連続的なパラメータを持つ正角柱の重なりを持たない辺展開図

鎌田 斗南 * Jason S. Ku† 塩田 拓海 ‡ § 上原 隆平 *

1 はじめに

多面体を切断線に沿って平面上に切り開くことを展開といい，得られる平面多角形を展開図という．展開図の起源は，Albrecht Dürer (著) “Underweysung der messung mit dem zirckel un richt scheyt” に描かれたスケッチにあるとされている [Dür25, DO07]．多面体は，その形状や展開方法により，得られる展開図上の異なる二面が 図 1 に示すように重なりを持つことがある．切断線を特に辺に制限した場合，展開することで得られる平面多角形を辺展開図という．Shephard は，辺展開図について次の予想を立てた．

予想 1 ([She75])**.** 任意の凸多面体には，重なりを持たない辺展開図が少なくとも一つ存在する．

この予想は，依然として未解決のままであり，この解決を目指して様々な観点から研究がされている．その一つとして，展開の際に辺以外を切ることを許容した一般展開図を考えるものがある．一般展開について，以下の定理が知られている．

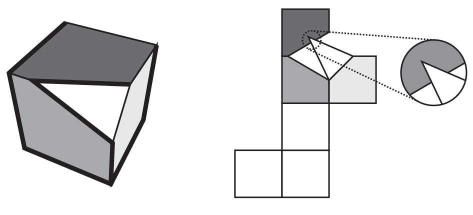


図 1: 角が切り落とされた立方体と，重なりを持つ展開図の例 [NF93]．左の立体を太線に沿って切ると，右の展開図が得られる．

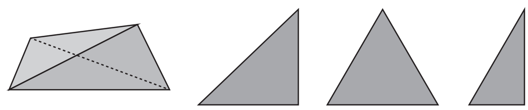


図 2: どのように一般展開しても重ならない多面体のクラス．左から順に，等面四面体，直角二等辺三角形二面体，正三角形二面体，半正三角形二面体．等面四面体とは各面が合同な四面体，二面体とは合同な二つの面からなる多面体である．

定理 2 ([DO07])**.** 任意の凸多面体は，重なることなく一般展開できる．

この定理は，Sharir と Schorr が起点展開 [SS86]，Aronov と O’Rourke が星展開 [AO92] を示したことにより証明されたものである．また，秋山と松永は，図 2 に示す四つのクラスの多面体は，どのように一般展開しても重なることなく展開できることを示した [AM18]．一方で，鎌田らは 図 2 に示す四つのクラス以外の多面体は，特定の方法で一般展開することで，重なりを持つことを示した [KSU24]．

辺展開図においては，与えられた多面体に対して，重なりを持つ辺展開図が存在するかを判定する研究がある．Biedl らは 1998 年，Grünbaum は 2003 年に，どのように辺展開しても重なりを持つ凹多面体をそれぞれ示した [BDD+98, Grü03]．DiBase は 6 頂点以下からなる凸多面体は，特定の方法で辺展開することで，常に重なりなく辺展開図できることを示した [DiB90]．また，全ての面が正多角形からなる凸な多面体である整面凸多面体については，重なりを持

*北陸先端科学技術大学院大学
†シンガポール国立大学
‡九州工業大学
§日本学術振興会特別研究員

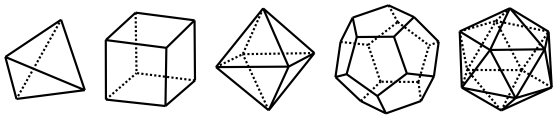


図 3: 正多面体の一覧．左から順に，正四面体，立方体，正八面体，正十二面体，正二十面体

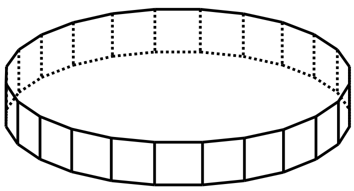


図 4: アルキメデスの n 角柱の例．上面と底面は正 n 角形，側面は全て正方形からなる．

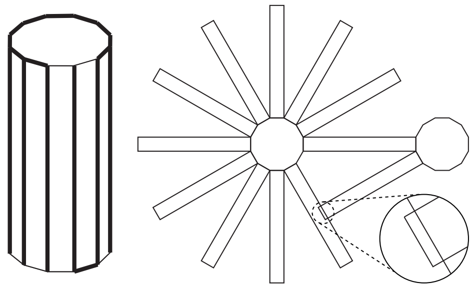


図 5: [Sch89] で描画されている正 12 角柱の重なりを持つ辺展開図．左の角柱を太線に沿って切ると，右の辺展開図が得られる．

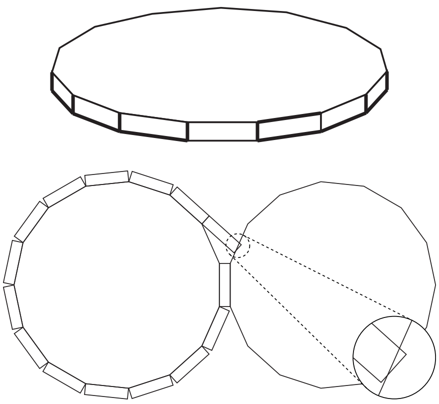


図 6: [Sch89] で描画されている正 15 角柱の重なりを持つ辺展開図．上の角柱を太線に沿って切ると，下の辺展開図が得られる．

つ辺展開図が存在する／存在しないが完全に解明されている [HS11, HS13, Hir15, CFG91, SS24]．例えば，堀山と庄司は，正多面体（図 3）はいずれも重なることなく辺展開できることを示した [HS11]．また，塩田と斎藤は回転展開というアルゴリズム [SS24] を考案し，アルキメデスの n 角柱（図 4）という多面体に対して，次の定理を示した．

定理 3 ([SS24])**.**

(1) $3 \leq n \leq 23$ のとき，アルキメデスの n 角柱には，重なりを持つ辺展開図が存在しない．

(2) $n \geq 24$ のとき，アルキメデスの n 角柱は，特定の方法で辺展開すると重なりを持つ．

角柱について，Schlickenrieder は修士論文の中で，図 5，6 に示す重なりを持つ辺展開図を描画した．この描画において，正 n 角形の一辺の長さを 1 のとすると，以下の観察が得られる．

観察 4 ([Sch89])**.** 高さが 15 の正 12 角柱と，高さ 0.2 の正 15 角柱は，特定の方法で辺展開すると重なりを持つ．

アルキメデスの n 角柱は，高さ 1 の場合の正角柱と言える．一方で，定理 3 より高さ 1 の正 12 角柱および 正 15 角柱は，どのように辺展開しても重なりを持たない．ゆえに，n の値を固定した場合，高さの値に応じて，特定の展開方法で辺展開する重なりを持つもの／どのように辺展開図しても重なりを持たないもののいずれかに分類できることが言える．この点に着目し，塩田は次の問題を提起した[1]．

問題 5. 一辺の長さが 1 の正 n 角形を底面とする，高さが h $(\in \mathbb{R}^+)$ の正 n 角柱を考える．正 n 角柱が，特定の展開方法で辺展開する重なりを持つ／どのように辺展開図しても重なりを持たないとき，n および h の値はいくつか？

[1] この問題は，The 35th Canadian Conference on Computational Geometry の open problems の紹介セッションの中で塩田が提示した問題であり，`https://wadscccg2023.encs.concordia.ca/assets/pdf/cccg_open_problems.pdf` の問題 6 に掲載されている．

本稿では，この問題に対する下記の三つの部分的な結果を示す．

定理 6. $3 \leq n \leq 10$ のとき，正 n 角柱は h の値に依らず，どのように辺展開しても重なりを持たない．

定理 7. $11 \leq n \leq 28$ のとき，以下の条件を満たす正 n 角柱は，特定の方法で辺展開すると重なりを持つ．

- $n = 11$ かつ $h \geq \dfrac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)}$
- $12 \leq n \leq 28$ かつ $h \geq \dfrac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)}$
- $h \leq \dfrac{\sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right)}$

