Dissections of a Net of a Regular Octahedron into Nets of Regular Octahedra

能美 雄太 * 塩田 拓海 † 鎌田 斗南 * 上原 隆平 *

1 はじめに

近年，計算幾何学の一分野として計算折り紙が活発に研究されている [2]．計算折り紙は,「折り」を基本操作とした幾何学であり，タンパク質の折り問題や，建築など，幅広い応用をもつ．多角形と，そこから折れる多面体の間の関係は，こうした計算幾何学の主要なテーマの一つである．しかし，等面四面体の展開図が，ある種のタイリングで特徴づけられるという秋山の結果 [9] を除くと，多角形と多面体の間の関係にはわかっていないことが多い．

ここでは，多角形と多面体の関係について，タイリングの観点から研究を行う．まず多面体の展開図とは，その多面体の表面に切り込みを入れて平面上に展開することで得られる，連結で重なりがない多角形をいう．特に，切り込みを多角形の辺に限定して得られる展開図を辺展開図と呼ぶ．通常，日本の小学校で学ぶ展開図とは辺展開図をさすが，本稿での展開図は多面体の面の中を切ってもよいことに注意する．

本研究では特別な性質をもった展開図として Replicative-net という新しい概念を提唱する．ある多面体 Q と自然数 k に対して，多面体 P が Q の次数 k のReplicative-netであるとは，P が Q の展開図であり，P が k 個の多角形 $P_1, P_2, \ldots, P_k$ に分割可能で，かつそれぞれの P_i が多面体 Q と相似な多面体に折れることをいう．図 1 と図 2 に，Q が正八面体で $k = 3$ の例と，Q が立方体で $k = 2$ の例を示す．

Replicative-net で Q が立方体の場合については，

*北陸先端科学技術大学院大学
†九州工業大学

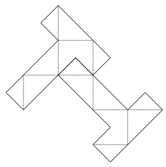

図 1: 次数 2 の Rep-cube

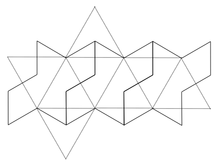

図 2: 次数 3 の Rep-octahedron

Rep-cubeと呼ばれており，いくつかの先行研究が存在する [1, 5, 6]．また Q が正四面体の場合についても研究されてきた [3]．しかし著者らの知る限り，それ以外の多面体については研究されてこなかった．本稿では Q が正八面体の場合を特にRep-octahedronと名付け，これについて研究する．立方体と正八面体とは互いに双対の関係にある．双対な立体の間には，辺展開の方法の個数が等しいということが知られており [2]，立方体と正八面体はどちらも 11 個の辺展開図をもつ．したがって Rep-cube と Rep-octahedron の間にも何らかの関係があることが期待できる．本稿は Rep-cube に関する先行研究を Rep-octahedron に拡張することで，より一般的な Replicative-net に関する性質を明らかにする．

ある Replicative-net を P とする．分割された展開図の面積が全て等しいとき，P はRegularであるという．特に，分割された展開図が全て合同のとき，P はUniformであるという．図 2 に示した Rep-octahedron は Uniform rep-octahedron であり，したがって Regular rep-octahedron でもある．図 3 に Uniform でも Regular でもない Rep-octahedron の一例を示す．

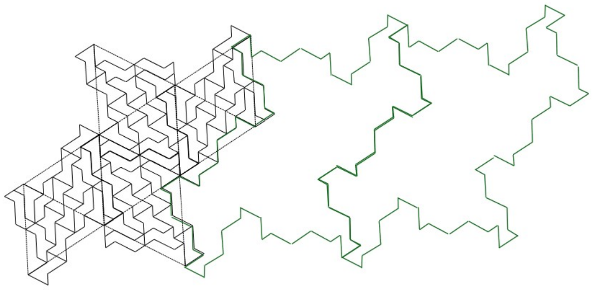

図 3: Regular でも Uniform でもない Rep-octahedron

文献 [2] の定理 2.1.1 に示されているとおり，双対の関係にある二つの多面体は辺展開の個数が同じである．したがって立方体と正八面体の 11 種類の展開図の間には以下の方法で 1 対 1 対応を構成できる（表 1）：Q を立方体，P_i $(1 \leq i \leq 11)$ を Q の 11 個の辺展開図，Q' を正八面体，P'_j $(1 \leq j \leq 11)$ を Q' の 11 個の辺展開図とする．P_i の上での Q の 6 つの面を頂点とし，P_i 上での面の接続関係を辺とするグラフ G_i を作る．次に Q' の 6 つの頂点を頂点とし，P'_j に展開するときに切る Q' の辺を辺とするグラフを G'_j とする．この G_i と G'_j が同型であるとき，辺展開図 P_i と P'_j を対応付けることとする.（なお，この G_i と G'_j はどちらも木となる.）

2 Rep-cube に関する既知の結果

先行研究 [1, 5, 6] における Rep-cube に関する既知の結果を簡単にまとめておく.

