第38回折り紙の科学・数学・教育研究集会

Edge-Overlap-Freeness in Regular Prisms with a Continuous Parameter

塩田 拓海[*]　鎌田 斗南[†]　Jason S. Ku[‡]　上原 隆平[†]

[*]兵庫県立大学　[†]北陸先端科学技術大学院大学

[‡]National University of Singapore

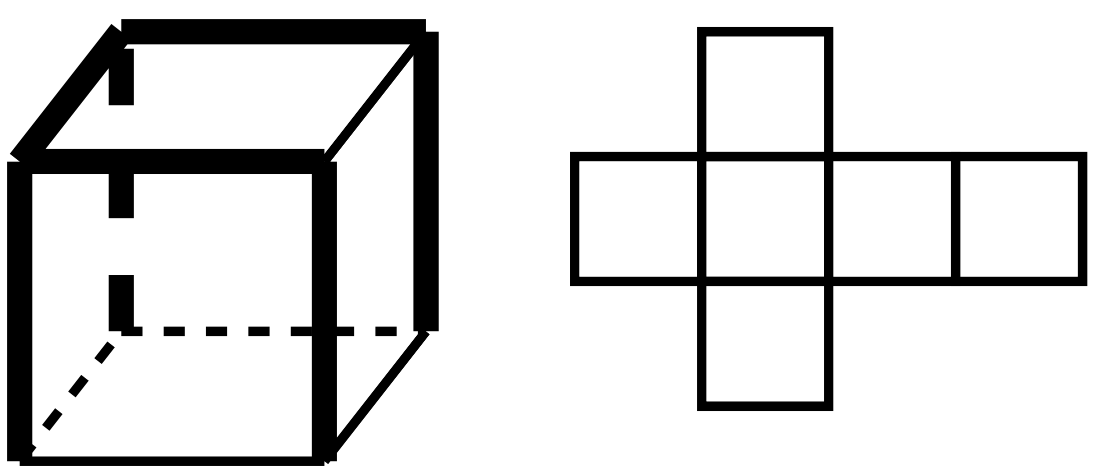
2025年6月29日（日） @北海道大学 工学部

辺展開図とは

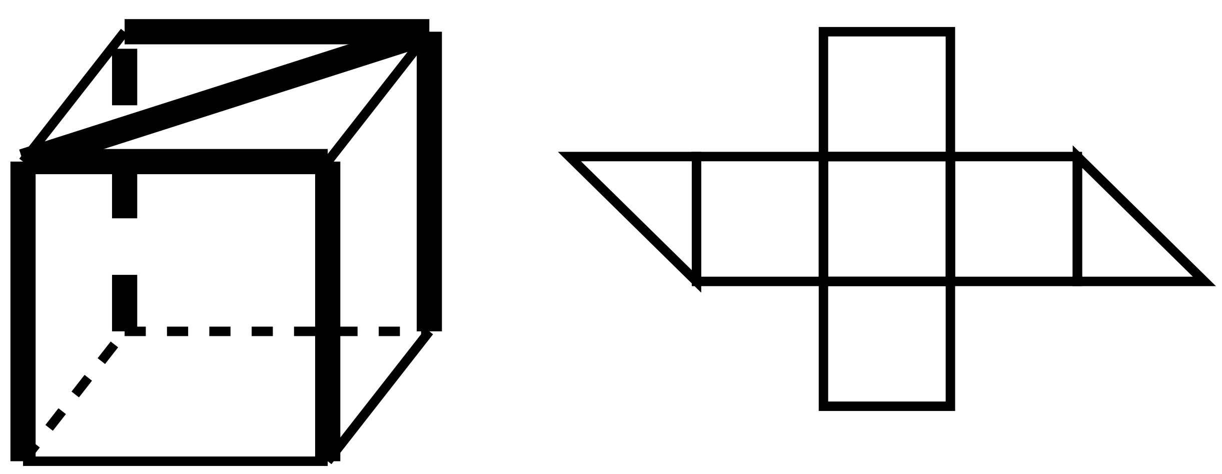
定義1 [E. D. Demaine and J. O'Rourke, 2007]

多面体の辺に切れ込み（切断線）を入れて，平坦に開いた多角形を辺展開図という.