定理 8. $n \geq 29$ のとき，正 n 角柱は h の値に依らず，特定の方法で辺展開すると重なりを持つ．

定理 6 については，正 3 角柱はどのように辺展開しても重なりを持たないという [DiB90] に基づく結果および，正 4 角柱（= 直方体）はどのように辺展開しても重なりを持たないという結果を含む．また，図 7 に，n と h の値に対して，辺展開図が重なりを持つか／持たないかを，定理 3，6，7，8 に基づきプロットした結果を示す．

2　準備

2.1　グラフ

グラフ G において，頂点の集合を V，辺の集合を $E \subseteq V \times V$ とするとき，$G = (V, E)$ と表す．$v_i \neq v_j$ ($v_i,\ v_j \in V,\ 1 \leq i \neq j \leq k$) かつ，連続する二つの頂点が隣接するとき，頂点列 $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ を**パス**といい，グラフ G において任意の二つの頂点間にパスが存在するとき，G は**連結**という．連結なグラフ $T = (V_T, E_T)$ において，$|E_T| = |V_T| - 1$ のとき，グラフを**木**という．また，$V_T = V$ かつ $E_T \subseteq E$ であるとき，T をグラフ G の**全域木**という．グラフ G の頂点集合 $V' \subseteq V$ に対し，$G[V'] = (V', \{\{p, q\} \mid p, q \in V' \text{ and } \{p, q\} \in E\})$ であるとき，$G[V']$ を G の V' による**誘導部分グラフ**という．

2.2　正角柱

少なくとも四つの**面**と呼ばれる多角形が辺でつながって構成される三次元の物体を**多面体**という．多面体における全ての二面角が π 未満であるとき，**凸多面体**という．n **角柱**とは，互いに向き合っている二つの合同な n 角形（**底面**とよぶ）と，二つの底面の対応する辺を結ぶ n 個の平行四辺形（**側面**とよぶ）から構成される多面体である．n 角柱のうち，底面が正 n 角形，側面が長方形であるものを，**正** n **角柱**という．また，正 n 角柱のうち，側面が正方形であるものを，**アルキメデスの** n **角柱**という．

2.3　辺展開図

多面体 Q を考える．Q の**展開図**（一般展開図とも言う）とは，Q の辺や面上の切断線に沿って切り開くことで形成される平面多角形である．特に，切断線を Q の辺のみに制限したときに形成される展開図を**辺展開図**という．Q において，二つの面が共通の辺を持っているとき，その二つの面は**隣接している**という．V_Q を Q の面の集合，E_Q を Q の隣接する二つの面を結ぶ辺の集合とする，このとき，Q はグラフ $G_Q = (V_Q, E_Q)$ として見ることができる．ここで，Q の辺展開図について以下の補題が成り立つ．

補題 9 (例えば [DO07] を参照)**.** Q を辺展開して辺展開図 U を得るとき，$E_U (\subset E_Q)$ を切断されない辺の集合とする．このとき，E_U は G_Q の全域木 $T(G_Q)$ を形成する．

この補題は，Q の辺展開図が，G_Q における全域木と一対一対応となっていることを意味する．任意の $T(G_Q)$ に対して，連結な誘導部分グラフに対応する面は，辺展開図 U の部分的な構造として見ることができる．この構造を**部分辺展開図**とよぶ．なお，以降では，辺展開図のみを扱うため，単に**部分展開図**と呼

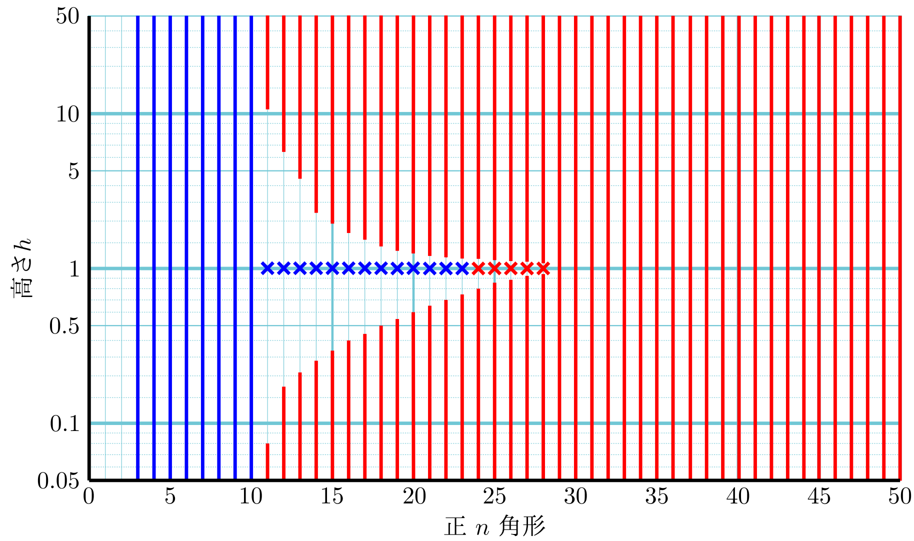


図 7: 高さ h の正 n 角柱に対して，辺展開図が重なりを持つか／持たないかをプロットした結果．青色の線分およびバツ印は，どのように辺展開しても重なりを持たないことを表す．赤色の線分およびバツ印は，特定の方法で辺展開すると重なりを持つことを表す．バツ印は特定の一点を指し示し，同じ色の線分上の点は，重なりを持つ／持たないを表す．$h \leq 0.05$ および $h \geq 50$ については，$n \leq 10$ では，青色の線分が上下に続き，$n \geq 11$ では赤色の線分が上下に続く．$n \geq 51$ においては，赤色の線が続く．$11 \leq n \leq 28$ における，プロットの無い部分は未解決．

ぶ．任意の二面に対応する頂点 $m, n \in V_Q$ を考える．いま，G_Q における，頂点 m から n への単純パスを $P = \langle m = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = n \rangle$ とするとき，パス P に含まれる面の集合は $F_P = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ となる．F_P から構成される部分展開図を**パス状の部分展開図**とよぶ．

2.4 重なりを持つ辺展開図

異なる 2 つの多角形が，それぞれが少なくとも 1 つの点 p を共有するとき，2 つの多角形は**重なる**という．注意として，本稿では多角形の境界上の点も多角形に含まれるものとする．つまり，多角形が境界線どうしで接触しているときも含めて重なるという．**重なりを持つ辺展開図**とは，ある多面体を辺展開したとき，異なる 2 つの面が重なるものをいう．

多面体 Q に対して，Q の辺展開図に重なりがあるかを判定する効率的なアルゴリズムとして**回転展開**がある [SS24]．このアルゴリズムは，以下の補題に基づき開発されたアルゴリズムである．

補題 10 ([DDRW20, Hir15])**.** 辺展開図 U を多面体 Q における重なりを持つ辺展開図，$T(G_Q)$ を U に対応する G_Q 上の全域木とする．もし，$T(G_Q)$ の二つの頂点 m, n が U の重なり合っている面に対応する場合，m から n への $T(G_Q)$ 上のパスは，U の連続する面の順序を表す．

この補題に基づき，回転展開は次の二つのステップから構成される（詳しくは [SS24] を参照されたし）．

Step 1. 多面体 Q の任意の二面に対応する頂点 $m, n \in V_Q$ に対して，m から n へのパスを列挙する．つまり，Q におけるパス状の部分展開図を列挙する．

Step 2. 列挙されたそれぞれのパス状の部分展開図に対して，両端に位置する面どうしが重なりを持つかを確認する．

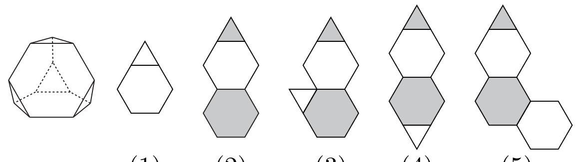


図 8: 切頂四面体（左）と，列挙された部分展開図の一部．(3)〜(5) における灰色の面の組は，(2) で重なりが無いかを判定するため，考える必要がない．

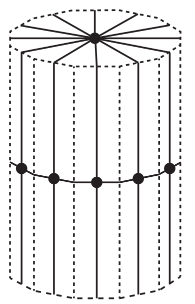


図 9: 正角柱のグラフ表現．点線は，元の正 n 角柱の辺を表す．

回転展開のポイントの一つとして，**Step 2** で両端に位置する面どうしの重なりのみを確認すれば良い点がある．これは，両端以外の面の組 $m', n' \in V_Q$ は，m', n' をパスの両端点とするパス状の部分展開図によって，重なりを持つ／持たないが確認されるからである（例を図 8 に示す）．