定理 1 ([1, 5, 6])**.** $k = 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 18, 25, 36, 50, 64$ のそれぞれについて，次数 k の *Regular rep-cube* が存在する.

定理 2 ([5, 6])**.** 次数 k の *Regular rep-cube* が存在する必要条件は，k が集合 $\{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, \dots\}$ に含まれることである.

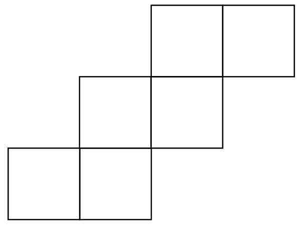

図 4: 定理 3 の証明で用いる展開図

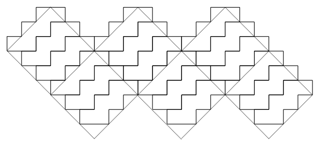

図 5: 次数 $18i^2$ $(i = 1)$ の Uniform rep-cube

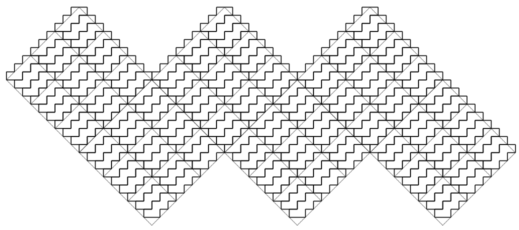

図 6: 次数 $18i^2$ $(i = 3)$ の Uniform rep-cube

定理 3 ([1])**.** 任意の正整数 i に対して，$k = 18i^2$ ならば次数 k の *Uniform rep-cube* が存在する.

Proof. 図 4 で示した展開図を 18 枚使用して図 5 のように敷き詰める．すると次数 18 の Uniform rep-cube が得られる．これを細分化することで無限に Uniform rep-cube が構成できる．図 5 を細分化して得られた次数 162 の Uniform rep-cube を図 6 に示す. □

文献 [6, 7] では，小さな k に対して実際の Uniform rep-cube の存在性を線形計画法に基づいて探索する

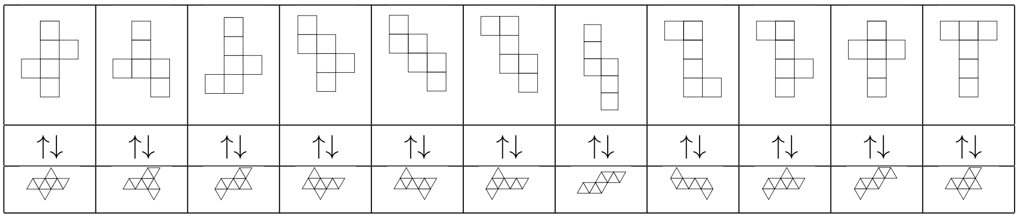

表 1: 立方体と正八面体の辺展開図の対応

方法を示し，立方体の 11 種類の辺展開図のそれぞれに対して，構成可能性を調査している．その結果を表 2 に示す．特に $k = 7$ において，すべての辺展開図が Uniform Rep-cube を構成できることに注意する．

3　小さな値の k に対する Regular rep-octahedron の存在性

定理 4. $k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$ のそれぞれについて，次数 k の *Regular rep-octahedron* が存在する．

Proof. 実際の Regular rep-octahedron の例を図 7 と図 8，図 9 に示す．このうち，特に図 7 と図 8 の例はどれも Uniform rep-octahedron であることに注意する． □

なお定理 4 の証明で示した各 Regular rep-octahedron のパターンは，フリーのパズルソルバ Burrtools[8] を用いて手作業で求めた．Burrtools は，与えられたピースを与えられた枠にはめ込むことができるかどうかをチェックするパズルソルバである．具体的には，展開図の外枠の形を調整しながら，用意した展開図のピースを隙間なく重なりなくはめ込むことができるかどうかを試行錯誤しながら解を求めた．

