Dissections of a Net of a Regular Octahedron into Nets of Regular Octahedra



能美雄太 (JAIST) 塩田拓海 (Kyutech) <u>鎌田斗南</u> (JAIST) 上原隆平(JAIST)

第37回折り紙の科学・数学・教育研究集会

2024年11月30日~12月1日 @九州大学大橋キャンパス































分割







Our Target





Our Target



Notation



Notation





[1] Zachary Abel, Brad Ballinger, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Jeff Erickson, Adam Hesterberg, Hiro Ito, Irina, Kostitsyna, Jayson Lynch, and Ryuhei Uehara. Unfolding and dissection of multiple cubes, tetrahedra, and doubly covered squares. J. Inf. Process., 25:610-615, 2017.



立方体

[1] Zachary Abel, Brad Ballinger, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Jeff Erickson, Adam Hesterberg, Hiro Ito, Irina, Kostitsyna, Jayson Lynch, and Ryuhei Uehara. Unfolding and dissection of multiple cubes, tetrahedra, and doubly covered squares. J. Inf. Process., 25:610-615, 2017.



立方体

双対

正八面体



Rep-cube [1]







[Abel et al., 2017] [Xu et al., 2018] [Rep-cube に対する既知の結果(一部)] [Xiaoting, 2021] [Okada et al., 2022]

- 次数 k の Regular rep-cube が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + 2ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 18a^2]$ が十分条件
- 11種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 8$ の範囲で、Uniform rep-cube が存在するか否かを決定
 - ある次数 k に対して、Uniform rep-cube が存在することを証明

- 次数 k の Regular rep-oct. が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 64a^2]$ が十分条件
- 11種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 9$ の範囲で、Uniform rep-oct. が存在するか否かを決定
 - どの次数でも Uniform rep-oct. が存在しない場合があることを証明

[Abel et al., 2017] [Xu et al., 2018] [Rep-cube に対する既知の結果(一部)] [Xiaoting, 2021] [Okada et al., 2022]

- 次数 k の Regular rep-cube が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + 2ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 18a^2]$ が十分条件
- 11種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 8$ の範囲で、Uniform rep-cube が存在するか否かを決定
 - ある次数 k に対して、Uniform rep-cube が存在することを証明

- 次数 k の Regular rep-oct. が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 64a^2]$ が十分条件
- 11種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 9$ の範囲で、Uniform rep-oct. が存在するか否かを決定
 - どの次数でも Uniform rep-oct. が存在しない場合があることを証明

[Abel et al., 2017] [Xu et al., 2018] [Rep-cube に対する既知の結果(一部)] [Xiaoting, 2021] [Okada et al., 2022]

- 次数 k の Regular rep-cube が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + 2ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 18a^2]$ が十分条件
- 11種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 8$ の範囲で、Uniform rep-cube が存在するか否かを決定
 - ある次数 k に対して、Uniform rep-cube が存在することを証明

- 次数 k の Regular rep-oct. が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 64a^2]$ が十分条件
- ・11種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 9$ の範囲で、Uniform rep-oct. が存在するか否かを決定
 - どの次数でも Uniform rep-oct. が存在しない場合があることを証明

Theorem

次数kの Regular rep-oct.が存在するとき、

 $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + ab]$ が成り立つ

折り

P:

[Proof]

- Pを次数 kの Regular rep-oct. とする
- $Q \in P$ からおられる正八面体とする

Theorem

次数kの Regular rep-oct.が存在するとき、

 $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + ab]$ が成り立つ

[Proof]

- Pを次数 kの Regular rep-oct. とする
- $Q \in P$ からおられる正八面体とする
- Qの一辺の長さは \sqrt{k}



Theorem

次数kの Regular rep-oct.が存在するとき、

 $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + ab]$ が成り立つ

[Proof]

- Pを次数 kの Regular rep-oct. とする
- Qを Pからおられる正八面体とする
- Qの一辺の長さは \sqrt{k}
- *Q*の2つの頂点 *v*, *v*′ は単位三角格子上の頂点



展開

折り

P:

Theorem

- 次数kの Regular rep-oct.が存在するとき、
- $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + ab]$ が成り立つ

折り

k

展開

P:

[Proof]