3　正角柱の辺展開図の重なり

3.1　パス状の部分展開図の分類

正 n 角柱 P_n に対して，面の集合を V_P，隣接する二つの面を結ぶ辺の集合を E_P とするとき，P_n は図 9 に示すようなグラフ $G_P = (V_P, E_P)$ として表すことができる．ここで，上面および底面に該当する頂点をそれぞれ f_T，f_B，側面に該当する頂点を f_i $(0 \leq i \leq (n-1))$，$f_n = f_0$ とするとき，$V_P = \{f_T, f_B, f_0 \ldots f_{n-1}\}$ となる．

いま，正 n 角柱におけるパス状の部分展開図を考えるとき，以下の補題が成り立つ．

補題 11. 正 n 角柱のパス状の部分展開図は，以下の七種類のいずれかのパターンによって表すことができる．(各パターンにおけるパス状の部分展開図の例を図 *10* に示す)

- $P_1 = \langle f_T \rangle$
- $P_2 = \langle f_T, f_i, \ldots, f_{i+p} \rangle$
- $P_3 = \langle f_T, f_i, \ldots, f_{i+p}, f_B \rangle$
- $P_4 = \langle f_T, f_i, \ldots, f_{i+p}, f_B, f_j, \ldots, f_{j+q} \rangle$
- $P_5 = \langle f_i, \ldots, f_{i+p} \rangle$
- $P_6 = \langle f_i, \ldots, f_{i+p}, f_T, f_j, \ldots, f_{j+q} \rangle$
- $P_7 = \langle f_i, \ldots, f_{i+p}, f_T, f_j, \ldots, f_{j+q}, f_B, f_k, \ldots, f_{k+r} \rangle$

ここで，f_T と f_B は一般性を失うことなく入れ替えてよい．また $(x, y) = \{(i, p), (j, q), (k, r)\}$ とするとき，$\langle f_x, \ldots, f_{x+y} \rangle$ は，側面の連続する列からなる長方形状の面を表す．さらに，全ての $X, Y \in \{\{f_i \ldots f_{i+p}\}, \{f_j \ldots f_{j+q}\}, \{f_k \ldots f_{k+r}\}\}$ に対して，$X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$ という関係が成り立つ．

証明. 正角柱の上面および底面を「フタ」，連続する側面からなる長方形状の面を「帯」と呼ぶ．また，異なる「フタ」および「帯」を区別するために，一般性を失うことなく「フタ」を「フタ１」「フタ２」とし,「帯」を「帯１」「帯２」… と呼ぶ.

まず，パス状の部分展開図の端点が「フタ１」である場合から考える（これは，P_1 のパターンに該当する）．端点が「フタ１」の場合，隣接する面は「帯１」である．これは，パターン P_2 に該当する．次に「フタ１」⇒「帯１」に隣接する面を考える．いま,「フタ１」⇒「帯１」⇒「帯２」となると，これは P_2 における「帯１」の部分の長さを変更する（伸ばす）操作に対応する．よって「フタ１」⇒「帯１」の次に隣接する面は「フタ２」である．これは，パターン P_3 に該当する．さらに,「フタ１」⇒「帯１」⇒「フタ２」に隣接する面は,「帯１」として使われ

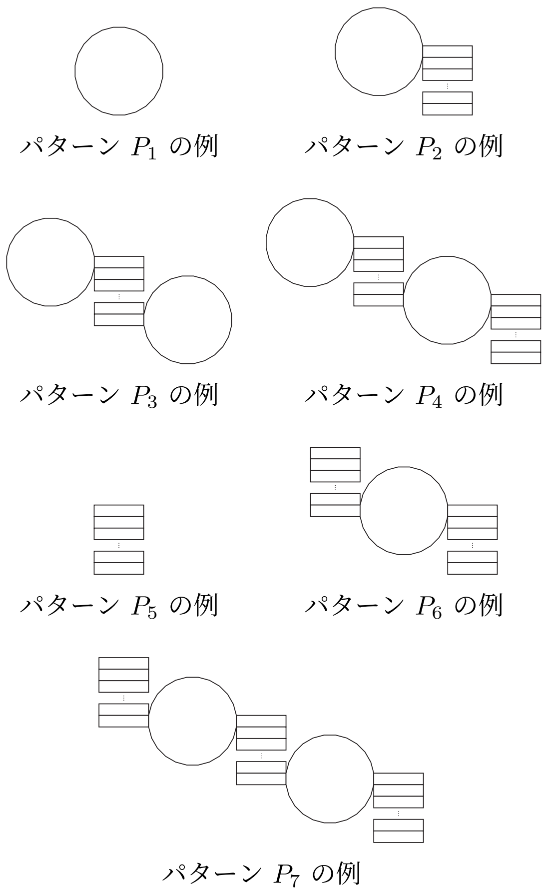


図 10: 正 n 角柱に対するパス状の部分展開図.

ていない側面からなる「帯 2」である．これは，パターン P_4 に該当する.「フタ 1」⇒「帯 1」⇒「フタ 2」⇒「帯 2」に隣接する面を考えるとき,「フタ」は二回使っているため，これ以上つなげることはできない．よって,「フタ」を端点とするパス状の部分展開図は，以上の四種類となる．

次に，パス状の部分展開図の端点が「帯 1」である場合から考える（これは，P_5 のパターンに該当する）．端点が「帯 1」の場合，隣接する面は「フタ 1」となるこれは，パターン P_2 と同じ形となる.「帯 1」⇒「フタ 1」に隣接する面は,「帯 1」として使われていない側面からなる「帯 2」である．これは，パターン P_6 に該当する.「帯 1」⇒「フタ 1」⇒「帯 2」に隣接する面は,「フタ 2」であるが，これは P_4 と同じ形となる．さらに,「帯 1」⇒「フタ 1」⇒「帯 2」⇒「フタ 2」に隣接する面は,「帯 1」および「帯 2」として使われていない側面からなる「帯 3」である．これは，P_7 に該当する.「帯 1」⇒「フタ 1」⇒「帯 2」⇒「フタ 2」⇒「帯 3」に隣接する面を考えるとき,「フタ」は二回使っているため，これ以上つなげることはできない．よって,「帯」を端点とするパス状の部分展開図は，以上の三種類となる． □

また，パス状の部分展開図について，以下の補題が成り立つ．

補題 12. パス状の部分展開図において重なりがある／重なりがないを確認するとき，連続する側面からなる長方形状の面は，一つの長方形として見做してよい．

証明. 側面 f_i を端点とするパス状の部分展開図が，面 $f(\neq f_i)$ と重なっているものとする．ここで，側面 f_i を含む，連続する側面からなる長方形状の面を F_i とするとき，F_i と f は明らかに重なりを持つ．よって，連続する側面からなる長方形状の面を，単純な長方形の面と見做しても，部分展開図が重なりを持つかを確認する操作に影響はない． □

以上より，図 10 のパス状の部分辺展開図は，図 11 のように描くことができる．

3.2 パターン別に見るパス状の部分展開図の重なり

3.1 節では，正 n 角柱におけるパス状の部分展開図は，パターン P_1 ～ P_7 の七種類のいずれかで表せることを示した．いま，パス状の部分展開図における重なりを考えるとき，パターン P_1，P_2，P_3 および P_5 については，明らかに重なりを持たないが，P_4，P_6，P_7 については図を見るだけでは分からない．本節では，まずパターン P_6 のパス状の部分展開図が，重なりを持たないことの概略を示した後，P_4 および P_7 の部分展開図が，特定の n および高さ h に対して重なりを持つことを示す．