4　Regular rep-octahedron が存在する必要条件

本節では，次数 k の Regular rep-octhedron が存在する必要条件について示す．まずいくつか補題を

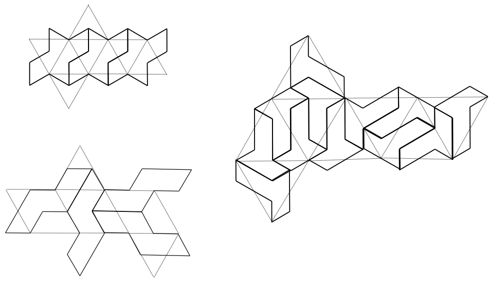

図 7: 次数 3,4,12 の Regular (uniform) rep-octahedron

示す．

補題 1. 正八面体 Q の *1* 辺の長さを単位長とし，Q の任意の展開図を P とする．このとき，Q のすべての頂点は P の外周上の点になることが知られている．ここで，P をうまく単位長の三角格子点上に配置すると，P の外周上の Q の頂点をすべて同時に格子点上に乗せることができる．

Proof. （略証）先行研究 [5] では秋山 [9] のスタンパーの考え方を用いて，単位立方体 Q' の任意の展開図 P' をうまく配置すると，P' の外周上にある Q' のすべての頂点を単位正方格子の格子点に乗せることができることを示している．[5] での証明を正八面体と三角格子に置き換えると，補題 1 が得られる． □

Rep-cube は正方格子上での議論が本質的であり，その中では，自然数 $a, b (a \geq 0, b > 0)$ に対して $p = a^2 + b^2$ となる自然数 p が重要な役割を果たしていた．こうした条件を満たす自然数 p はフェルマーの二平方定理と呼ばれる定理で特徴づけられる．Rep-

	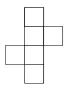	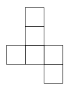	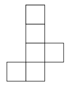	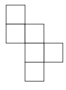	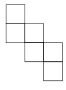	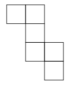	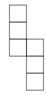	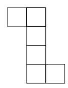	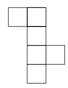	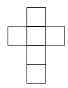	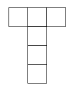
2	×	◯	◯	×	×	×	◯	×	×	◯	×
4	◯	◯	◯	◯	×	◯	×	×	◯	◯	◯
5	◯	◯	◯	◯	×	◯	×	×	◯	×	◯
7	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯

表 2: 辺展開図と Uniform rep-cube の構成可能性

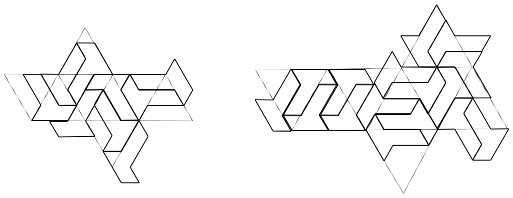

図 8: 次数 9,16 の Regular (uniform) rep-octahedron

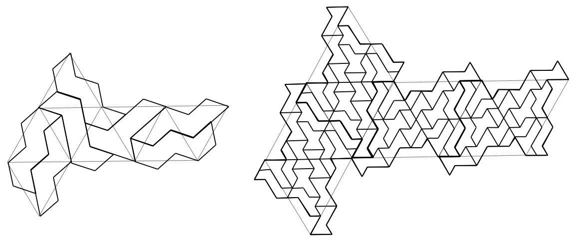

図 9: 次数 7,64 の Regular rep-octahedron

octahedron では三角格子上での議論となるため，別の形式 $p = a^2 + b^2 + ab$ で与えられる自然数 p が重要な役割を果たす．こうした自然数 p に対しては以下の補題が知られている．

補題 2 ([10, 11])**.** *(1)* p が素数のとき：ある正整数 a, b に対して $p = a^2 + b^2 + ab$ である必要十分条件は $p \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ または $1 (\mathrm{mod}\ 3)$ である．
(2) p が合成数のとき：ある非負整数 a, b に対して $p = a^2 + b^2 + ab$ である必要十分条件は，ある正整数 x, y, z, k が存在し，$p = x^2 3^y (6k+1)^z$ かつ $x \neq 3k+1$ が成立することである．