各立方体を太線に沿って切ると…



(a) 辺展開図

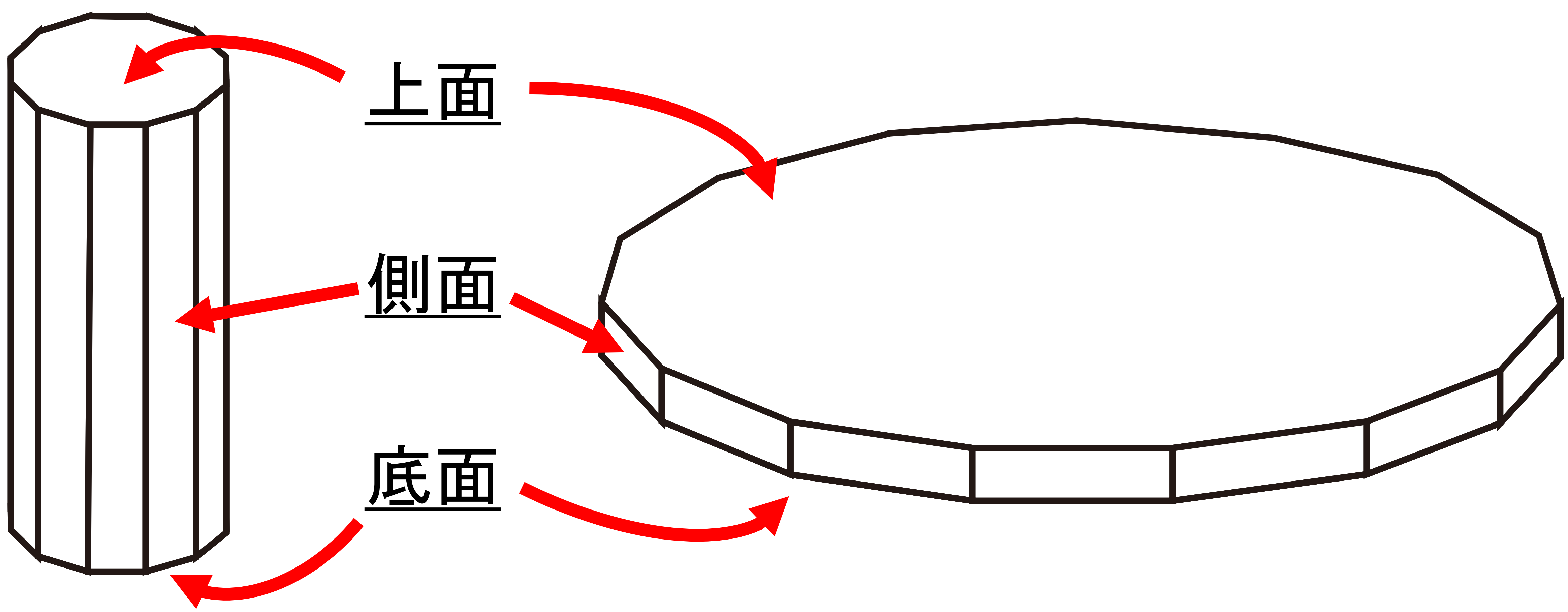


(b) 一般展開図

正角柱とは

定義２

互いに向き合っている二つの合同な正 n 角形（上面・底面）と，底面と上面の対応する辺を結ぶ n 個の長方形（側面）から構成される多面体を正 n 角柱という．

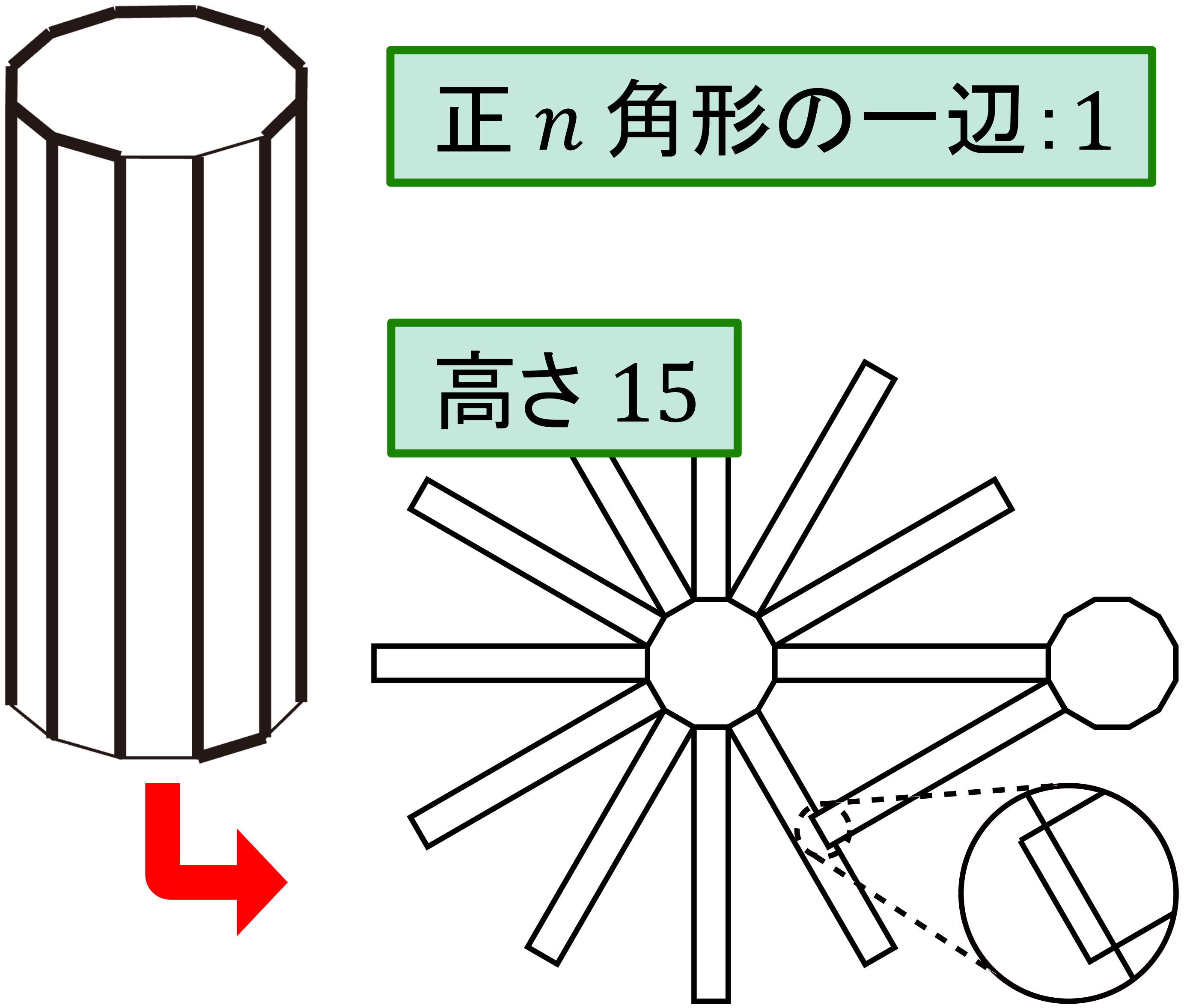


正 12 角柱　　　　正 15 角柱

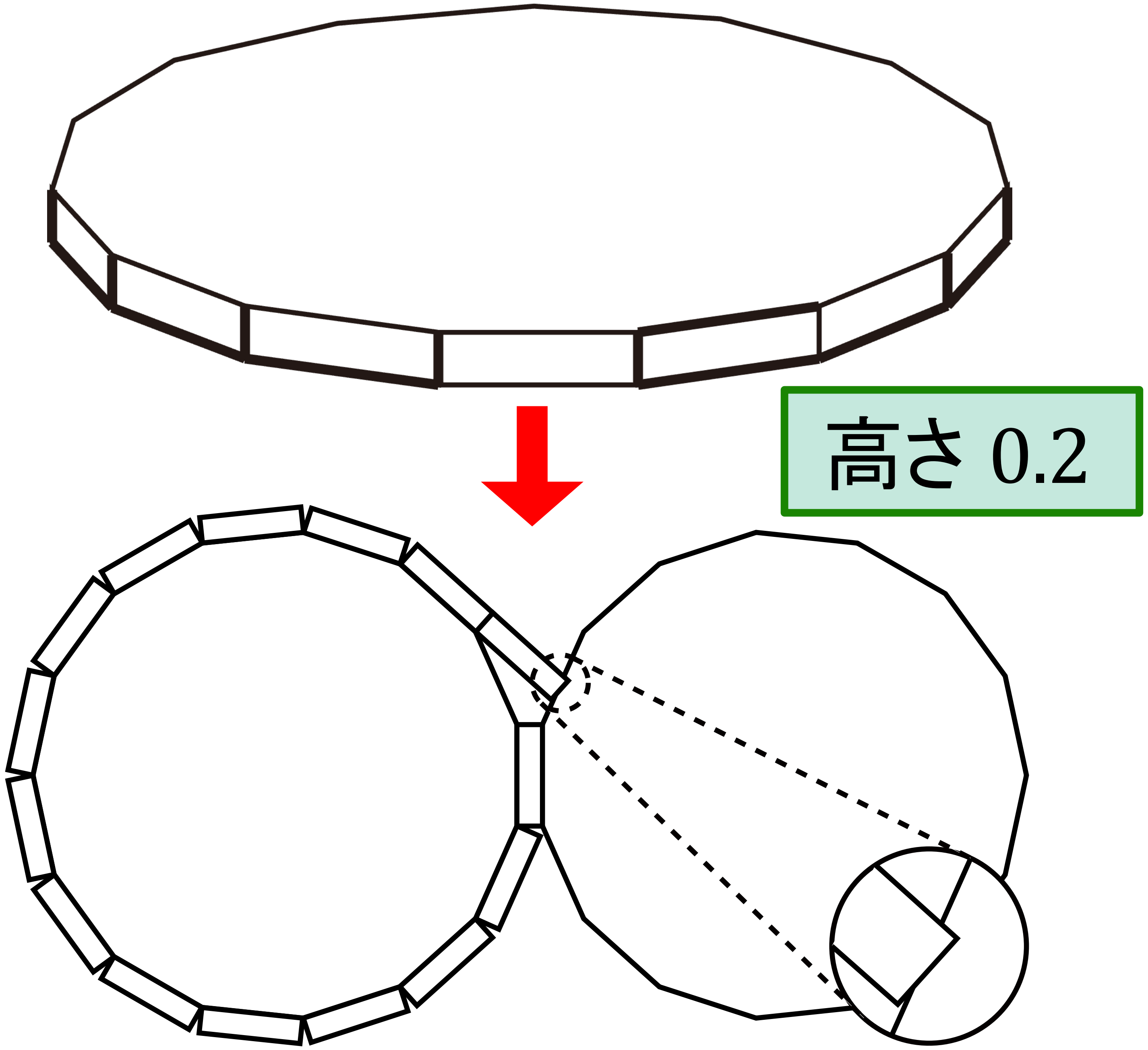
正角柱の重なりを持つ辺展開図

いくつかの正 n 角柱は，辺展開すると重なりを持つことがある

[Schlickenrieder, 1997]



正 12 角柱



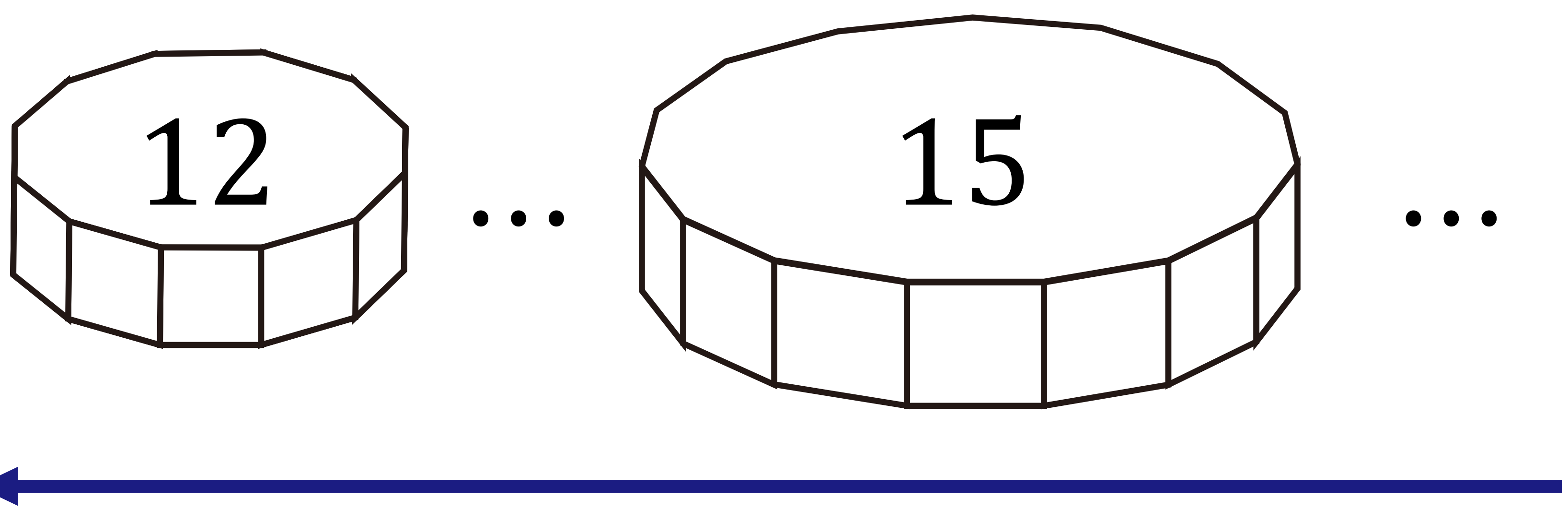
正 15 角柱

正角柱の重なりを持つ辺展開図

定理3 [T. Shiota and T. Saitoh, 2024]

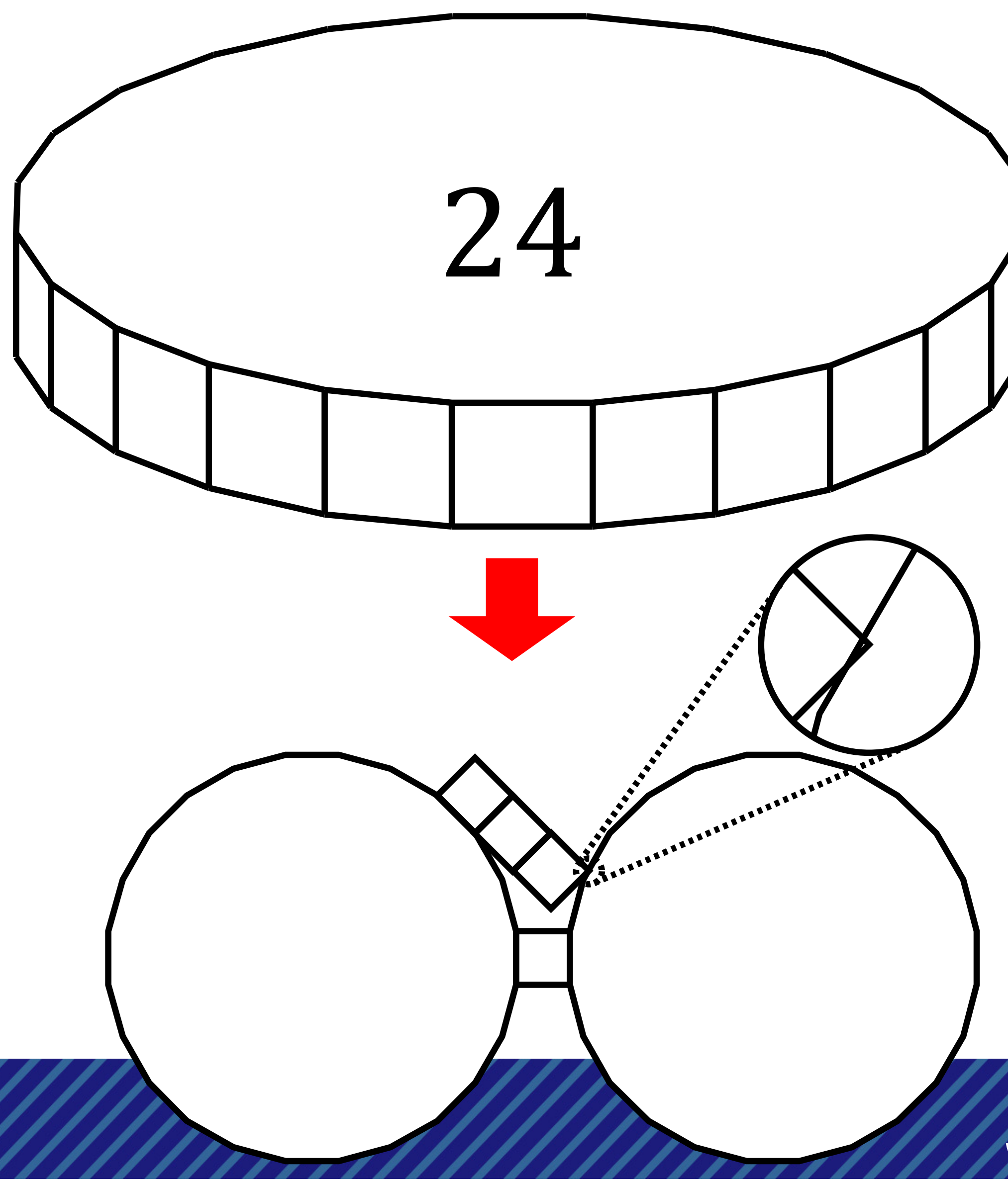
高さが 1 の正 n 角柱について，以下のことが成り立つ．

- 3 ≤ n ≤ 23 のとき，どのように辺展開しても重なりを持たない．
- n ≥ 24 のとき，特定の方法で辺展開すると重なりを持つ．



どのように辺展開しても重ならない

高さ 15 or 0.2 では重なるのになぜ？



正角柱の重なりを持つ辺展開図

定理3 [T. Shiota and T. Saitoh, 2024]

高さが 1 の正 n 角柱について，以下のことが成り立つ.
- $3 \leq n \leq 23$ のとき，どのように辺展開しても重なりを持たない.
- $n \geq 24$ のとき，特定の方法で辺展開すると重なりを持つ.