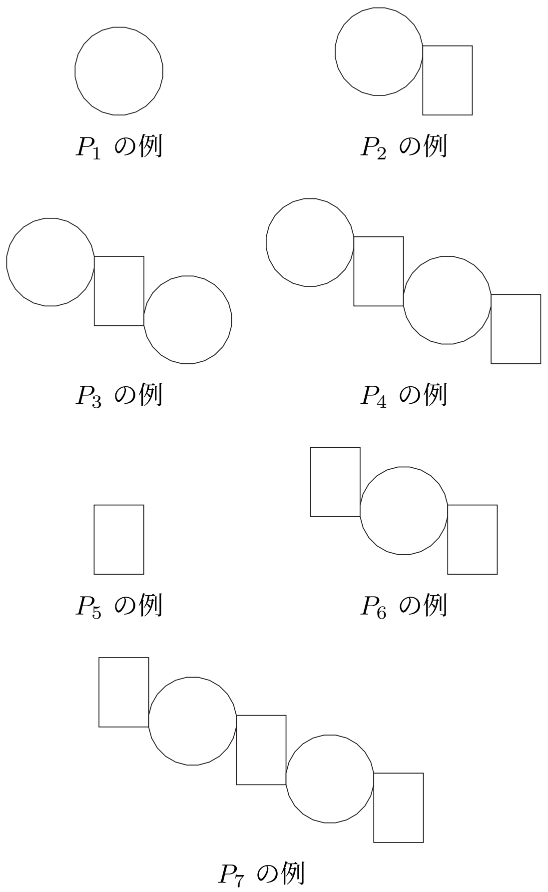


図 11: 図 10 に対して，連続する側面からなる長方形状の面を，単純な長方形の面として表したパス状の部分展開図.

3.2.1　パターン P_6 の部分展開図が重なりを持たないことの概略

本節では，P_6 のパターンに対して，両端に位置する面どうしが交差しないことを概略的に説明する．まず，P_6 のパターンのパス状の部分展開図は，対称性を考えることで図 12 のように二つのタイプに分類できる．次に，図 13 に示すような状況を考える．いま，頂点 P と Q を半径 r の円周上の点，$\angle POQ$ を θ とする．$\angle P'QO$ は直角であり，線分 $P'Q$ の長さは，弧 $\overset{\frown}{PQ}$ の長さと等しい．このとき，点 P' について以下の補題が成り立つ.

補題 13. θ の範囲が，$0 \leq \theta \leq \pi$ であるとき，P' の y 座標の値は常に 0 以上となる.

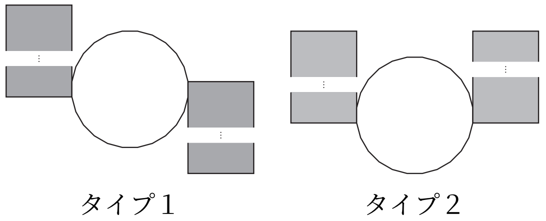


図 12: パターン P_6 におけるバリエーション.

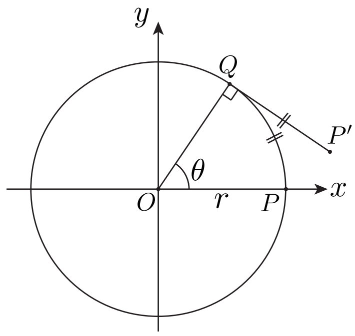


図 13: $0 \leq \theta \leq \pi$ としたときの，円弧 PQ と，線分 $P'Q$ の関係

証明. まず，点 P' の座標を計算する．点 Q は円周上に存在するため，Q の座標は，$(\cos\theta, \sin\theta)$ である．ゆえに，ベクトル $\mathbf{OQ} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ となる．次に，ベクトル $\mathbf{QP'}$ を求める．ベクトル $\mathbf{OQ}$ および，ベクトル $\mathbf{QP'}$ は直交しているため，$\mathbf{QP'}$ 方向の単位ベクトル $\mathbf{v}$ は，$\mathbf{v} = (\sin\theta, -\cos\theta)$ と書くことができる．一方，弧 $\overset{\frown}{PQ}$ の長さは $r\theta$ であるため，線分 QP' の長さも $r\theta$ である．ゆえに，ベクトル $\mathbf{OP'}$ は以下のようになる.

$$\mathbf{OP'} = \mathbf{OQ} + r\theta \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} + r\theta \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} r(\cos\theta + \theta\sin\theta) \\ r(\sin\theta - \theta\cos\theta) \end{pmatrix}$$

いま，r は常に正であるため，$f(\theta) = \sin\theta - \theta\cos\theta$ が，$0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で常に正であることを示す．ここで，$f(\theta)$ の導関数 $f'(\theta)$ を計算すると，以下の

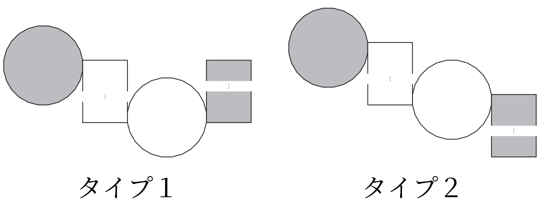


図 14: パターン P_4 におけるバリエーション

ようになる．

$$\frac{\theta}{d\theta}(\sin\theta - \theta\cos\theta) = \theta\sin\theta$$

$\theta\sin\theta$ は，$0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で常に正であるため，$f(\theta)$ は単調増加関数であることが言える．また，$f(0) = 0$ であるため，$f(\theta) \leq 0$ が常に成り立つ． □

以降は，補題 13 および，円周上の任意の二点 A, B について，円弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さが，円の弦の長さ AB より長いことを用いることで，タイプ 1 およびタイプ 2 において両端点に位置する長方形が，いずれも交差しないことを示すことができる．(場合分けが非常に多いため，本稿では省略する．)

3.2.2 P_4 のパターンにおけるパス状の部分展開図の重なり

本節では，P_4 のパターンが，特定の n および高さ h に対して重なりを持つことを示すために，各面の名称や辺の長さなど，各種パラメータを定義する．まず，P_4 のパス状の部分展開図は，対称性を考えることで図 12 のように二つのタイプに分類できる．いま，P_4 のパス状の部分展開図は，一般性を失うことなく，底面 ⇒ 側面 ⇒ 上面 ⇒ 側面からなっている．ここで，各面の名称および，辺の長さなどの各種パラメータを以下のように定義する．

- 面 B_1：底面に該当する面
- 面 B_2：上面に該当する面
- 面 A：底面と上面の間にある側面からなる長方形
- 面 C_2：B_2 と隣接している長方形のうち A ではない長方形

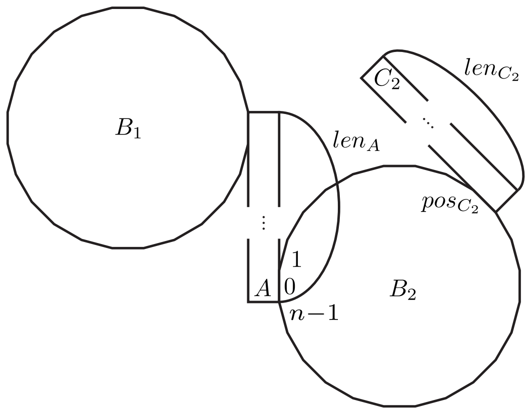


図 15: パターン P_4 のタイプ 1 におけるパス状部分展開図に対し，面の名称と各種パラメータを示した図．

- len_a：長方形 A における，高さ h ではない方の長さ
- pos_{C_2}：A と B_2 が共有している辺を 0 とし，時計回りに数えたときの，B_2 と C_2 が共有している辺の番号
- len_{C_2}：長方形 C_2 における，高さ h ではない方の長さ

これらのパラメータを用いることで，パターン P_4 におけるバリエーション，タイプ 1 であるタイプ 2 は，それぞれ 図 15，図 16 のように書くことができる． また，各タイプの部分展開図に対して，n，h および各種パラメータの値を指定すると，それぞれ図 17，18 のように重なりを持つパス状の部分展開図となる．

3.2.3 P_7 のパターンにおけるパス状の部分展開図の重なり

本節では，P_7 のパターンが，特定の n および高さ h に対して重なりを持つことを示すために，各面の名称や辺の長さなど，各種パラメータを定義する．まず，P_7 のパス状の部分展開図は，対称性を考えることで図 19 のように四つのタイプに分類できる．いま，P_7 のパス状の部分展開図は，一般性を失うこと

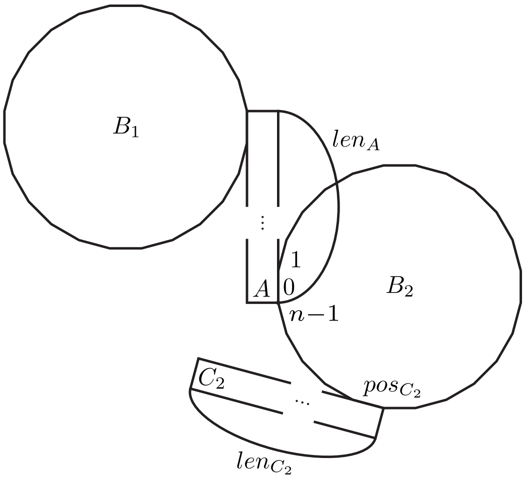


図 16: パターン P_4 のタイプ 2 におけるパス状部分展開図に対し，面の名称と各種パラメータを示した図.