以下では簡単のため集合 S を $S = \{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2 + ab\} = \{1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, \dots\}$ と定義する．

補題 1 を用いて Regular rep-octahedron が辺展開図から構成される場合に限定したときの存在性を示す．

補題 3. 面積が $2\sqrt{3}k$ である次数 k の *Regular rep-octahedron* が存在する必要条件は，k が集合 S に含まれることである．

Proof. 文献 [1] で用いられた Regular pep-cube の非存在性に関する証明を Rep-octahedron に拡張する．

$\hat{P}$ を次数 k の Regular rep-octhedron とする．すると，$\hat{P}$ は同じ面積の k 個の正八面体の展開図 $P_1, P_2, \dots, P_k$ に分割できる．このとき，$\hat{P}$ の面積が $2\sqrt{3}k$ であることから，$\hat{P}$ は辺の長さ $\sqrt{k}$ の正八面体の展開図であり，各 P_i は単位長の辺をもつ正八面体 Q_i の展開図である．

各 P_i を単位三角格子上に配置する．Q_i の 1 辺の長さは単位長なので，補題 1 より Q_i のすべての頂点が三角格子点上になるように配置できる．このとき，Q_i の任意の 2 頂点間の距離は，余弦定理より $\sqrt{a^2 + b^2 + ab} = 1$ $(a, b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0)$ と表すことができる．

$\hat{P}$ と $\hat{Q}$ に対しても同様の操作を行うことで $\hat{a}^2 +$

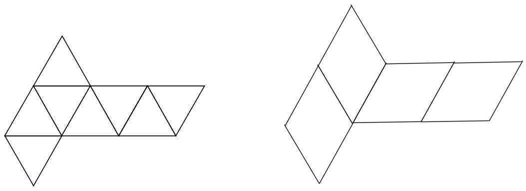

図 10: 正八面体の辺展開図の一つと，正三角形を二つずつひし形で置換した展開図

$\hat{b}^2 + \hat{a}\hat{b} = (\sqrt{k})^2 = k$ $(\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}, \hat{a} > 0, \hat{b} \geq 0)$ を得る．したがって，次数 k の Regular rep-octahedron が存在するためには，1 以上の整数 a と，0 以上の整数 b が存在して，$a^2 + b^2 + ab = k$ となることが必要である． □

補題 2 を適用することで以下の定理が得られる．

定理 5. 次数 k の *Regular rep-octhedron* が存在する必要条件は，k が集合 S に含まれることである．

Proof. （略証）補題 3 に文献 [6] で用いられた技法を適用すれば，定理を得ることができる．このとき，文献 [6] ではフェルマーの二平方定理で与えられる性質（自然数 k が $a^2 + b^2$ で表現されるための必要十分条件）を用いたが，代わりに補題 2 の特徴付けを用いる必要がある． □

5 Regular rep-octahedron が存在する十分条件

定理 6. 任意の正整数 i に対し，$k = 64i^2$ を満たす次数 k の *Regular rep-octahedron* が存在する．

Proof. 正八面体の辺展開図は 8 つの正三角形からなるが，うまく二つずつ接着することで，4 つのひし形で構成できるものがある．一例を図 10 に示す．このひし形を正八面体の辺展開図で構成した特定のパターンで置き換える．具体的には図 11 のパターン（以下 pp と呼ぶ）を用いる．図 10 の 8 つのひし形を 8 つの pp で置き換えたものを図 12 に示す．パターン pp は正確なひし形ではないが，凹凸が矛盾なく一致するように設計されているため，図 12 は正八面体の展開図であることが確認できる．つまり図 12 の多角形は次数 64 の Regular rep-octahedron である．

