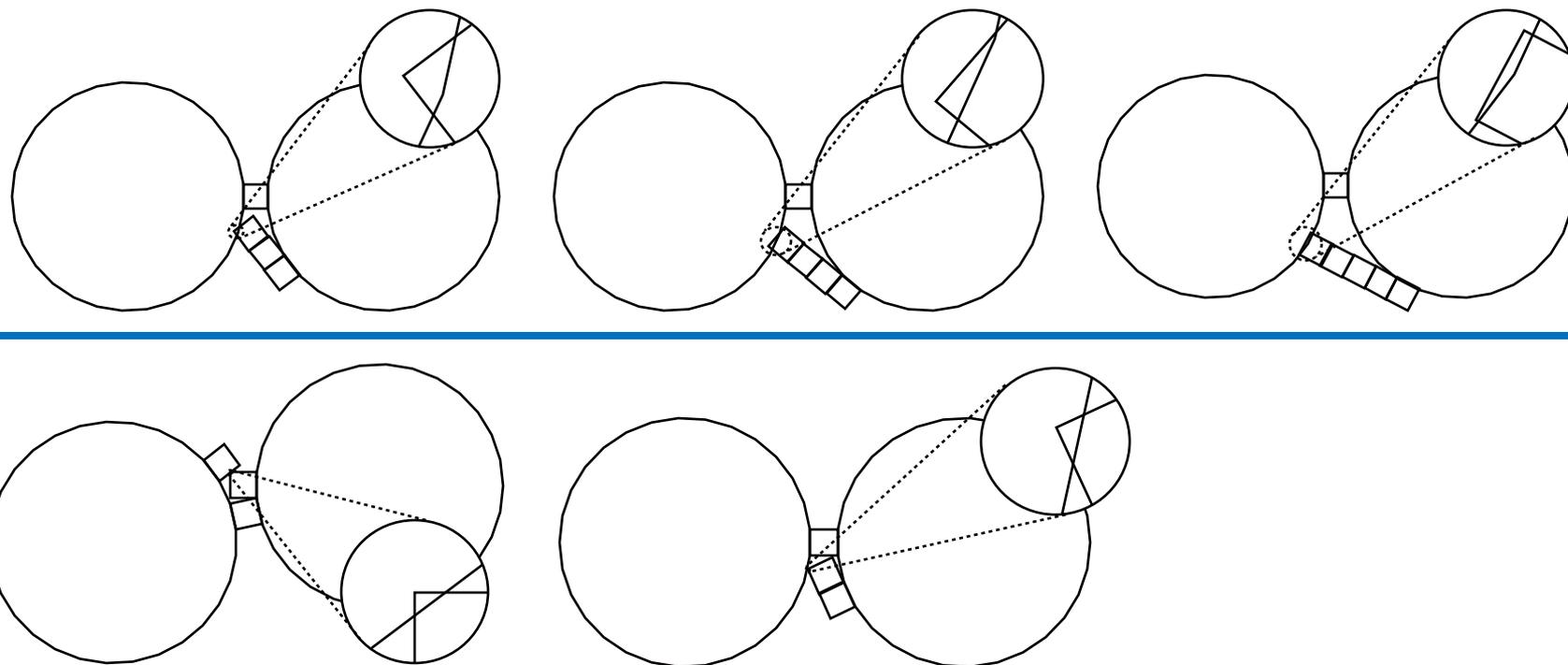
重なりを持たない割合が急減する原因



アルキメデスの n 角柱における MOPU

$n = 29$ における MOPU

$n = 28$ における MOPU



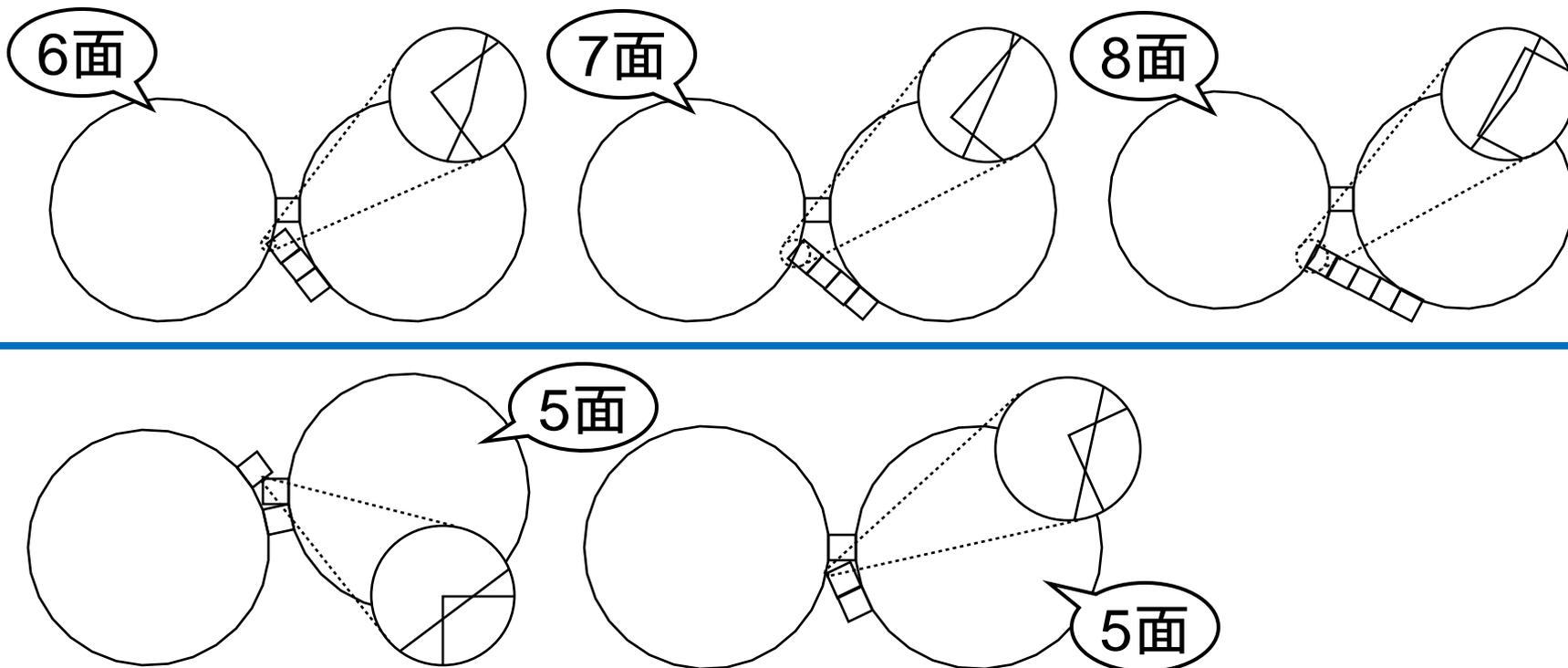