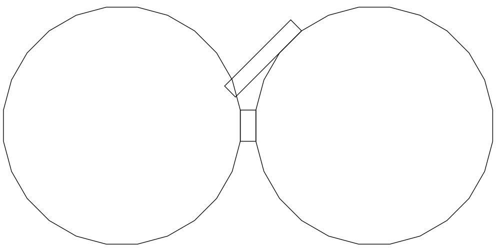


図 17: パターン P_4 のタイプ 1 における重なりを持つ部分展開図の例.（$n = 24$, $h = 0.5$, $len_a = 1$, $pos_{C_2} = 3$ ）

なく，側面 ⇒ 底面 ⇒ 側面 ⇒ 上面 ⇒ 側面からなっている．ここで，各面の名称および，辺の長さなどの各種パラメータを以下のように定義する．

- 面 B_1：底面に該当する面
- 面 B_2：上面に該当する面
- 面 A：底面と上面の間にある側面からなる長方形
- 面 C_1：B_1 と隣接している長方形のうち A ではない長方形
- 面 C_2：B_2 と隣接している長方形のうち A ではない長方形
- len_a：長方形 A における，高さ h ではない方の長さ
- pos_{C_1}：A と B_1 が共有している辺を 0 とし，時計回りに数えたときの，B_1 と C_1 が共有している辺の番号
- len_{C_1}：長方形 C_1 における，高さ h ではない方の長さ
- pos_{C_2}：A と B_2 が共有している辺を 0 とし，時計回りに数えたときの，B_2 と C_2 が共有している辺の番号

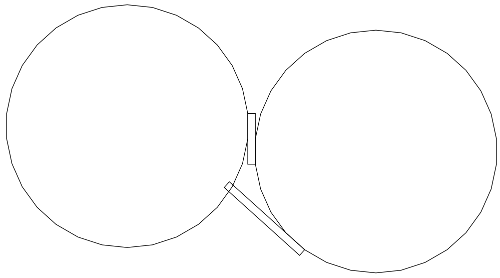


図 18: パターン P_4 のタイプ 2 における重なりを持つ部分展開図の例.（$n = 30$, $h = 0.3$, $len_a = 2$, $pos_{C_2} = 26$）

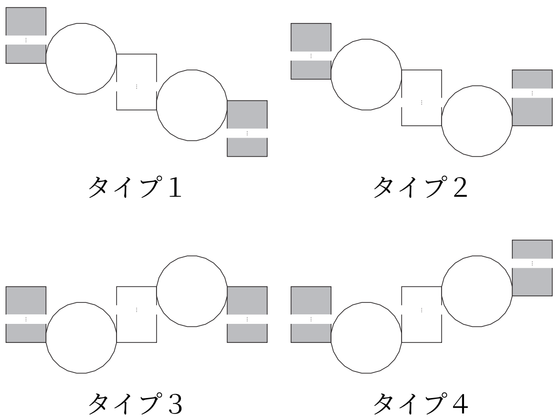


図 19: P_7 におけるバリエーション

これらのパラメータを用いることで，パターン P_4 におけるバリエーション，タイプ 1〜タイプ 4 は，それぞれ図 20〜図 23 のように書くことができる． また，各タイプの部分展開図に対して，n, h および各種パラメータの値を指定すると，それぞれ 図 24〜25

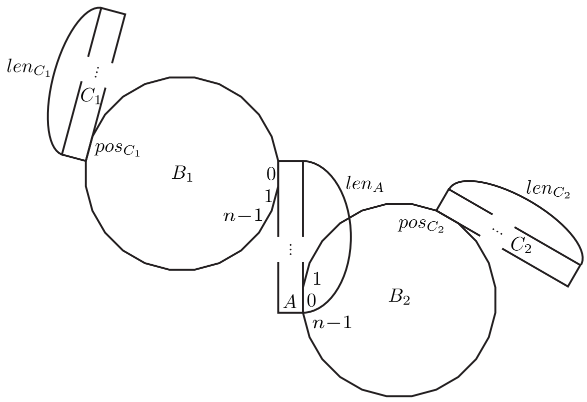


図 20: パターン P_7 のタイプ 1 におけるパス状部分展開図に対し，面の名称と各種パラメータを示した図.

のように重なりを持つパス状の部分展開図となる.

3.3 正 n 角柱 $(3 \leq n \leq 10)$ の辺展開図における重なり

本節では，$3 \leq n \leq 10$ のとき，正 n 角柱は h の値に依らず，どのように辺展開しても重なりを持たないこと（定理 6）を示す．いま，3.2 節での議論より，パス状の部分展開図が重なるには，P_4 もしくは P_7 のパターンを考えればよいことが言える．そこで，$3 \leq n \leq 10$ について，P_4 および P_7 に対して，全てのパラメータの組合せを試してパス状の部分展開図を取得し，任意の h に対して重なりを持たないことを示す方法を考えることができる．注意として，$n=3$ の場合は，[DiB90] の結果に基づき存在しないことが明らかであり，$n=4$ の場合は直方体となるため，こちらも重なりを持たないことは明らかであることから，以降は $5 \leq n \leq 10$ の場合を考えればよい．しかし，n の値が増えるほど，P_4 および P_7 におけるパラメータの組合せが増えるため，任意の h に対して，一つ一つに重なりがあるかを確認することは現実的ではない．そこで，以下の手順を用いることで，重なる可能性があるパス状の部分展開図のみを取得する．

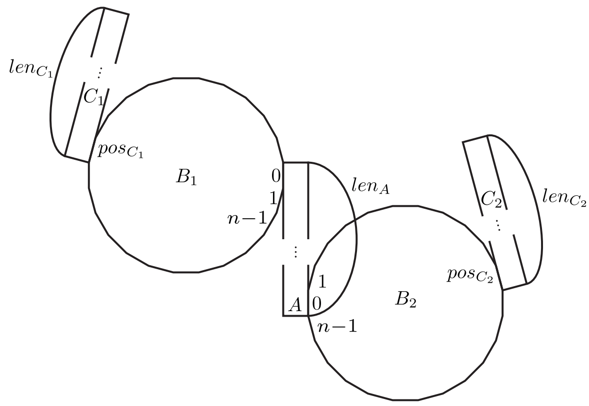


図 21: パターン P_7 のタイプ 2 におけるパス状部分展開図に対し，面の名称と各種パラメータを示した図.

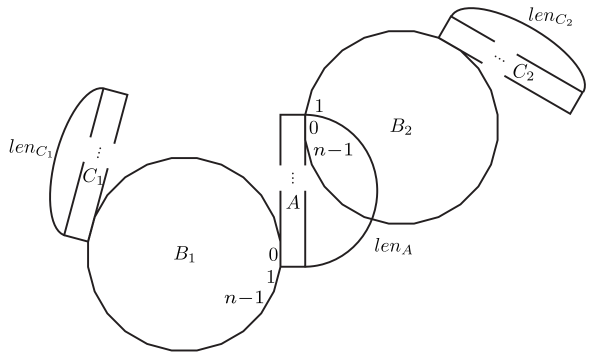


図 22: パターン P_7 のタイプ 3 におけるパス状部分展開図に対し，面の名称と各種パラメータを示した図.