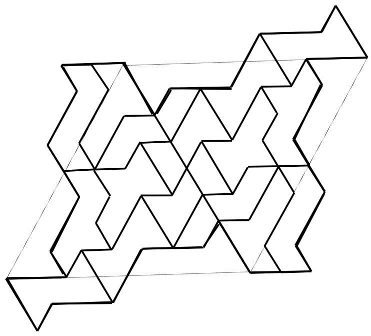

図 11: 次数 $k = 64i^2$ の Regular rep-octahedron を作るためのパターン pp

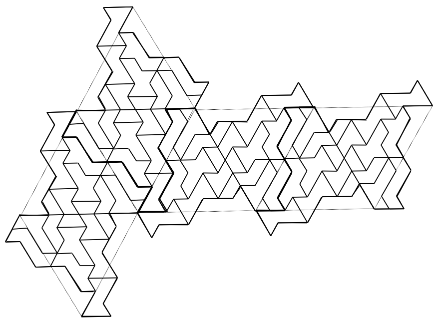

図 12: pp を埋め込んで得られる次数 64 の Regular rep-octahedron

ここで用いたひし形は，任意の i に対して i^2 個の小さなひし形に細分することができる（図 13）．細分した個々のひし形について同様にパターン pp で置き換えれば，より細かな Regular rep-octahedron を得ることができる．($i = 2$ に対する次数 256 の Regular rep-octahedron を図 14 に示す．）したがって定理が成立する． □

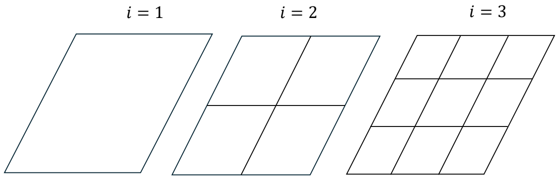

図 13: ひし形を分割

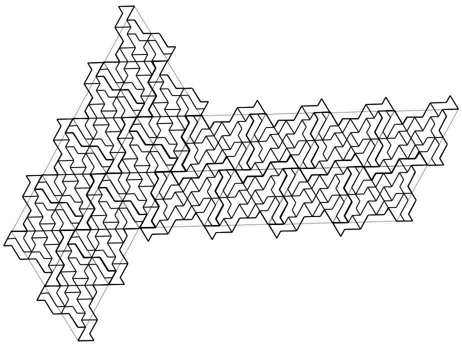

図 14: pp を埋め込んで得られる次数 $k = 64i^2(i = 2) = 256$ の Regular rep-octahedron

6　小さな k に対する Uniform rep-octahedron の存在性

本節では小さな k に対する Uniform rep-octahedron の存在性を計算機実験を用いて探求する．具体的には集合 S の中から比較的小さな数 $k = 3, 4, 7, 9, 16$ の場合を選んで対象とした．まず計算機実験の手順を述べ，小さな次数に対する Uniform rep-octahedron の存在の有無を示す．

6.1　計算機実験の手順

正八面体の 11 種類の辺展開図それぞれに対して，Uniform rep-octahedron が構成できるかどうかを計算機を用いて調べた．具体的には整数計画ソルバーの SCIP version 8.0.3 を使用した [12]．整数計画法

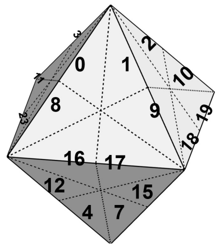

図 15: 番号を配置した Q の例

で解くためのモデル化の技法は，例えば [13] で示されているものを採用した．具体的には，まずターゲットとなる k の値を固定して，正八面体 Q の表面を $8k$ 枚の正三角形に分割する．そして各正三角形に一意的な番号を割り当てる.（番号の値や配置は任意であるが，便宜上 0 から $8k-1$ の値を一つずつ適当に割り当てた.）図 15 に $k=3$ の例を示す.

次に特定の正八面体の辺展開図を 1 つ選ぶ．これを p とする．この p は単位正三角形 8 枚から構成されるものと考え，p を k 枚使用して Q の表面を重なりなく隙間なく覆うことができれば，次数 k の Uniform rep-octahderon が存在する.（厳密にはこれを重ならないように展開できることを確認する必要があるが，容易であるため，本稿では無視する.）手順の詳細を以下に示す.

1. 11 個の辺展開図の中から一つ選んで p とし，1 辺の長さが $\sqrt{k}$ の正八面体を Q とする．展開図 p の 1 辺の長さは 1 とする.

2. Q の表面を $8k$ 個の単位三角形に分割し，単位三角形に 0 から $8k-1$ まで適当に番号をつける.

3. p のコピーを Q の単位三角形上に敷き詰める処理をモデル化する． 具体的には p の特定の配置を単位正三角形の番号を用いた変数 $A(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ で表現する．各 a_i がその p で覆われている単位正三角形の番号を表す．表現を一意的にするため $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$ と定める.