- Pを次数 kの Regular rep-oct. とする
- Qを Pからおられる正八面体とする
- Qの一辺の長さは \sqrt{k}

 $\Rightarrow k = a^2 + b^2 + ab$

- *Q*の2つの頂点 *v*, *v*′は単位三角格子上の頂点
- vとv'の座標の差を(a,b)とする
- ここで $(\sqrt{k})^2 = a^2 + b^2 2ab\cos(\pi/3)$ が成り立つ

[Abel et al., 2017] [Xu et al., 2018] [Rep-cube に対する既知の結果(一部)] [Xiaoting, 2021] [Okada et al., 2022]

- 次数 k の Regular rep-cube が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + 2ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 18a^2]$ が十分条件
- 11種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 8$ の範囲で、Uniform rep-cube が存在するか否かを決定
 - ある次数 k に対して、Uniform rep-cube が存在することを証明

- 次数 k の Regular rep-oct. が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 64a^2]$ が十分条件
 - 11 種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 9$ の範囲で、Uniform rep-oct. が存在するか否かを決定
 - どの次数でも Uniform rep-oct. が存在しない場合があることを証明



Theorem

任意の正整数 a に対して、次数 $k = 64a^2$ の Regular rep-oct. が存在する

Theorem

- 任意の正整数 *a* に対して、次数 $k = 64a^2$ の Regular
- rep-oct. が存在する

- *a* = 1 の場合:
 - 1.16個の辺展開図を切掛けの形状を合わせてダイヤ型に並べる
 2.4つのダイア型を並べて一つの展開図を作る





Theorem

- 任意の正整数 *a* に対して、次数 $k = 64a^2$ の Regular
- rep-oct. が存在する

- *a* = 1 の場合:
 - 1.16個の辺展開図を切掛けの形状を合わせてダイヤ型に並べる 2.4つのダイア型を並べて一つの展開図を作る
- *a* > 1 の場合:
 - 1. 上の Step 1 の後、a² 個のダイヤ型を集めて大きなダイヤ型を作る
 2. 上の Step 2 を行う



Theorem

- 任意の正整数 *a* に対して、次数 $k = 64a^2$ の Regular
- rep-oct. が存在する

- *a* = 1 の場合:
 - 1.16個の辺展開図を切掛けの形状を合わせてダイヤ型に並べる 2.4つのダイア型を並べて一つの展開図を作る
- *a* > 1 の場合:
 - 1. 上の Step 1 の後、a² 個のダイヤ型を集めて大きなダイヤ型を作る
 2. 上の Step 2 を行う



[Rep-cube に対する既知の結果(一部)] [Abel et al., 2017] [Xu et al., 2018] [Xiaoting, 2021] [Okada et al., 2022]

- 次数 k の Regular rep-cube が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + 2ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 18a^2]$ が十分条件
- 11種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 8$ の範囲で、Uniform rep-cube が存在するか否かを決定
 - ある次数 k に対して、Uniform rep-cube が存在することを証明

- 次数 k の Regular rep-oct. が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 64a^2]$ が十分条件
 - 11 種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 9$ の範囲で、Uniform rep-oct. が存在するか否かを決定
 - どの次数でも Uniform rep-oct. が存在しない場合があることを証明

Theorem

正八面体の11種類の辺展開図に対して、それに基づいた Uniform rep-oct.の存在性は、次数 $k \leq 9$ の範囲で下図 の通りである

	${\longrightarrow}$	$\langle \langle \rangle \rangle$	(the second seco	$\Delta $	${\checkmark}$	Å	$\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$	}}}	\bigstar		${\nleftrightarrow}$
k = 3	×	0	0	X	0	X	×	0	0	×	0
k = 4	0	0	0	0	X	Х	0	0	0	0	0
k = 7	×	×	X	Х	X	Х	X	×	×	×	X
k = 9	0	0	X	×	X	×	X	×	×	×	0

検証法:

- 問題を整数計画問題として定式化
- ソルバー(SCIP: <u>https://www.scipopt.org/</u>)で求解

	k = 2	×	0	0	X	X	X	0	×	×	0	X
Rep-cube: by [Xiaoting, 2021]	k = 4	0	0	0	0	×	0	×	×	0	0	0
	k = 5	0	0	0	0	Х	0	×	×	0	×	0
and [Okada et al., 2022]	k = 8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

L

Rep-oct.:

L

	${\longrightarrow}$			${\longrightarrow}$	\bigwedge	${\Diamond} {\bigtriangledown}$		X X X X X X X X X X X X X X X X X X X	\bigotimes	\bigwedge	
k = 3	×	0	0	×	0	×	×	0	0	×	0
k = 4	0	0	0	0	×	×	0	0	0	0	0
k = 7	×	×	×	×	×	Х	×	×	×	×	X
k = 9	0	0	×	X	X	×	X	X	×	×	0