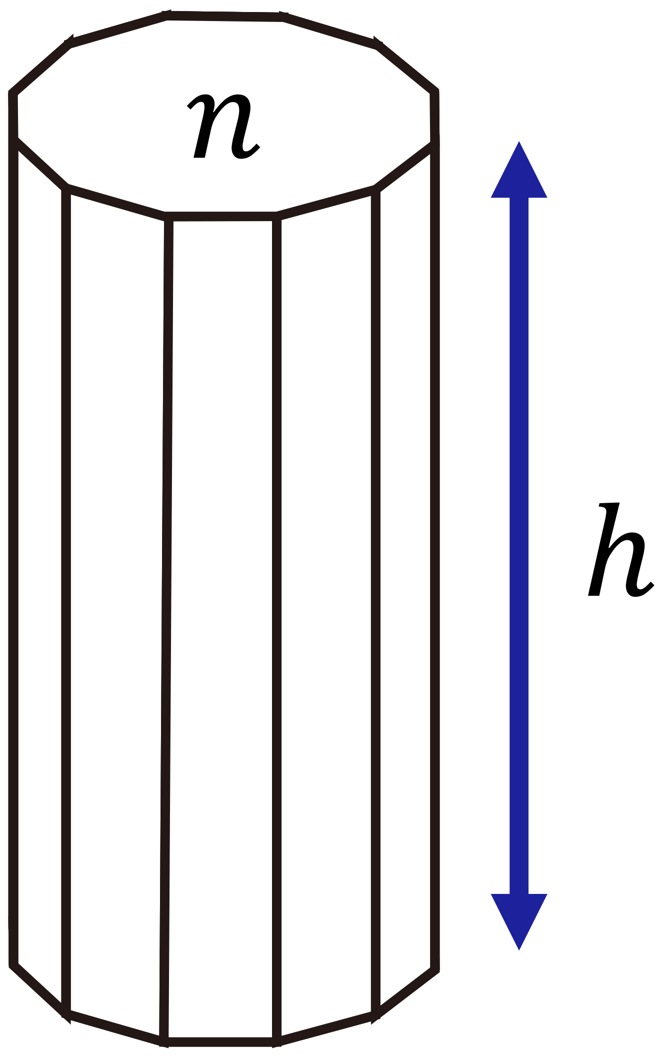
問題設定

入力:

一辺の長さが 1 の正 n 角形を底面，高さ $h \in \mathbb{R}^+$ の正 n 角柱

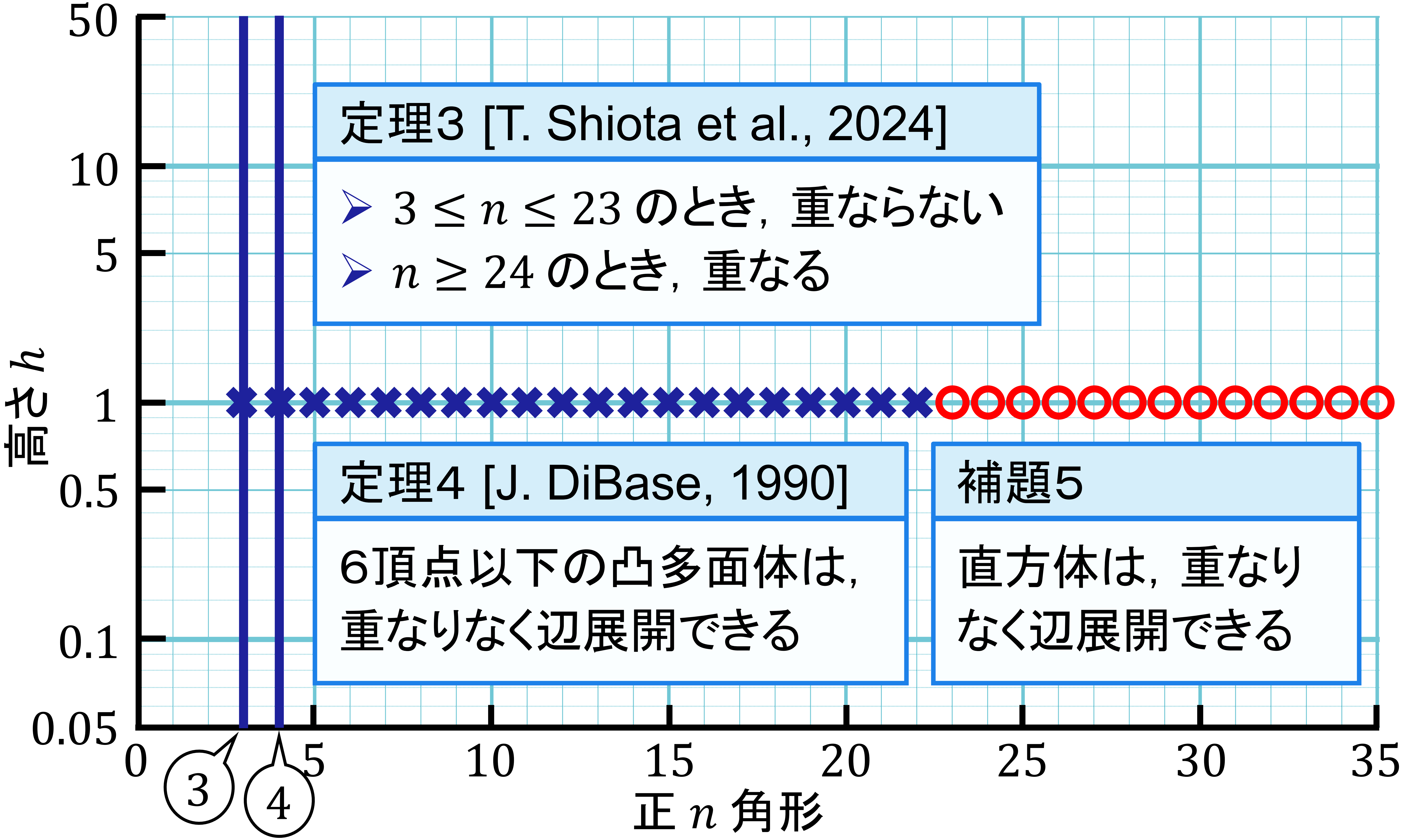
質問:

正 n 角柱の辺展開図がどのように辺展開しても重なりを持たないとき，n および h はいくつか？



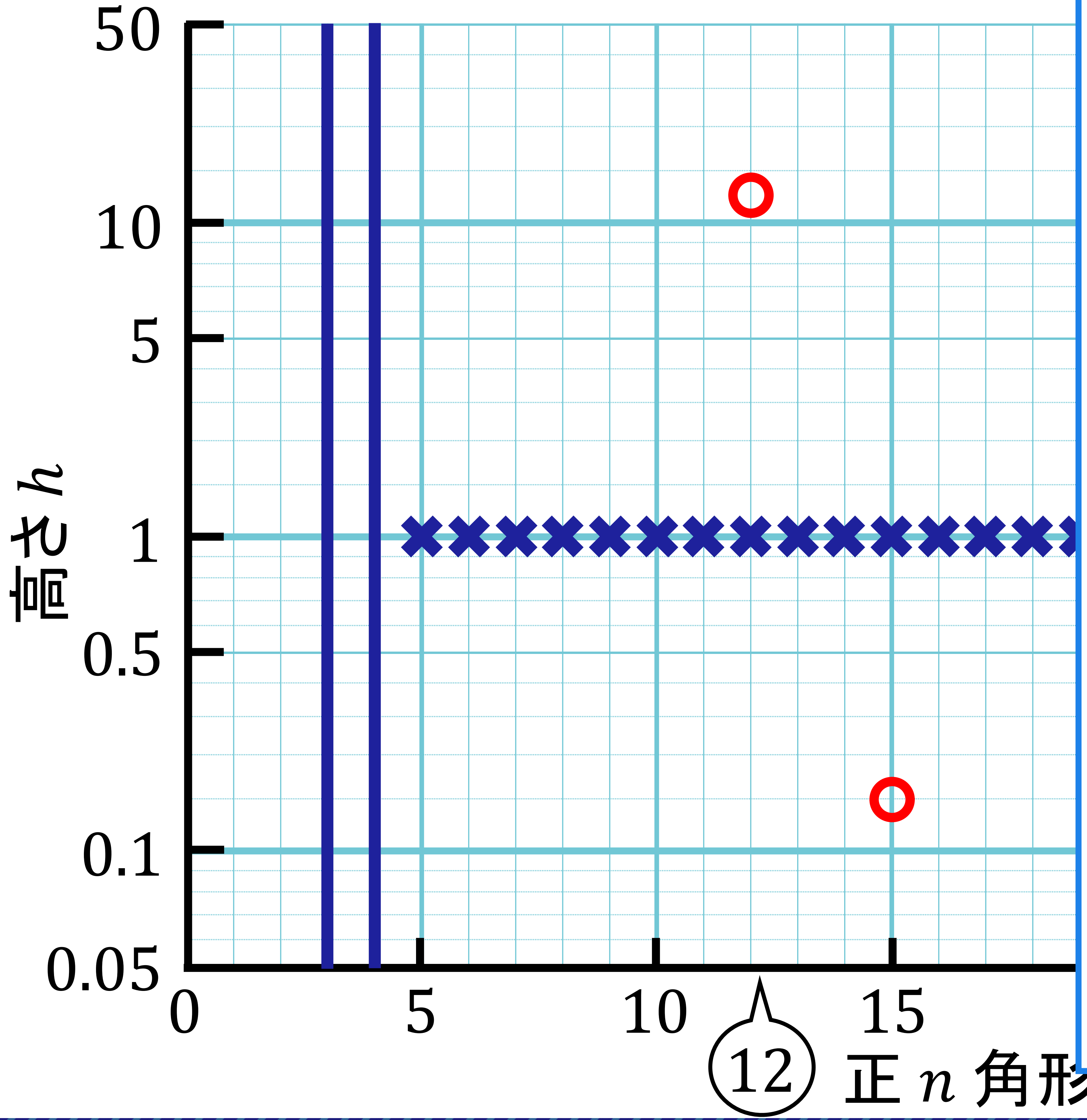
先行研究と主結果

✖ or ―― : いずれも重ならない
○ or ―― : 特定の方法で重なる

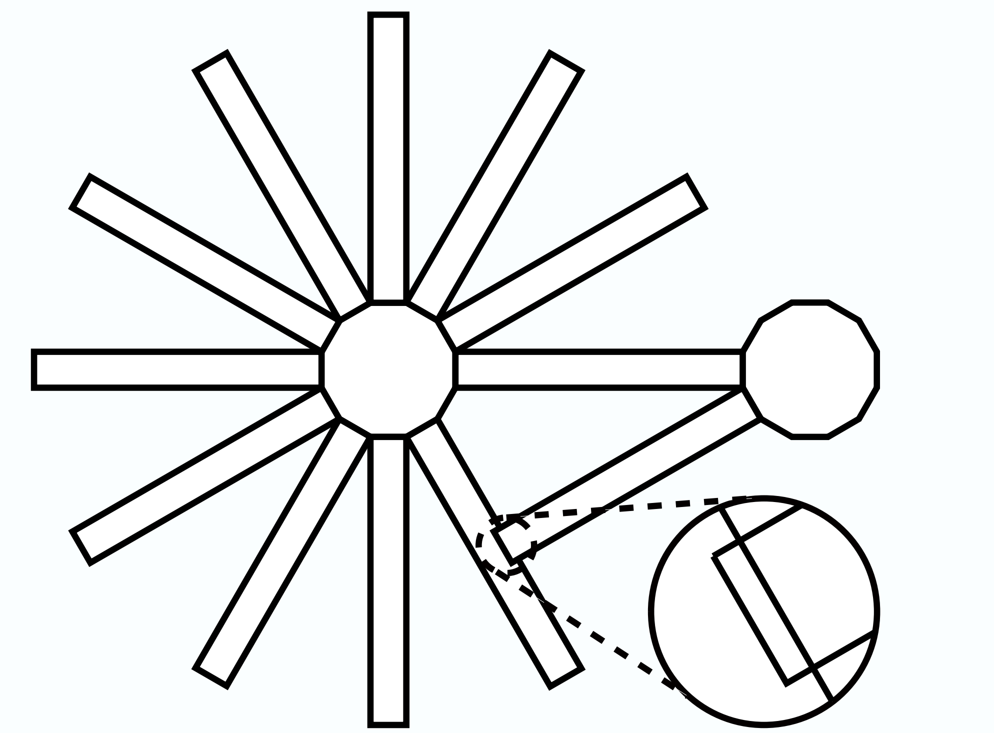


先行研究と主結果

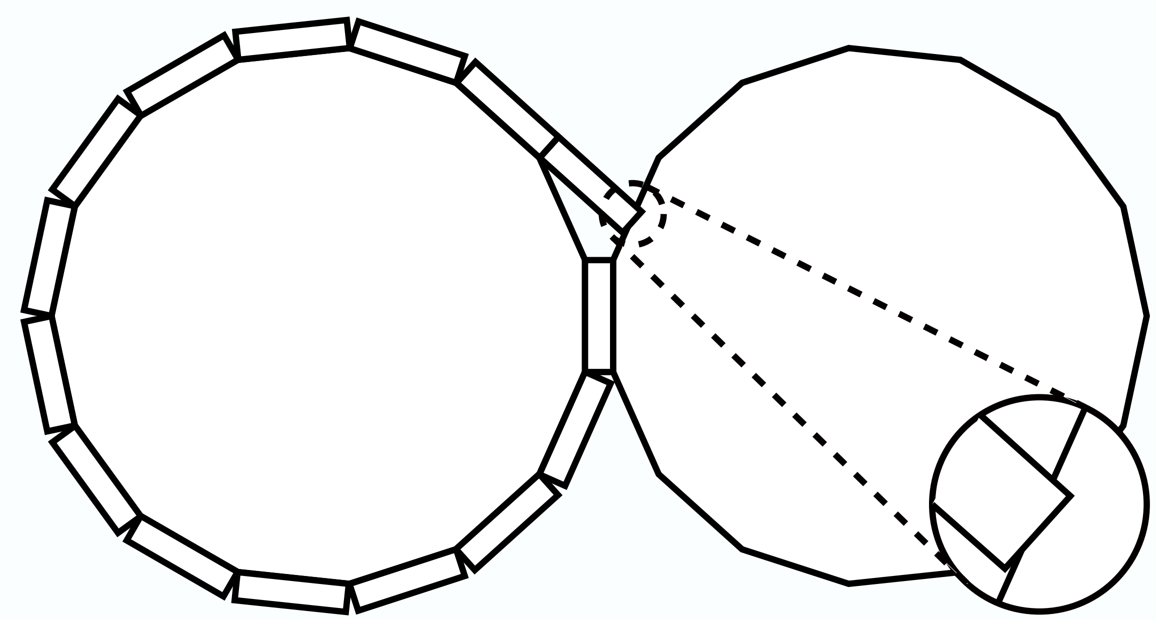
✖ or ——— :いずれも重ならない
○ or —



[Schlickenrieder, 1997]

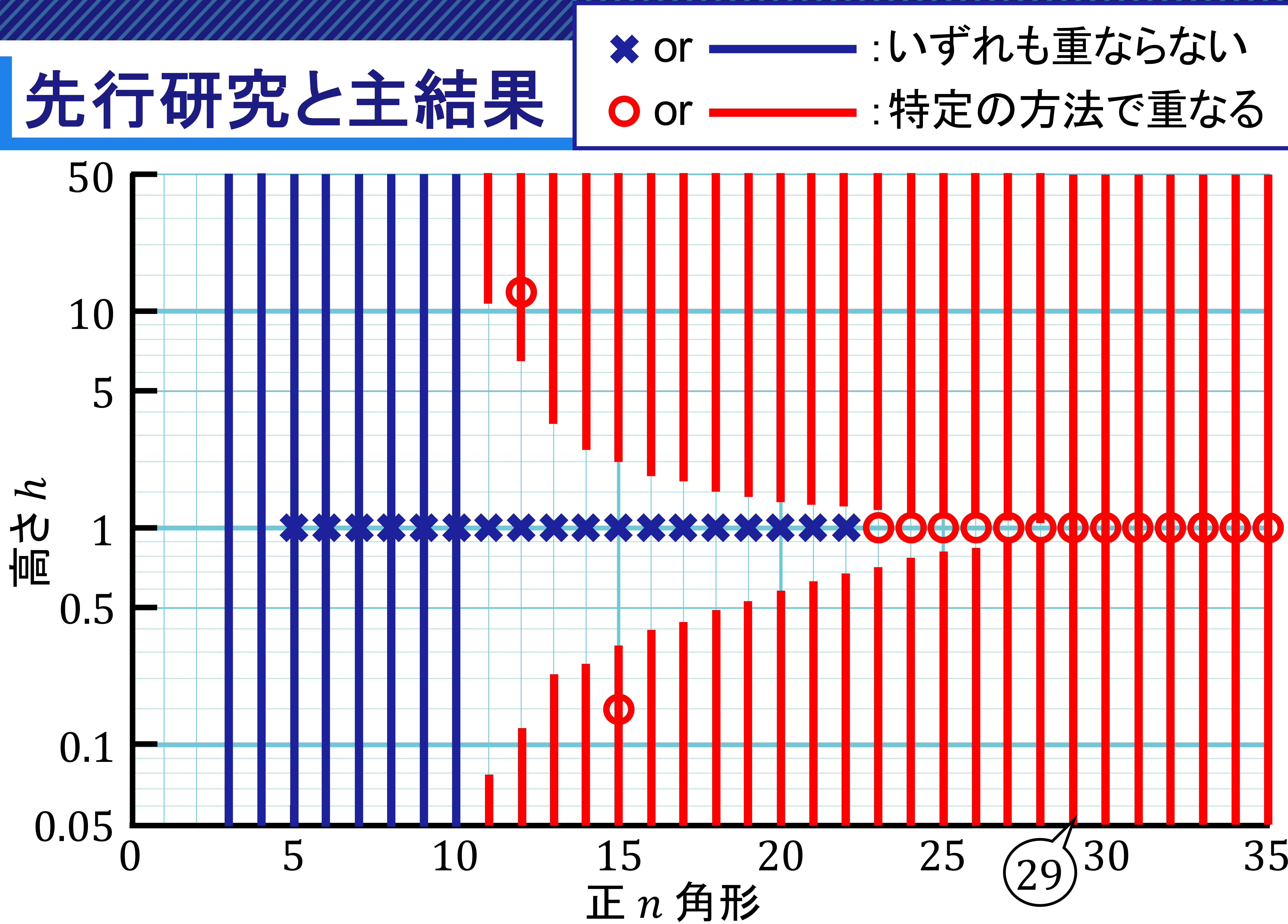


$n = 12$ and $h = 15$



$n = 15$ and $h = 0.2$

先行研究と主結果

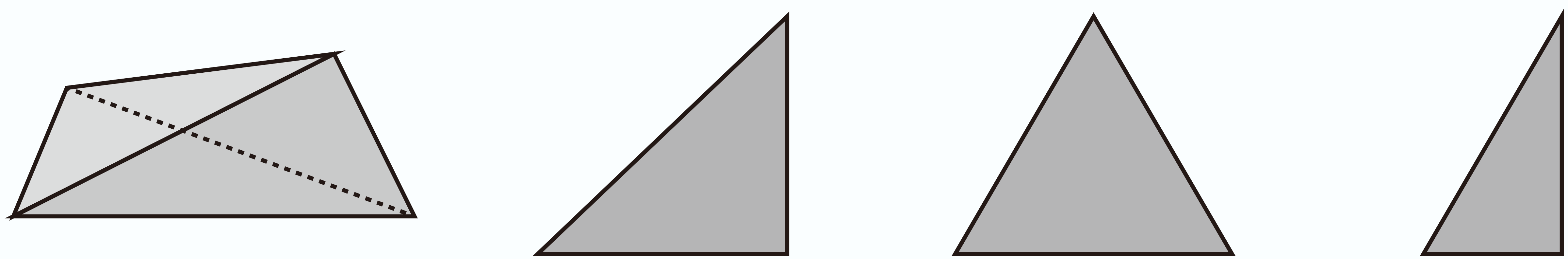


or :いずれも重ならない
or :特定の方法で重なる
50
10
5
1
0.5
0.1
0.05
高さ h
0
5
10
15
20
25
30
35
29
正 n 角形

本研究の背景

定理6 [T. Kamata, T. Shiota and R. Uehara, 2024]

以下の4つの多面体を除き，全ての多面体は重なりを持つように一般展開できる.