   展開図 p に対して，裏返しや回転を含む全ての可能な配置に対して，それを表現した変数を用意す

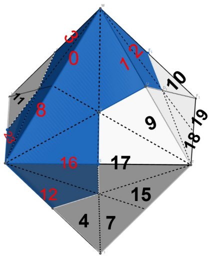

図 16: p を Q 上の 0,1,2,3,8,12,16,23 を覆うように置いたとき

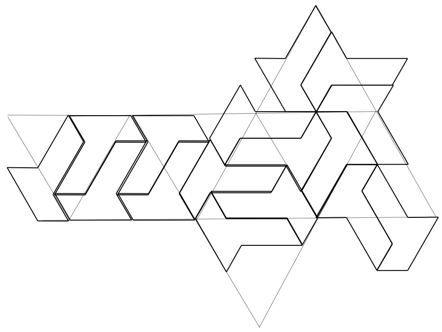

図 17: 次数 16 の Uniform rep-octahedron

る．$A(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)=1$ のときは p を $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ を覆うように配置した場合で，$A(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)=0$ のときは p をそこに配置しない場合を表す．例えば図 16 のように Q 上の単位正三角形 0,1,2,3,8,12,16,23 が p で覆われているときは変数 $A(0,1,2,3,8,12,16,23)$ の値が 1 となる．

4. 単位三角形 i ごとの制約式を導入する．制約式は，単位三角形 i を覆う p の個数を表す．全ての i はちょうど 1 枚の p のコピーで覆われる必要があるため，制約式の解は 1 に設定する．単位三角形 i の制約式は，変数 $A(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$ の和で表現できる．つまり $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ のいずれかに i が含まれる場合に限り場所 i の制約式に含める．正確には単位三角形 i に関する制約式は以下で記述できる：

$$\sum_{i\in\{a_0,a_1,\ldots,a_7\}} A(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)=1$$

5. 全ての単位三角形での制約式を満たす解が存在するか判定する．すべての制約式を満たす解が存在する場合は展開図 p に関して次数 k の Uniform rep-octahedron が存在し，解が存在しないときは存在しない．

SCIP の実験環境を表 3 に示す．

6.2 次数 k の Uniform rep-octahedron の存在性

上記の実験により，正八面体の 11 種類の辺展開図それぞれに対して，$k=3,4,7,9,16$ の Uniform Rep-cube の存在性について，表 4 が得られた．

計算機実験で得られた，次数 16 の Uniform rep-octahedron の 1 つを図 17 に示す．

表 4 から以下の観察が得られる．

観察 1. *(1) 次数 7 の Uniform rep-octahedron は存在しない．(2) 図 18 に示した辺展開図（以下 z 型展開図と呼ぶ）に対して，$k=3,4,7,9,16$ の範囲においては Uniform rep-octahedron は存在しない．*

観察 1(1) は表 2 とは大きく異なる点である．Rep-cube においては，$k=a^2+b^2$ を満たす小さな k について，探索した範囲ではすべての k に Uniform rep-cube が存在することが確認された．また，探索範囲が限られているものの，観察 1(2) も Rep-cube とは大きく異なる．Rep-cube においては，すべての展開図が何らかの k に対して Uniform rep-cube であることが確認されたが，z 型展開図を用いた Uniform rep-cube は今のところ一つも見つかっていない．

こうした事実から，立方体と正八面体は互いに双対の関係にあり，辺展開図の個数も同じであるが，Rep-cube と Rep-octahedron の間には共通点はほとんどないと結論付けられる．特に以下の予想は，この結論の強い根拠となる．

使用ツール	SCIP version 8.0.3
CPU	11th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 @ 2.40GHz 2.42 GHz
RAM	8.00GB
OS	Windows 11 Education

表 3: SCIP の実行環境

		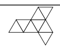			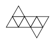	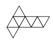	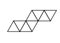	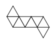	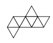		
3	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	○	×	×	○	○	×
12						○(図 7)					
13											
16	×	×	×	×	×	○	×	×	×	○	×

表 4: 辺展開図ごとの Uniform Rep-octahedron の構成可能性

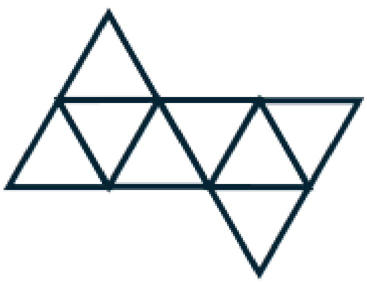

図 18: z 型の辺展開図

予想 1. *z 型の辺展開図をもとにした Uniform rep-octahedron は存在しない.*

7 おわりに

本研究では，Replicative-net という概念を提唱し，それを正八面体に適用した Rep-octahedron についての研究を行った．既存の Rep-cube に対する研究は立方体に関する同様の研究であり，立方体と正八面体とは互いに双対の関係にあるが，Replicative-net として見たときには，相互の関係はほとんどないと結論付けられる．