Step. 1 パス状の部分展開図の両端に位置する面 S, T の座標を求め，それぞれに対して (x, y) 座標の最小値，最大値を求める.[2]

Step. 2 面 S の y 座標の範囲と， 面 T の y 座標の範囲を求める．もし，これらの範囲が重なっている箇所があれば **Step. 3** へ．重なっている箇所がなければ，両端に位置する面どうしが重なる可能性は無いため終了.

Step. 3 面 S の x 座標の最大値 $\max S$ と，面 T

[2]計算機実験では，Python の SymPy を用いて，シンボリック計算および小数点以下 100 桁の高精度計算を行った

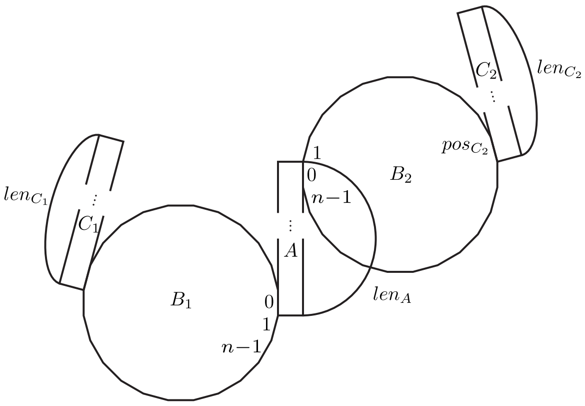


図 23: パターン P_7 のタイプ 4 におけるパス状部分展開図に対し，面の名称と各種パラメータを示した図.

の x 座標の最小値 $\min T$ の大小関係を比べる．もし，$\max S < \min T$ という関係が成り立っているならば，重なる可能性がある候補として出力する．成り立っていないなければ終了.

Step. 4 重なる可能性がある候補のうち，回転・反転することで一致するものを除去.

この操作を，$5 \leq n \leq 10$ に対して行うことで得られた，高さ h の値によっては重なるパス状の部分展開図を，図 28〜図 33 に示す.

また，これらの，高さ h の値によっては重なるパス状の部分展開図に対して解析的な計算をすることで，以下の補題が得られる.

補題 14. 図 *28*〜図 *33* に示すパス状の部分展開図は，任意の h に対して，いずれも重なりを持たない.

3.4 正 n 角柱 $(11 \leq n \leq 28)$ の辺展開図における重なり

本節では，P_4 および P_7 から構成される二つのパス状の部分展開図を用いることで，展開図が重なりを持つための h の条件を示す.

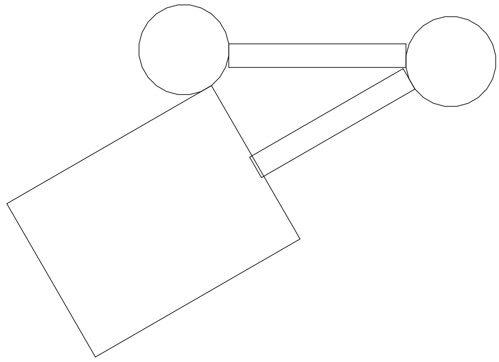


図 24: パターン P_7 のタイプ 1 における重なりを持つ部分展開図の例.（$n = 24$，$h = 15$，$len_a = 2$，$pos_{C_1} = 4$，$len_{C_1} = 20$，$pos_{C_2} = 22$）

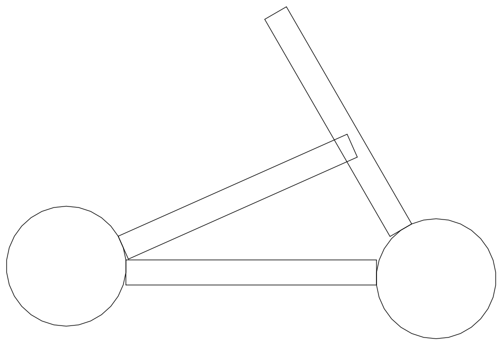


図 25: パターン P_7 のタイプ 2 における重なりを持つ部分展開図の例.（$n = 30$，$h = 20$，$len_a = 2$，$pos_{C_1} = 28$，$len_{C_1} = 2$，$pos_{C_2} = 5$）

3.4.1 P_4 のタイプ 1 を用いた h の条件の計算

図 34 に示す，重なりを持つパス状の部分展開図を考える．また，図 34 の重なりの部分を拡大したものを 図 35 に示す．いま，正 n 角形の一辺の長さを 1 とするとき，以下の補題が成り立つ.

補題 15. 以下の三つ条件が同時に成り立つとき，重なりが生じることが言える.

条件 1 点 A の x 座標が正

条件 2 点 B の x 座標が負

条件 3 点 C の y 座標の値が 0 以上 2 以下.

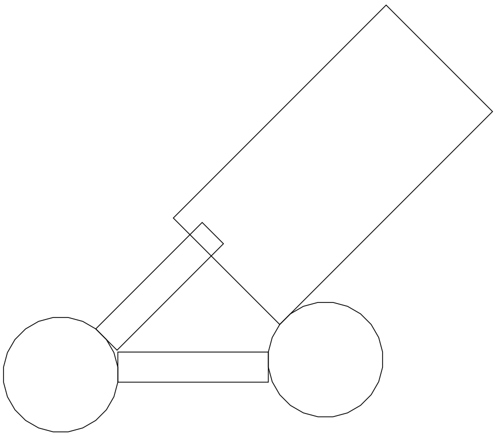


図 26: パターン P_7 のタイプ 3 における重なりを持つ部分展開図の例．（$n = 24$，$h = 10$，$len_a = 3$，$pos_{C_1} = 20$，$len_{C_1} = 2$，$pos_{C_2} = 3$）

この補題を示すために，A，B，C の座標をそれぞれ求めると，以下の補題が言える．

補題 16. 正 n 角形の外角を $\theta = 2\pi/n$ とする．点 A の座標は，$(h+\sin\theta-h\cos 2\theta, 1-\cos\theta-h\sin 2\theta)$ である．点 B の座標は，$(h + \sin\theta - h\cos 2\theta - \sin 3\theta, 1-\cos\theta-h\sin 2\theta + \cos 3\theta)$ である．点 C の座標は，$(0, \frac{\cos 3\theta(h+\sin\theta-h\cos 2\theta)+\sin 3\theta(1-\cos\theta-h\sin 2\theta)}{\sin 3\theta})$ である．

まず，条件 1 について考えると，以下の補題が言える．

補題 17. $h + \sin\theta - h\cos 2\theta$ は常に正である．

よって，条件 1 は h の値に依らず常に成り立つ．次に，条件 2 について考えると，次の補題が言える．

補題 18. $h+\sin\theta-h\cos 2\theta-\sin 3\theta$ は $h < \frac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta}$ のとき負となる．

さらに条件 3 について，次の補題が言える．

補題 19. $\frac{\cos 3\theta(h+\sin\theta-h\cos 2\theta)+\sin 3\theta(1-\cos\theta-h\sin 2\theta)}{\sin 3\theta}$ は，$h < \frac{\sin 3\theta-\sin 2\theta}{\cos\theta-\cos 3\theta}$ のとき 0 以上となる．また，h の値に依らず，常に 2 以下となる．

補題 15 より，パス状の部分展開図が重なりを持つには 3 つの条件を同時に満たす必要がある．いま，条件 2 より，$h < \frac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta}$，条件 3 より $h < \frac{\sin 3\theta-\sin 2\theta}{\cos\theta-\cos 3\theta}$ という条件が求まっている．しかし，$11 \leq n \leq 28$ の範囲においては，常に $\frac{\sin 3\theta-\sin 2\theta}{\cos\theta-\cos 3\theta}$ の方が常に小さくなる．ゆえに，パターン P_4 のタイプ 1 に対して，$h < \frac{\sin 3\theta-\sin 2\theta}{\cos\theta-\cos 3\theta}$ であれば，図 34 のパラメータを用いることで，必ず重なることが言える．

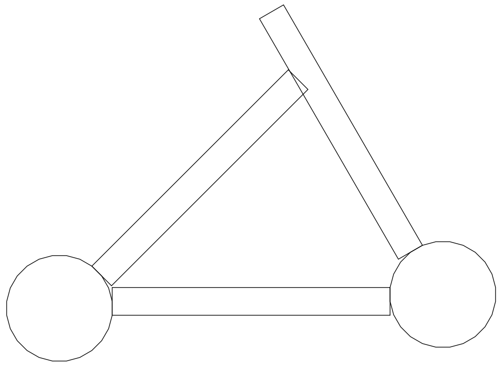
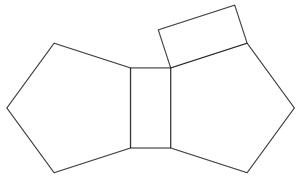