等面四面体

直角二等辺三角形二面帯

正三角形二面帯

半正三角形二面帯

どのように一般展開をしても重なりを持たないこれらの多面体を，Overlap-free な多面体という.

本研究の背景

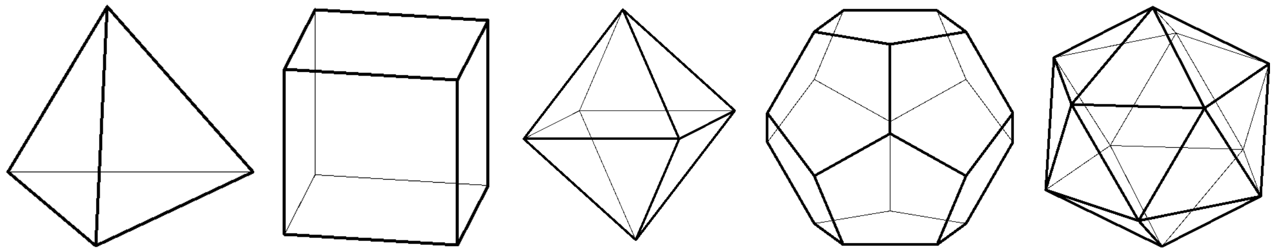
Overlap-free を拡張することで,

“任意の**辺展開図**が重なりを持たない” (= Edge-overlap-free)

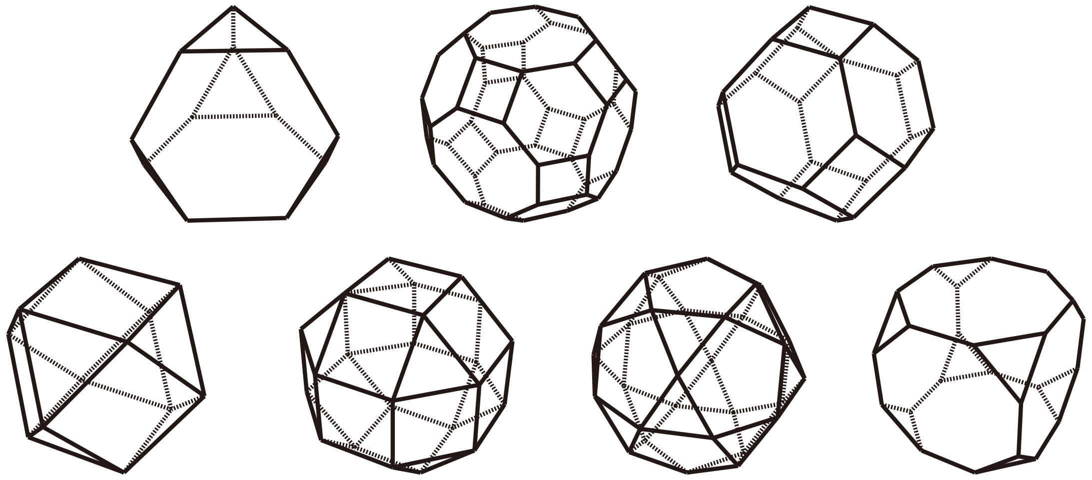
という概念を考えることができる.

➡ どのような多面体が Edge-overlap-free か？

【Edge-overlap-free な多面体の例】



正多面体
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



7種類の半正多面体
[K. Hirose, 2015]
[T. Shiota and T. Saitoh, 2024]

本研究の背景

整面凸多面体(全ての辺の長さが等しい多面体)においては，
どの多面体が Edge-overlap-free であるか完全に分かっている.

本研究の位置付け

アルキメデスの角柱(整面凸多面体の一つ)に対して，パラメータ h を導入し，Edge-overlap-free な多面体の特徴付けをした.

CCCG2023 で塩田が紹介した Open problem

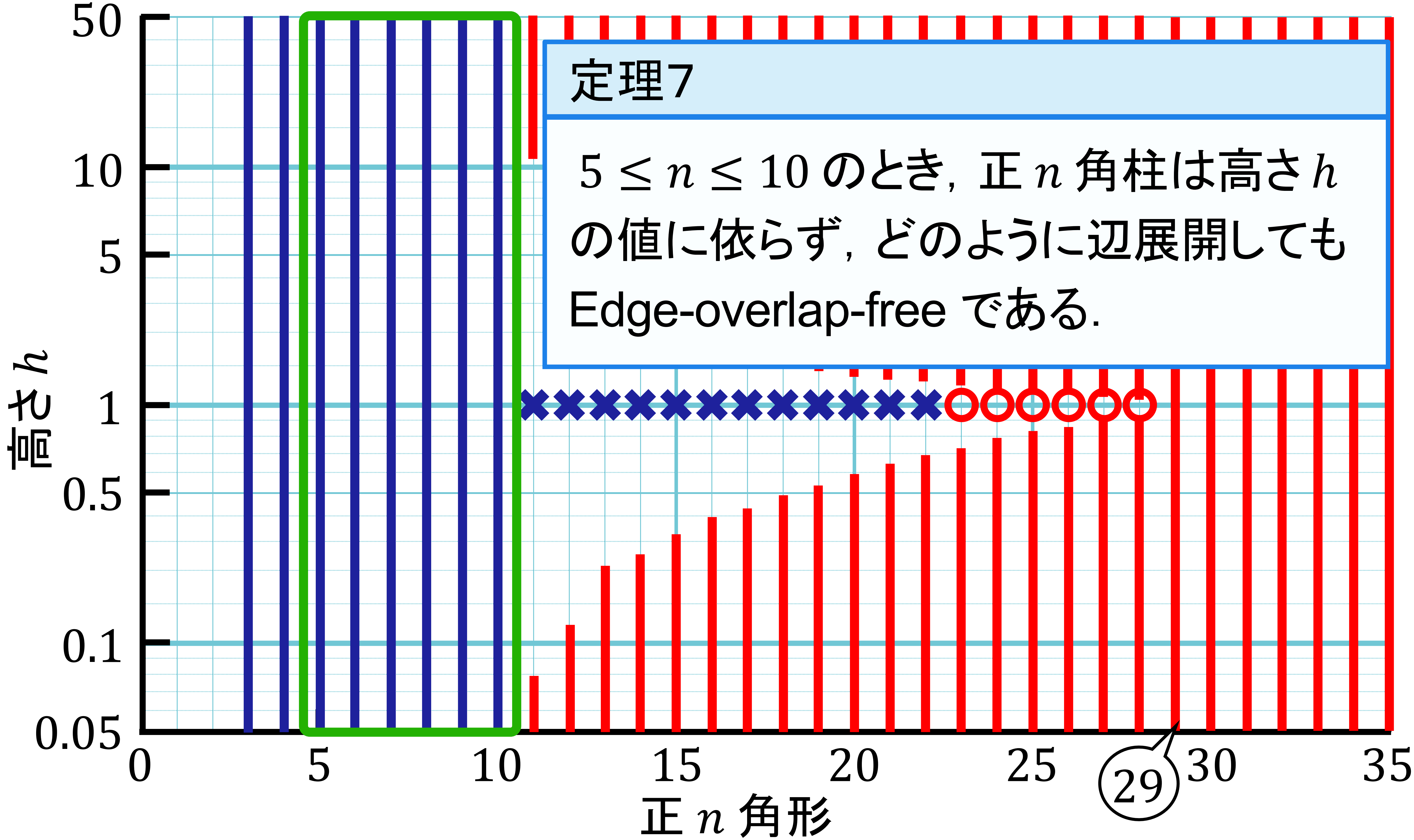
6 Existence of Overlapping Edge Unfolding for an n-Sided Prism with Height h

Takumi Shiota (Kyushu Institute of Technology)

Consider a regular n-sided prism of height h: the bases are regular n-gons of side length 1, and sides are rectangles of size $1 \times h$. We consider the question of the existence of overlapping edge unfoldings. The following results are known (see the Master's thesis of Takumi):

先行研究と主結果

✖ or ——— :いずれも重ならない
○ or ——— :特定の方法で重なる



定理7

$5 \leq n \leq 10$ のとき，正 n 角柱は高さ h の値に依らず，どのように辺展開しても Edge-overlap-free である．

正角柱の辺展開図の重なりの確認

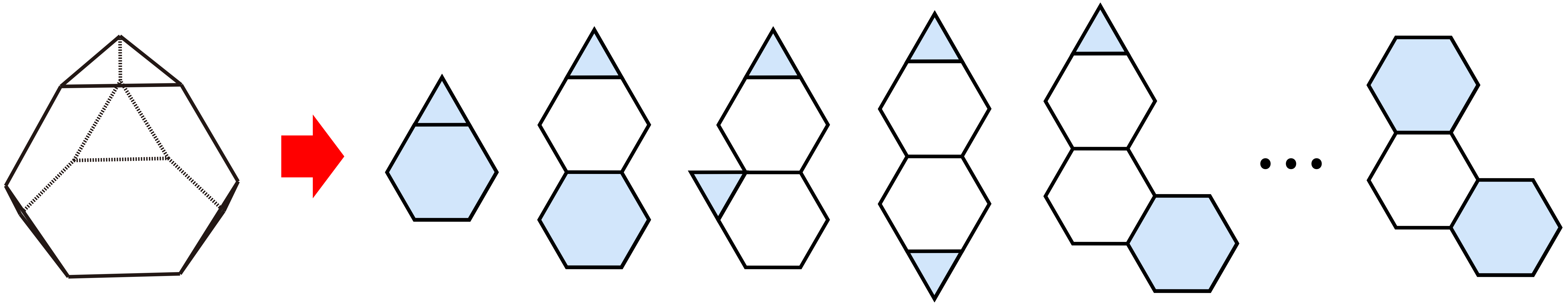
定理8（回転展開）[T. Shiota and T. Saitoh, 2024]

与えられた多面体に対して，重なりを持つ辺展開図の存在は，
次の2ステップで判定できる.