重なりを持たない割合が急減する原因



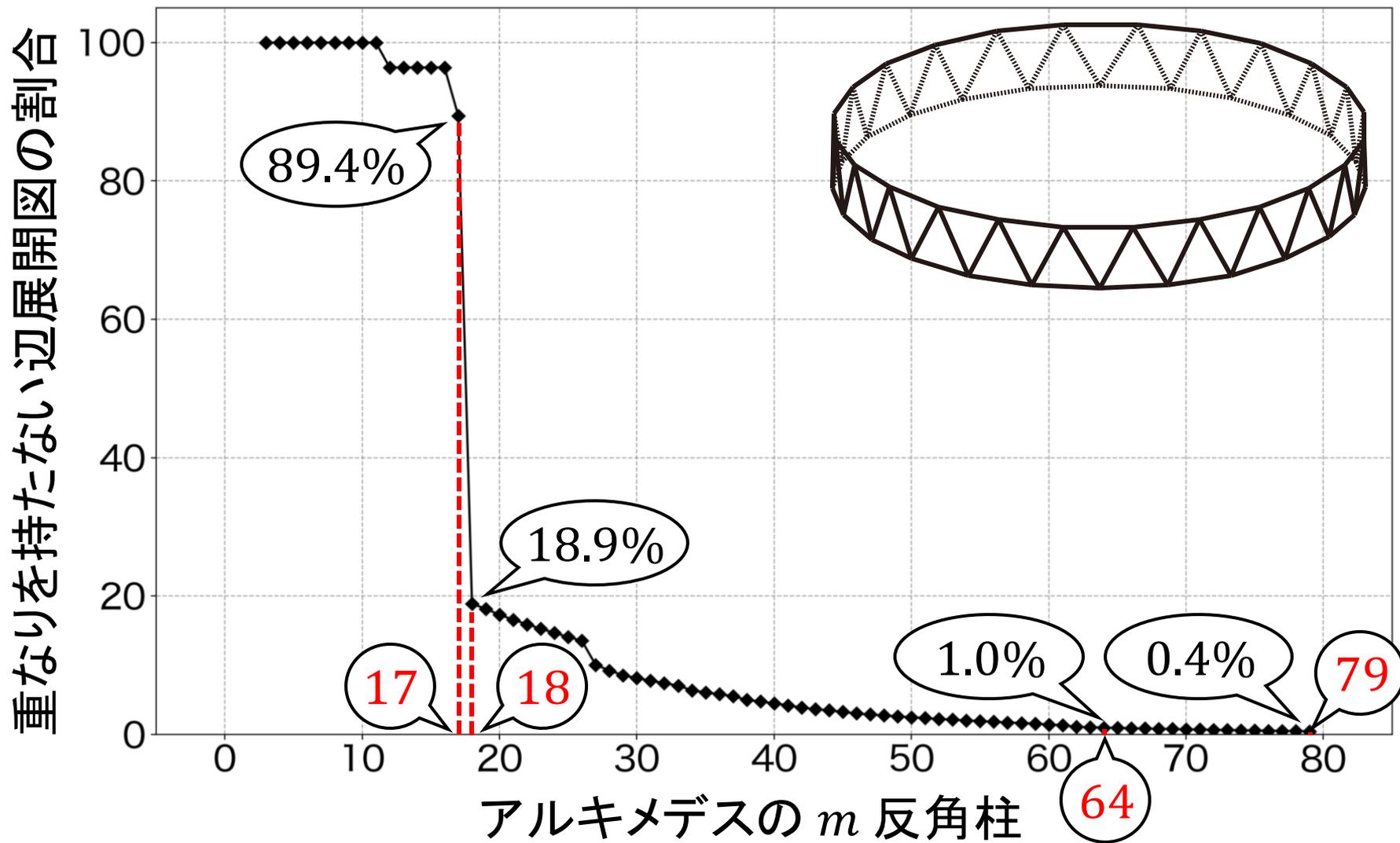
アルキメデスの n 角柱における MOPU

$n = 29$ における MOPU

$n = 28$ における MOPU



重なりを持たない割合が急減する原因



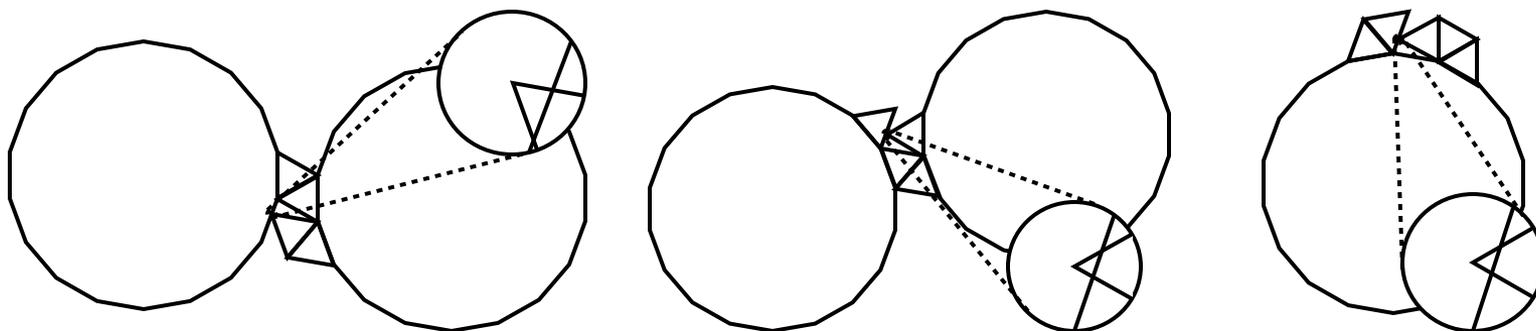