図 27: パターン P_7 のタイプ 4 における重なりを持つ部分展開図の例．（$n = 24$，$h = 20$，$len_a = 2$，$pos_{C_1} = 21$，$len_{C_1} = 2$，$pos_{C_2} = 4$）



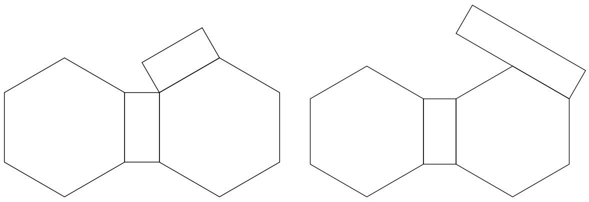
(1)

図 28: 正 5 角柱における，h の値により重なる可能性があるパス状の部分展開図

3.4.2 P_7 のタイプ 2 を用いた n と h の関係性の確認

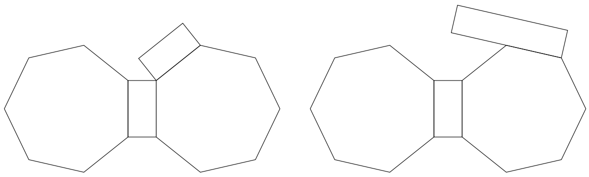
図 36 に示す，重なりを持つパス状の部分展開図を考える．また，図 36 の重なりの部分を拡大したものを 図 37 に示す．いま，正 n 角形の一辺の長さを 1 とするとき，以下の補題が成り立つ．

補題 20. 以下の三つ条件が同時に成り立つとき，重なりが生じることが言える．



(1) (2)

図 29: 正 6 角柱における，h の値により重なる可能性があるパス状の部分展開図



(1) (2)

図 30: 正 7 角柱における，h の値により重なる可能性があるパス状の部分展開図

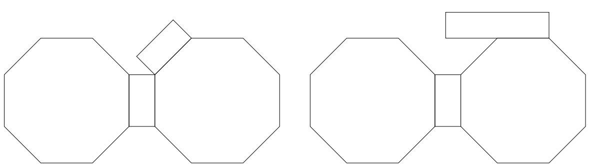
条件 1 点 A の y 座標が負

条件 2 点 B の y 座標が正

条件 3 点 C もしくは 点 D の x 座標の値が $-h$ 以上 0 以下.

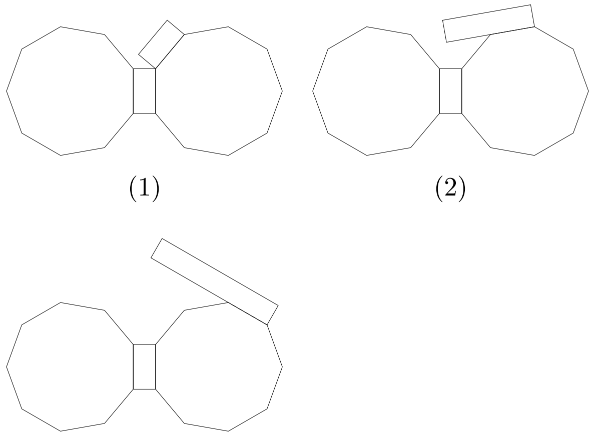
この補題を示すために，A，B，C，D の座標をそれぞれ求めると，以下の補題が言える.

補題 21. 正 n 角形の外角を $\theta = 2\pi/n$ とする．点 A の座標は，$(-h + h\cos\theta + \sin 2\theta, -1 - h\sin\theta + \cos 2\theta)$ である．点 B の座標は，$(-h + h\cos\theta + \sin 2\theta - h\cos 3\theta, -1 - h\sin\theta + \cos 2\theta + h\sin 3\theta)$ である．点 C の座標は，$(\frac{\cos 3\theta(-1-h\sin\theta+\cos 2\theta)-\sin 3\theta(h-h\cos\theta-h\sin 2\theta)}{\sin 3\theta}, 0)$ である．点 D の座標は，$(\frac{\cos 3\theta(-h\sin\theta+\cos 2\theta)-\sin 3\theta(h-h\cos\theta-h\sin 2\theta)}{\sin 3\theta}, -1)$ である.



(1) (2)

図 31: 正 8 角柱における，h の値により重なる可能性があるパス状の部分展開図



(1) (2)

(3)

図 32: 正 9 角柱における，h の値により重なる可能性があるパス状の部分展開図

まず，条件 1 について考えると，以下の補題が言える.

補題 22. $-1 - h\sin\theta + \cos 2\theta$ は常に負である.

よって，条件 1 は h の値に依らず常に成り立つ．次に，条件 2 について考えると，次の補題が言える.

補題 23. $-1 - h\sin\theta + \cos 2\theta + h\sin 3\theta$ は $h > \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 3\theta - \sin\theta}$ のとき正となる.

さらに条件 3 について，次の補題が言える.

補題 24. $\frac{\cos 3\theta(-1-h\sin\theta+\cos 2\theta)-\sin 3\theta(h-h\cos\theta-h\sin 2\theta)}{\sin 3\theta}$ は，$h > \frac{\cos\theta - \cos 3\theta}{\sin 3\theta - \sin 2\theta}$ のとき 0 以下となる．また，h の値に依らず，常に $-h$ 以上となる.
$\frac{\cos 3\theta(-h\sin\theta+\cos 2\theta)-\sin 3\theta(h-h\cos\theta-h\sin 2\theta)}{\sin 3\theta}$ は，$h > \frac{\cos\theta}{\sin 3\theta - \sin 2\theta}$ のとき 0 以下となる．また，h の値に依らず，常に $-h$ 以上となる.

補題 20 より，パス状の部分展開図が重なりを持つには 3 つの条件を同時に満たす必要がある．一

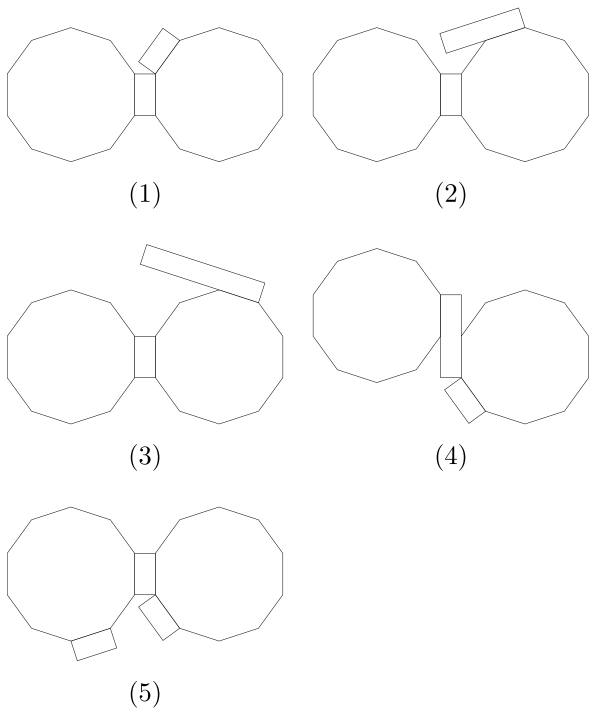


図 33: 正 10 角柱における，h の値により重なる可能性があるパス状の部分展開図

方で，条件 3 は，どちらかが成り立てば良いので，$\frac{\cos\theta-\cos 3\theta}{\sin 3\theta-\sin 2\theta}$ もしくは $\frac{\cos\theta}{\sin 3\theta-\sin 2\theta}$ の大小関係を比較すると，$n = 11$ のとき，$\frac{\cos\theta}{\sin 3\theta-\sin 2\theta}$ で小さく，$12 \leq n \leq 28$ では，$\frac{\cos\theta-\cos 3\theta}{\sin 3\theta-\sin 2\theta}$ の方が小さくなることが言える．また，条件 2 より，$h > \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 3\theta-\sin\theta}$ となるが，これは条件 3 で求めた h より，$11 \leq n \leq 28$ の範囲では値が小さくなる．ゆえに，パターン P_7 のタイプ 2 に対して，$n = 11$ のとき，$h > \frac{\cos\theta}{\sin 3\theta-\sin 2\theta}$，$12 \leq n \leq 28$ のとき，$h > \frac{\cos\theta-\cos 3\theta}{\sin 3\theta-\sin 2\theta}$ であれば，図 36 のパラメータを用いることで，必ず重なることが言える．