Step 1. 任意の二面間のパスを列挙する

Step 2. 両端に位置する面どうしの重なりを確認する

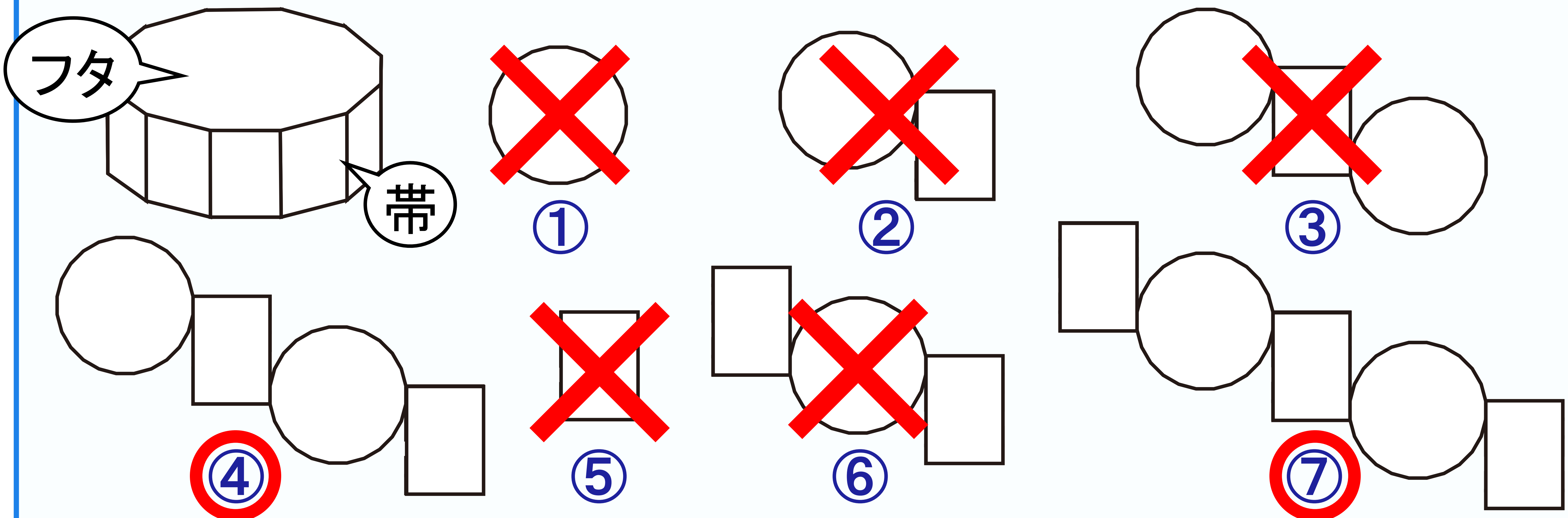
【例】切頂四面体



正角柱の辺展開図の重なりの確認

補題9

正 n 角柱におけるパスは，以下の7種類に分類される．

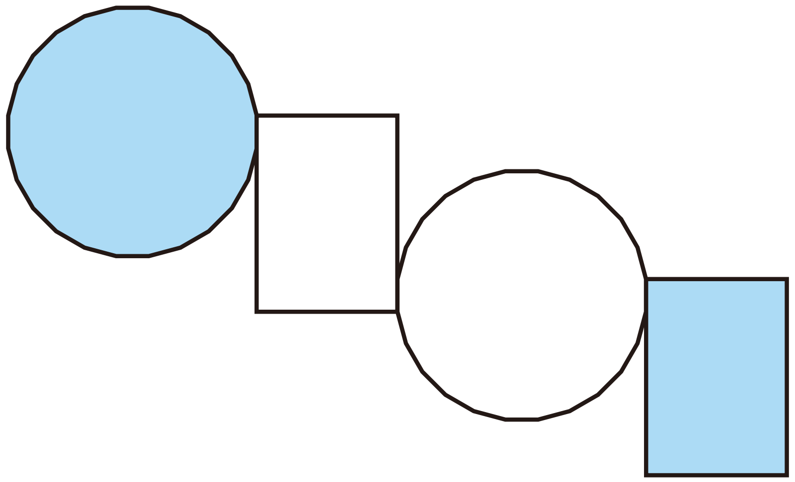


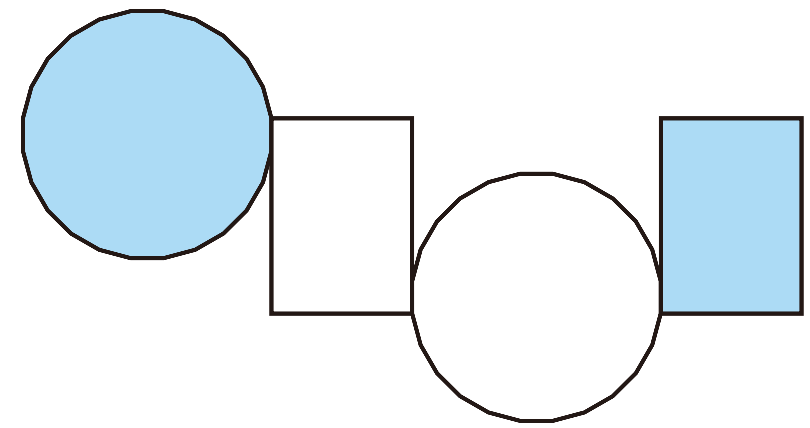
補題10

連続する側面（帯）からなる部分は，一つの長方形と見做してよい．

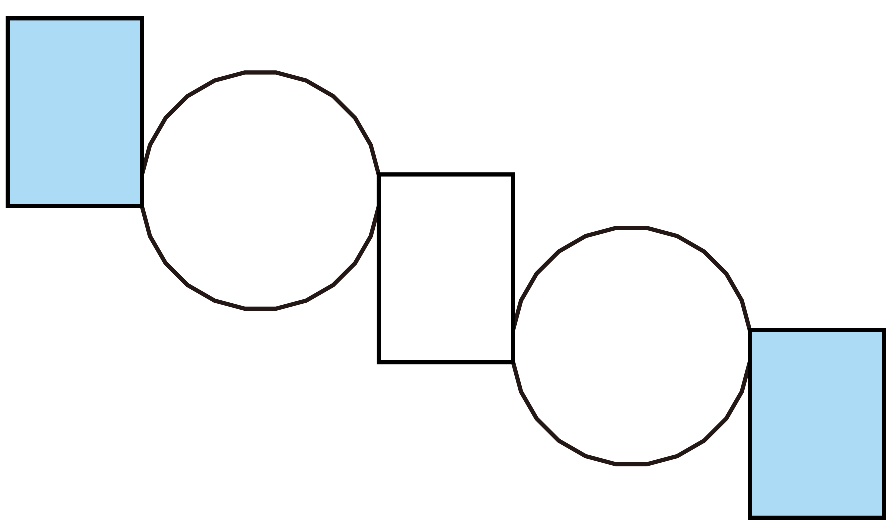
パス④およびパス⑦のバリエーション

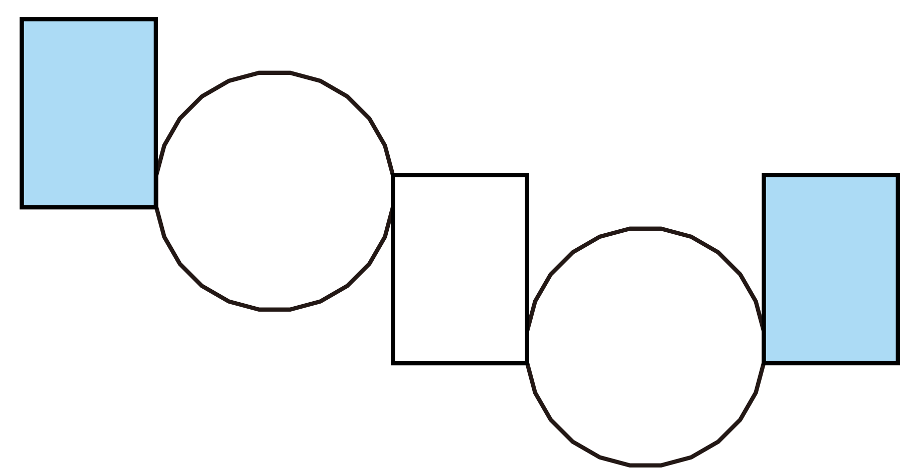
④ のパス：2つのタイプに分類

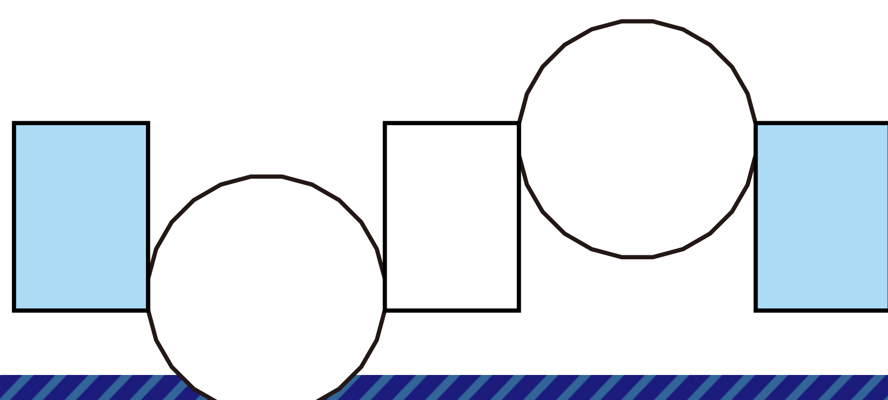


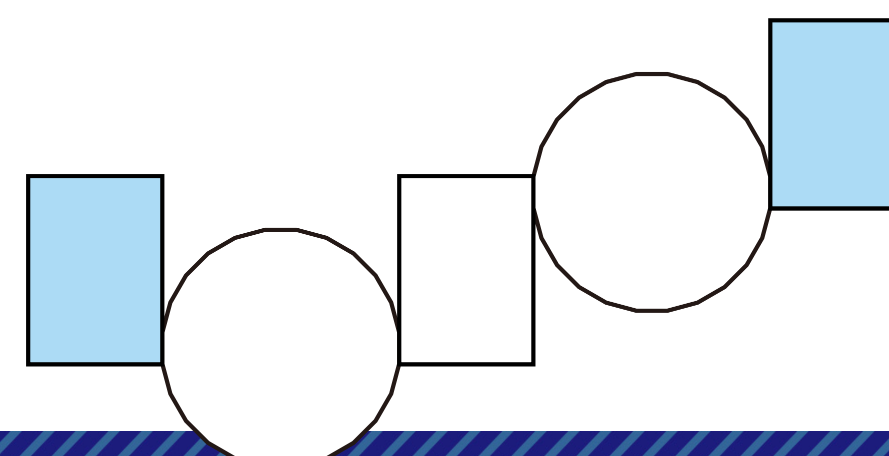


⑦ のパス：4つのタイプに分類