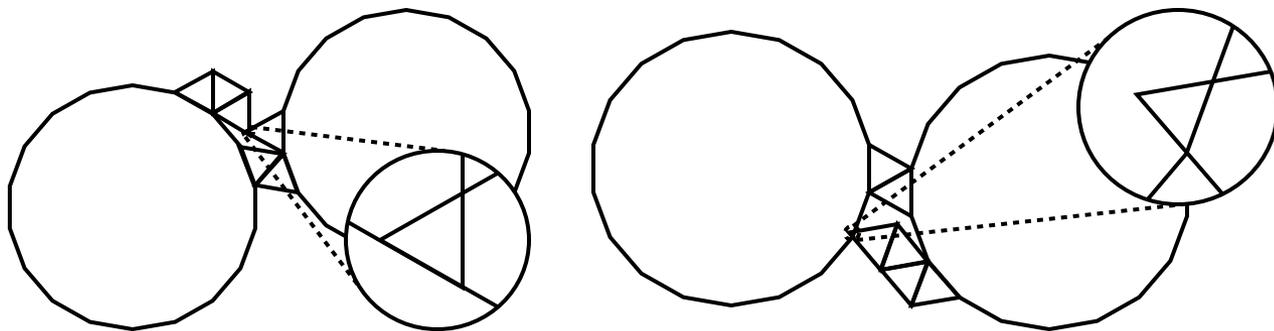
重なりを持たない割合が急減する原因



アルキメデスの m 反角柱における MOPU

$m = 18$ における MOPU

$m = 17$ における MOPU



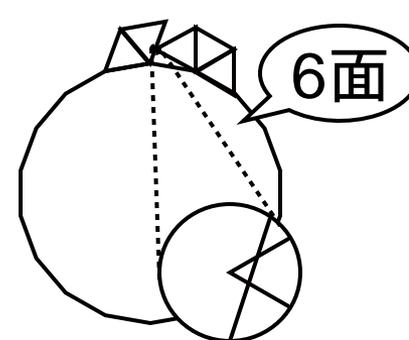