3.5 正 n 角柱 $(n \geq 29)$ の辺展開図の重なり

本節では，3.4 節で用いた二つの重なるパターンを用いて，$n \geq 29$ のとき，正 n 角柱は h の値に依らず，特定の方法で辺展開すると重なりを持つこと

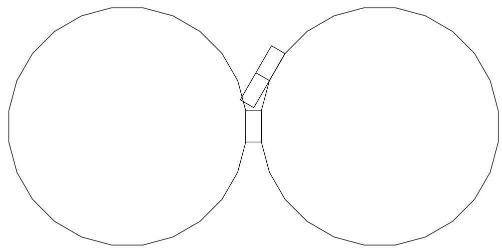


図 34: パターン P_4 のタイプ 1 における重なりを持つパス状の部分展開図.（$n = 24$，$h = 0.5$，$len_a = 1$，$pos_{C_2} = 2$）

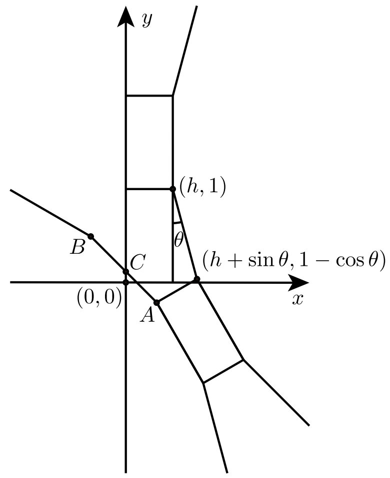


図 35: 図 34 の重なっている部分を拡大した図.

（定理 8）を示す．これは，次の二つの補題が成り立つことから，示すことができる．

補題 25. 補題 *15* の条件は，$n \geq 29$ かつ $0 < h \leq 1$ のとき常に成り立つ.

補題 26. 補題 *20* の条件は，$n \geq 29$ かつ $h \geq 1$ のとき常に成り立つ.

4 おわりに

本研究では，高さ h の正 n 角柱の辺展開図に対して，重なりを持つものがある／ないを示した．一般的な多面体であれば，部分辺展開図を列挙するのに指数時間を要してしまう．一方で，正角柱には上

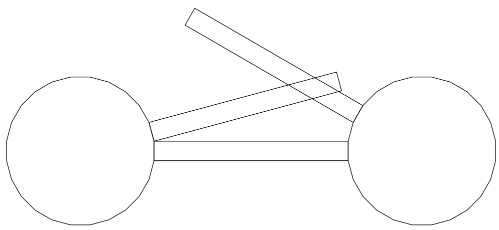


図 36: パターン P_7 のタイプ 2 における重なりを持つパス状の部分展開図.（$n = 24$, $h = 10$, $len_a = 1$, $pos_{C_1} = 23$, $len_{C_1} = 1$, $pos_{C_2} = 2$）

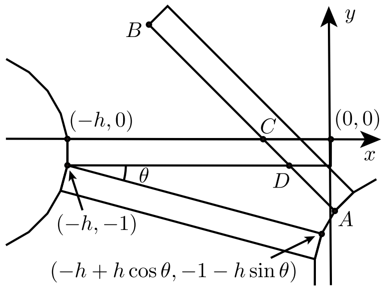


図 37: 図 36 の重なっている部分を拡大して回転した図.

面と底面は一度ずつしか現れないという点や，連続する側面は長方形として見てよいとすることで，分類分けをすることができ，高さ h という連続的なパラメータに対しても条件を得ることができた．今後の課題としては，$11 \leq n \leq 28$ の存在性が分かっていない部分を埋めることがある．また，図 38 に示すような正反角柱は，上面と底面は一度ずつしか現れないという特徴を同じく持つ．正反角柱に対しても，高さ h を変えたときに，辺展開図における重なりの有無がどのようになるかについても考えていきたい．この問題に取り組むことで，[KSU24] において定義された edge overlap-free な多面体（どのように辺展開しても重なりを持たない多面体）についてより深い理解が得られると考える．

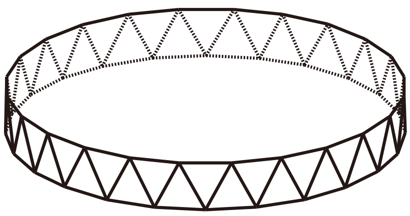


図 38: 正反角柱の例．上面と底面は正 n 角形，側面は全て三角形からなる.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 24KJ1816, 20K11673 および，文部科学省 科学研究費補助金 学術変革領域 (A) 社会変革の源泉となる革新的アルゴリズム基盤の創出と体系化 海外渡航支援の助成を受けたものです.

参考文献

[AM18] Jin Akiyama and Kiyoko Matsunaga. Only Isotetrahedra Can Be Stampers. *Mathematics Magazine*, 91(3):187–191, 2018.

[AO92] Boris Aronov and Joseph O'Rourke. Nonoverlap of the Star Unfolding. *Discrete Comput. Geom.*, 8:219–250, 1992.

[BDD+98] Therese C. Biedl, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Anna Lubiw, Mark H. Overmars, Joseph O'Rourke, Steve Robbins, and Sue Whitesides. Unfolding some classes of orthogonal polyhedra. In *10th Canadian Conference on Computational Geometry*, 1998.

[CFG91] Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, and Richard K. Guy. *Unsolved Problems in Geometry.* Springer-Verlag, reissue edition, 1991.

[DDRW20] Kristin DeSplinter, Satyan L. Devadoss, Jordan Readyhough, and Bryce Wimberly. Nets of higher-dimensional cubes. In *32nd Canadian Conference on Computational Geometry*, 2020.

[DiB90] Julie DiBase. Polytope Unfolding, 1990. Undergraduate thesis, Smith College. Faculty advisor: Joseph O'Rourke.

[DO07] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra.* Cambridge University Press, 2007.

[Dür25] Albrecht Dürer. Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in linien ebenen unnd gantzen corporen, 1525.

[Grü03] Branko Grünbaum. Are your polyhedra the same as my polyhedra? *Discrete and Computational Geometry*, 25:461–488, 2003.

[Hir15] Kenta Hirose. 半正多面体の展開図の重なりについて, 2015. 埼玉大学工学部情報システム工学科 卒業論文. 指導教員：堀山 貴史.

[HS11] Takashi Horiyama and Wataru Shoji. Edge unfoldings of platonic solids never overlap. In *23rd Canadian Conference on Computational Geometry*, 2011.

[HS13] Takashi Horiyama and Wataru Shoji. The number of different unfoldings of polyhedra. In *24th International Symposium on Algorithms and Computation*, volume 8283 of *LNCS*, pages 623–633. Springer, 2013.

[KSU24] Tonan Kamata, Takumi Shiota, and Ryuhei Uehara. A complete classification of the overlap-free polyhedra. In *The 8th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2024.

[NF93] Makoto Namiki and Komei Fukuda. Unfolding 3-dimensional convex polytopes, 1993. A package for Mathematica 1.2 or 2.0, Mathematica Notebook.

[Sch89] Catherine Anne Schevon. Algorithms for geodesics on convex polytopes, 1989. The Johns Hopkins University, Master's thesis.

[She75] G. C. Shephard. Convex polytopes with convex nets. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 78(3):389–403, 1975.

[SS86] Micha Sharir and Amir Schorr. On Shortest Paths in Polyhedral Spaces. *SIAM J. Comput.*, 15(1):193–215, 1986.

[SS24] Takumi Shiota and Toshiki Saitoh. Overlapping edge unfoldings for convex regular-faced polyhedra. *Theoretical Computer Science*, 1002:114593, 2024.