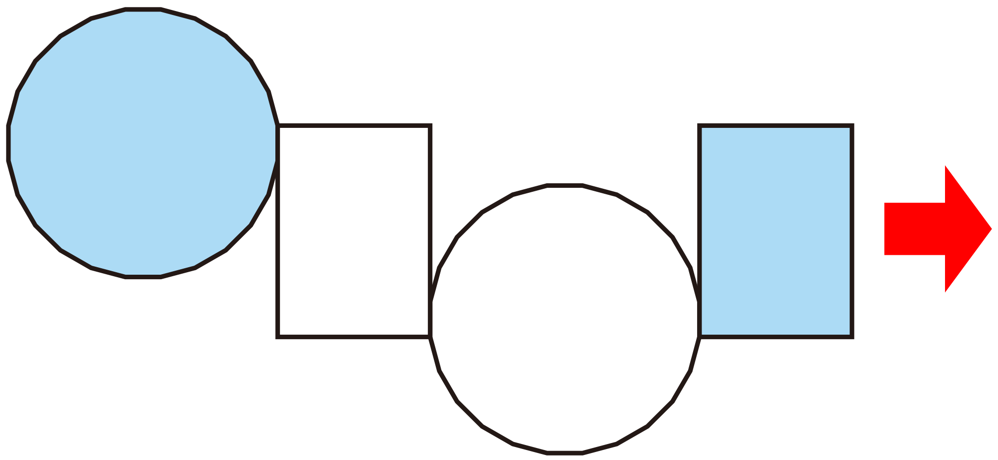


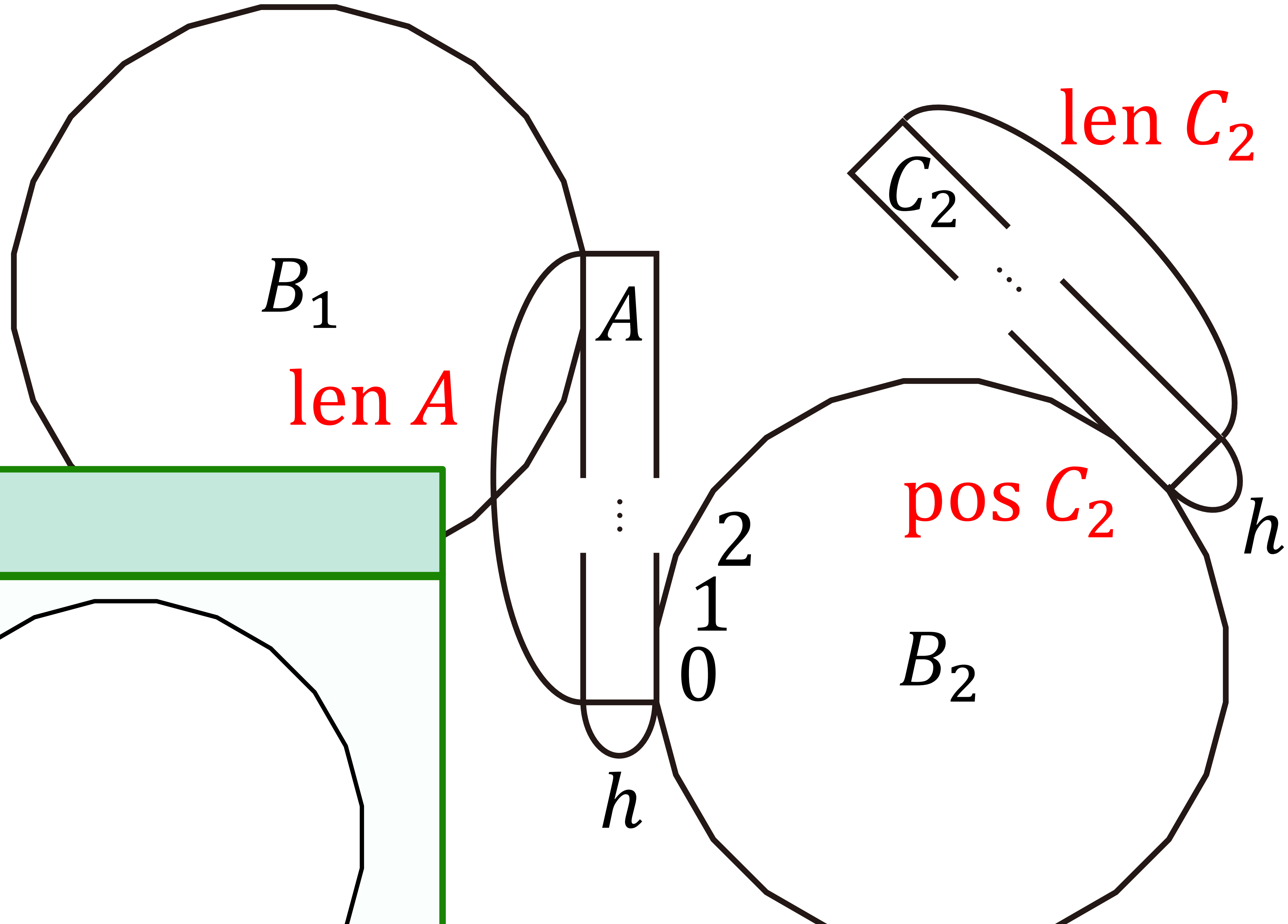




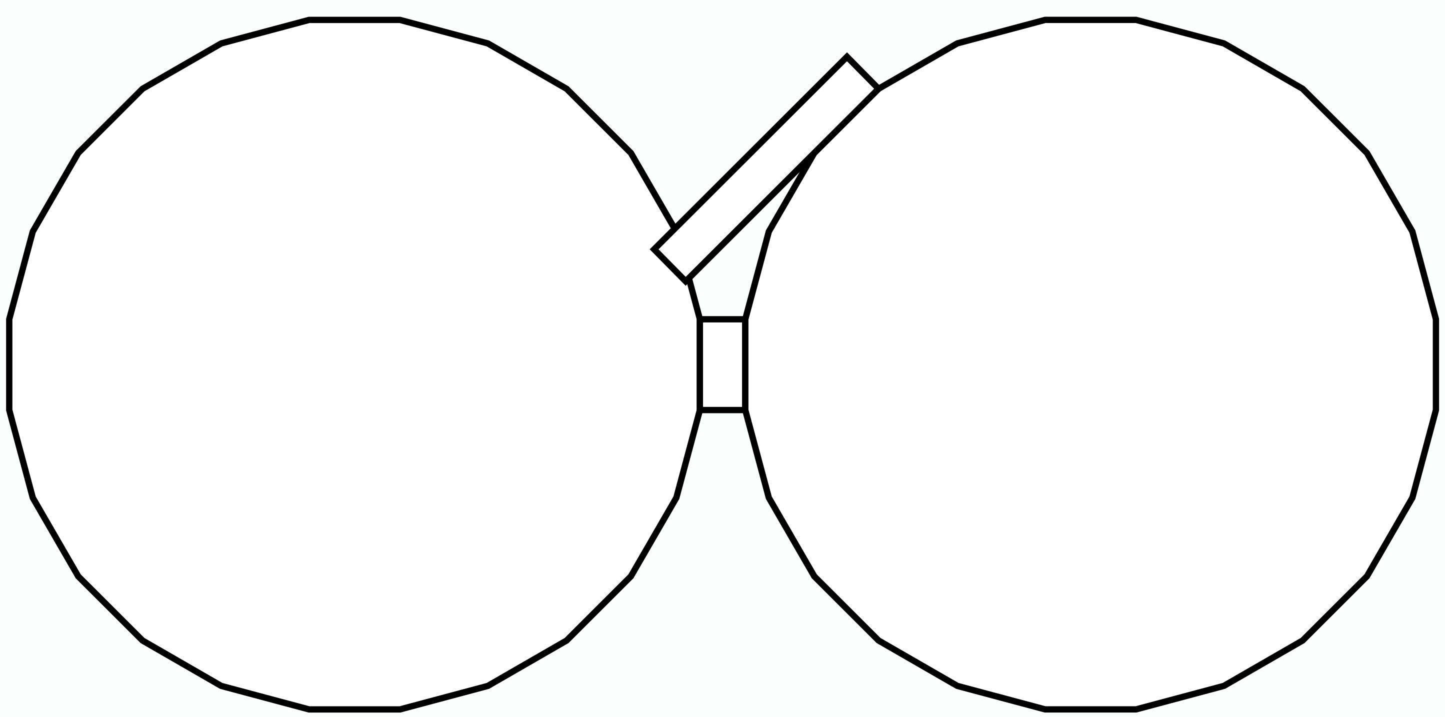
パス④およびパス⑦の列挙

④ パターン2の列挙





正 24 角柱の例



$\mathrm{len}\ A = 1, \mathrm{pos}\ C_2 = 3, \mathrm{len}\ C_2 = 3$

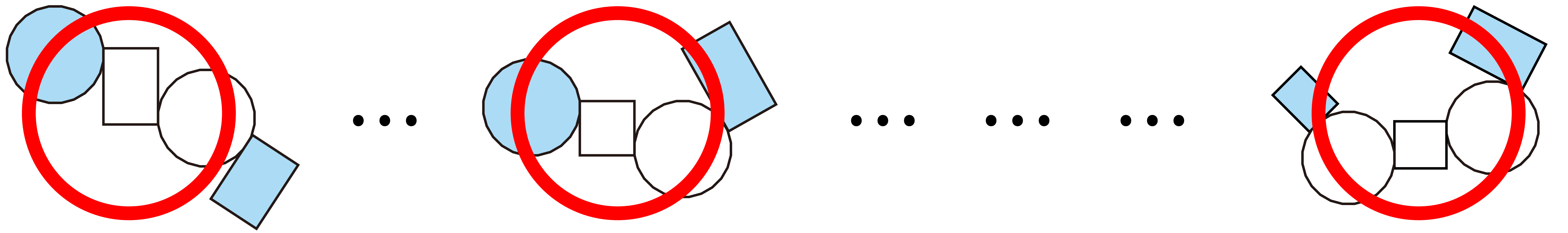
パラメータの値を変える
ことでパスは列挙できる

両端に位置する面の重なりの確認

【正 n 角柱の辺展開図の重なりを確認する方法】

Step 1. 全てのパラメータに対して，対応するパスを列挙する．

Step 2. 各パスが任意の h に対して重なりを持たないことを示す．



問題点

n の値が大きくなると，列挙されるパスの数が爆発的に多くなる．
ゆえに，パスを列挙したあと，各パスが任意の h に対して重なりを持たないことを示すことは現実的ではない．