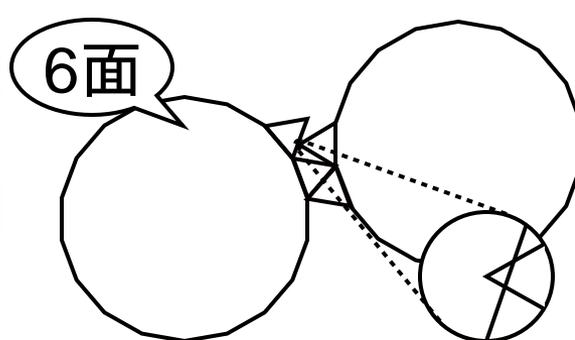
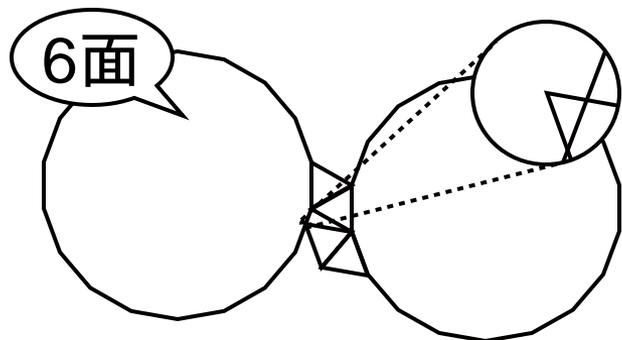
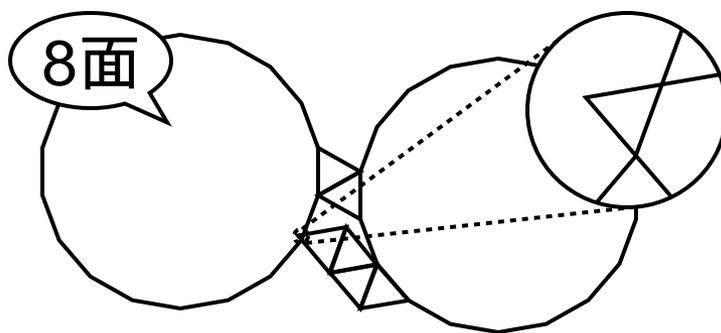
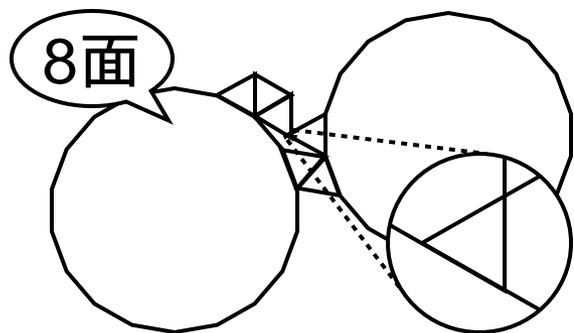
重なりを持たない割合が急減する原因