- Rep-cube との比較-

	k = 2	X	0	0	X	×	×	0	×	X	0	X
Rep-cube: by [Xiaoting, 2021]	k = 4	0	0	0	0	×	0	X	×	0	0	0
	k = 5	0	0	0	0	X	0	Х	×	0	Х	0
and [Okada et al., 2022]	k = 8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Rep-oct.:

					\mathbf{A}	$\bigwedge \!$			\bigotimes		
k = 3	×	0	0	×	0	×	×	0	0	×	0
k = 4	0	0	0	0	×	×	0	0	0	0	0
k = 7		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
k = 9	0	0	×	×	×	×	×	×	×	×	0

- Rep-cube との比較-



Rep-oct.:

$$k = 3$$
 $k = 0$ $k = 3$ $k = 3$ <

Theorem に基づいた Uniform rep-oct. は存在しない

Theorem に基づいた Uniform rep-oct. は存在しない

- Uniform rep-oct. P が存在すると仮定する
- ▲ の置き方をタイプ*A ~ C* で分類する



Theorem に基づいた Uniform rep-oct. は存在しない

- Uniform rep-oct. P が存在すると仮定する
- **▲**の置き方をタイプ*A ~ C* で分類する
- P が単一のタイプから構成されると仮定する
 - Pを複数のタイプを含むように変形可能







Theorem

に基づいた Uniform rep-oct. は存在しない

- Uniform rep-oct. P が存在すると仮定する
- **▲**の置き方をタイプ*A ~ C* で分類する
- P が単一のタイプから構成されると仮定する
 - Pを複数のタイプを含むように変形可能
- Pが複数タイプを含むと仮定して矛盾を導く
 - この場合、 *P* は右の *X_i* の内のどれかを含む





Theorem

に基づいた Uniform rep-oct. は存在しない

- Uniform rep-oct. P が存在すると仮定する
- **▲**の置き方をタイプ*A ~ C* で分類する
- P が単一のタイプから構成されると仮定する
 - Pを複数のタイプを含むように変形可能
- Pが複数タイプを含むと仮定して矛盾を導く
 - この場合、Pは右の X_i の内のどれかを含む
 - < は別のピースで埋められる必要がある





Theorem

に基づいた Uniform rep-oct. は存在しない

- Uniform rep-oct. P が存在すると仮定する
- **▲**の置き方をタイプ*A ~ C* で分類する
- P が単一のタイプから構成されると仮定する
 - Pを複数のタイプを含むように変形可能
- Pが複数タイプを含むと仮定して矛盾を導く
 - この場合、 *P* は右の *X_i* の内のどれかを含む
 - <<は別のピースで埋められる必要がある
 - 埋めた場合、重複か新たな ダが発生





Theorem

に基づいた Uniform rep-oct. は存在しない

- Uniform rep-oct. P が存在すると仮定する
- **▲**の置き方をタイプ*A ~ C* で分類する
- P が単一のタイプから構成されると仮定する
 - Pを複数のタイプを含むように変形可能
- Pが複数タイプを含むと仮定して矛盾を導く
 - この場合、 *P* は右の *X_i* の内のどれかを含む
 - 🧭 は別のピースで埋められる必要がある
 - 埋めた場合、重複か新たな^くが発生 - 矛盾!





[Rep-cube に対する既知の結果(一部)] [Abel et al., 2017] [Xu et al., 2018] [Xiaoting, 2021] [Okada et al., 2022]

- 次数kの Regular rep-cube が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + 2ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 18a^2]$ が十分条件
- 11種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 8$ の範囲で、Uniform rep-cube が存在するか否かを決定
 - ある次数 *k* に対して、Uniform rep-cube が存在することを証明 [Rep-oct. に対する今回の結果]
 - 次数 k の Regular rep-oct. が存在するために、
 - $\exists a, b \in \mathbb{Z}, [k = a^2 + b^2 + ab]$ が必要条件
 - $\exists a \in \mathbb{Z}, [k = 64a^2]$ が十分条件
- 11種類の辺展開図のそれぞれに対して、
 - 次数 $k \leq 9$ の範囲で、Uniform rep-oct. が存在するか否かを決定
 - どの次数でも Uniform rep-oct. が存在しない場合があることを証明