残された課題は次のとおりである．

まず，z 型の辺展開図をもとにしてできる Uniform rep-octahedron が存在しないという予想の証明が大きな課題である．これまでのところ，Regular rep-octahedron あるいは Regular rep-cube において，存在のための必要条件が満たされている k については，すべて解が見つかっている．特定の展開図に対して Uniform rep-octahedron が存在しないことが示せれば，Rep-octahedron と Rep-cube の違いがより明確になり，Replicative-net の研究における大きな進展になる．

また Uniform rep-octahedron が無限に存在するかどうかも未解決である．定理 3 に示したとおり，Rep-cube においては Uniform rep-cube は無限に存在するので，ここでの対照も Replicative-net の研究においては重要となる．

さらに一般の Replicative-net についてもさらなる研究の余地は残されている．正 12 面体については直感的には存在しないように思われるが，明確な証明は与えられていない．また正 12 面体と双対の関係にある正 20 面体については，正八面体や正四面体と同

様に三角格子上で議論できるため，Replicative-net は存在しても不思議ではない．また正多面体に限定しない Replicative-net については，まったくの未開拓分野であるが，Rep-tile をはじめとするタイリングの文脈 (例えば [4] 参照) からは興味深い研究テーマである．

参考文献

[1] Zachary Abel, Brad Ballinger, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Jeff Erickson, Adam Hesterberg, Hiro Ito, Irina Kostitsyna, Jayson Lynch and Ryuhei Uehara.“Unfolding and Dissection of Multiple Cubes, Tetrahedra, and Doubly Covered Squares”, Journal of Information Processing, Vol. 25, pp. 610-615, 2017

[2] 上原隆平．“計算折り紙入門 – あたらしい計算幾何学の世界”，近代科学社, 2018

[3] 高村侑樹. “正四面体の展開図の分解について”, 第 24 回折り紙の科学・数学・教育, 2018 (https://origami.jp/archives/OSME/1806.html)

[4] Martin Gardner. “Hexalfexagons, Probability Paradoxes, and the Tower of Hanoi: Martin Gardner’s First Bool of Mathematical Puzzles and Games”, Cambridge, 2008 ([邦訳] 岩沢宏和，上原隆平．“ガードナーの数学パズル・ゲーム”，日本評論社，2017)

[5] Dawei Xu, Jinfeng Huang, Yuta Nakane, Tomoo Yokoyama, Takashi Horiyama and Ryuhei Uehara. “Rep-Cubes: Dissection of a Cube into Nets”, IEICE TRANS. FUNDAMENTALS, VOL. E101–A, NO.9, pp 1420-1430, September 2018

[6] Tamami Okada and Ryuhei Uehara. “Research on Dissections of a Net of a Cube into Nets of Cubes”, IEICE TRANS. INF. & SYST, VOL. E105–D, NO. 3, pp 459-465, 2022

[7] Liu Xiaoting, minor research at Uehara lab, December 2021

[8] Burrtools, https://burrtools.sourceforge.net/

[9] Jin Akiyama, “Tile-makers and semi-tile-makers”, American Mathematical Monthly, Vol. 114:7, pp. 602-609, 2007

[10] Umesh P. Nair, “Elementary results on the binary quadratic form $a^2 + ab + b^2$”, arXiv:math/0408107, 2004

[11] Kamal Bahmanpour, “Prime numbers p with express $a^2 \pm ab \pm b^2$”, Journal of Number Theory, Vol. 166, pp. 208-218, 2016

[12] SCIP, https://www.scipopt.org/

[13] Mutsunori Banbara, Kenji Hashimoto, Takashi Horiyama, Shin-ichi Minato, Kakeru Nakamura, Masaaki Nishino, Masahiko Sakai, Ryuhei Uehara, Yushi Uno and Norihito Yasuda, “Solving Rep-tile by Computers: Performances of Solvers and Analyses of Solutions”, 第 119 回 人工知能基本問題研究会, pp. 2-7, 2022