アルキメデスの m 反角柱における MOPU

$m = 18$ における MOPU

$m = 17$ における MOPU

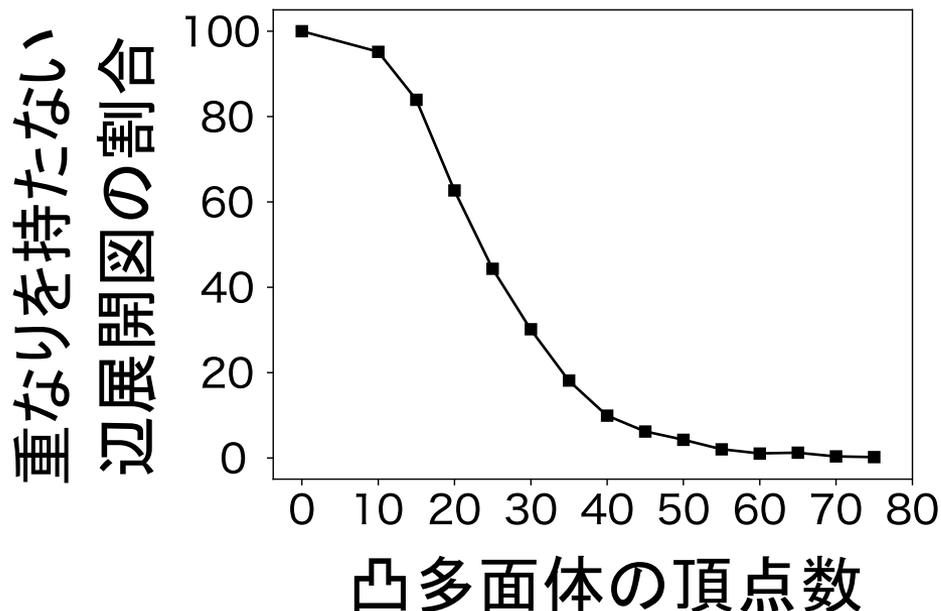


Schevon の実験



[C. A. Schevon, 1989]

凸多面体において頂点の個数が多くなると、全ての辺展開図の個数に対し、重なりを持たない辺展開図の個数の割合は小さくなる。



折れ線グラフの各点は…

- ▶ ランダムな5種類の凸多面体における、重なりを持たない辺展開図の割合の平均値
- ▶ 各凸多面体に対しては、1000個の辺展開図について重なりの有無を判定している