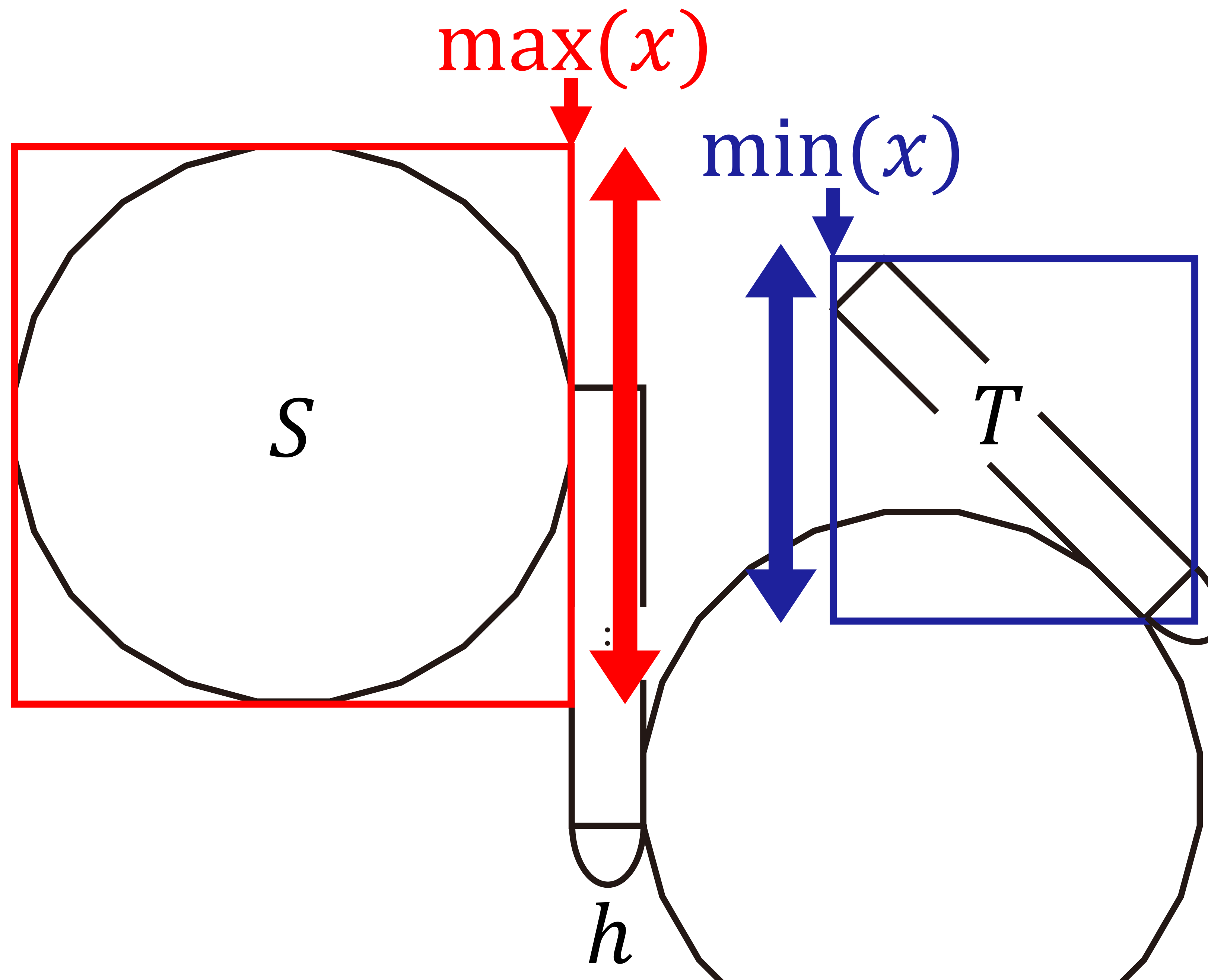
両端に位置する面の重なりの確認

列挙するパスの工夫

Step 1.
両端の面の座標の
最大値，最小値を求める

Step 2.
y 座標の範囲を比べて
重複があれば **Step 3** へ

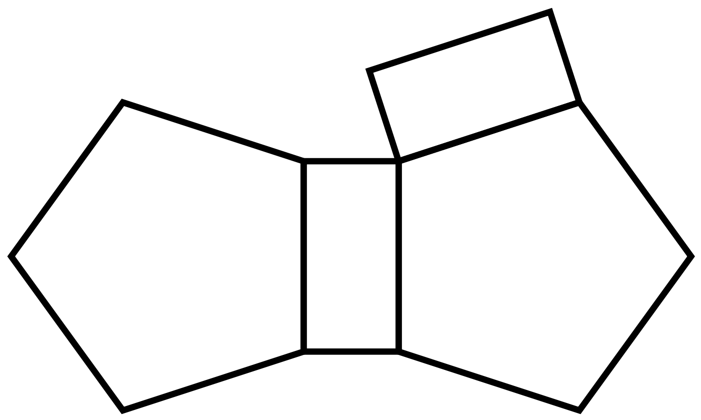
Step 3.
面 S の x 座標の最大値
$<$ 面 T の x 座標の最小値
$\Rightarrow$ 重なる可能性がある



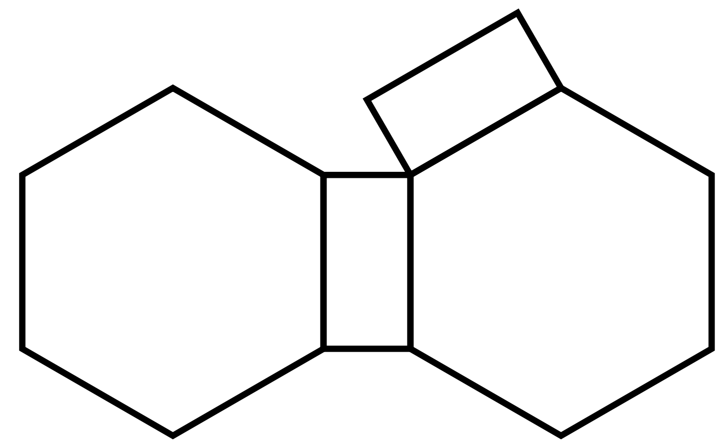
計算機実験
SymPy (Python library) で計算

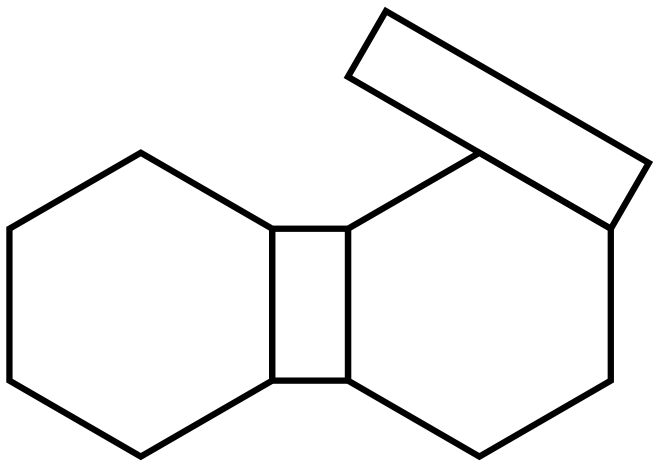
$5 \leq n \leq 10$ の重なる可能性があるパス

$n = 5$

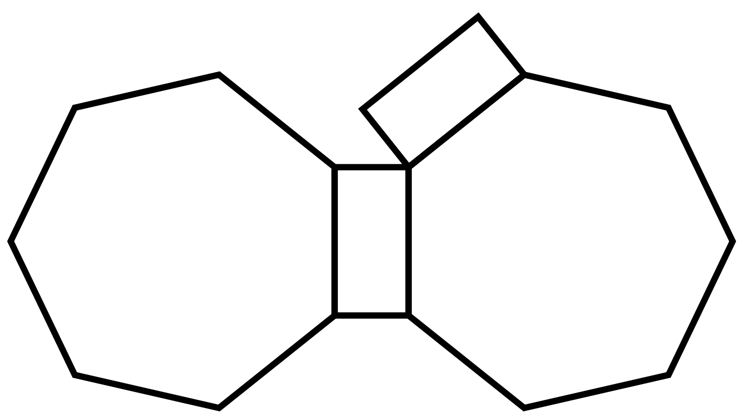


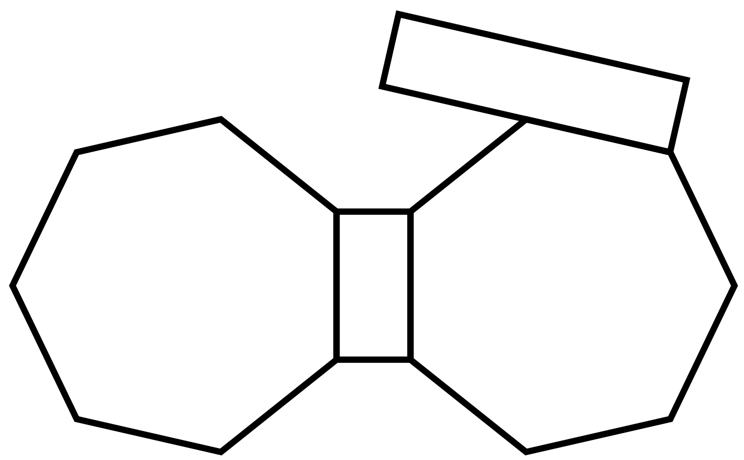
$n = 6$



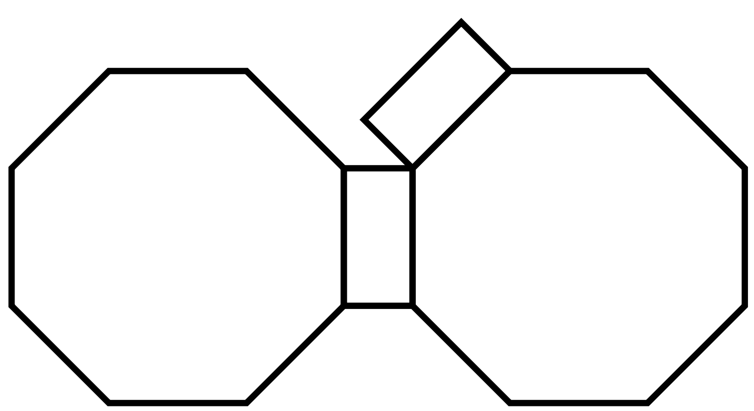


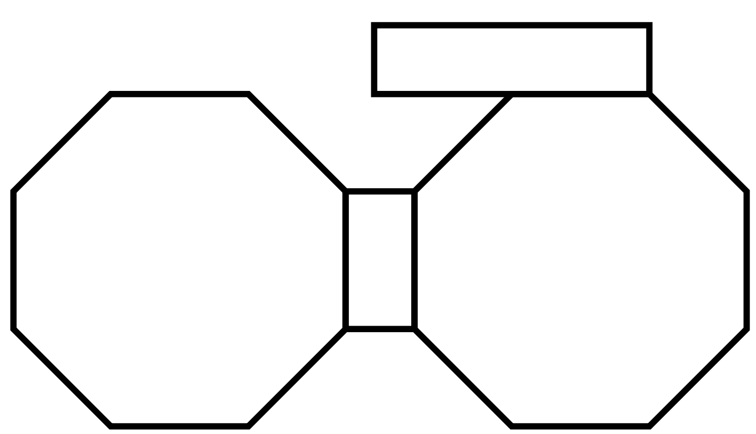
$n = 7$





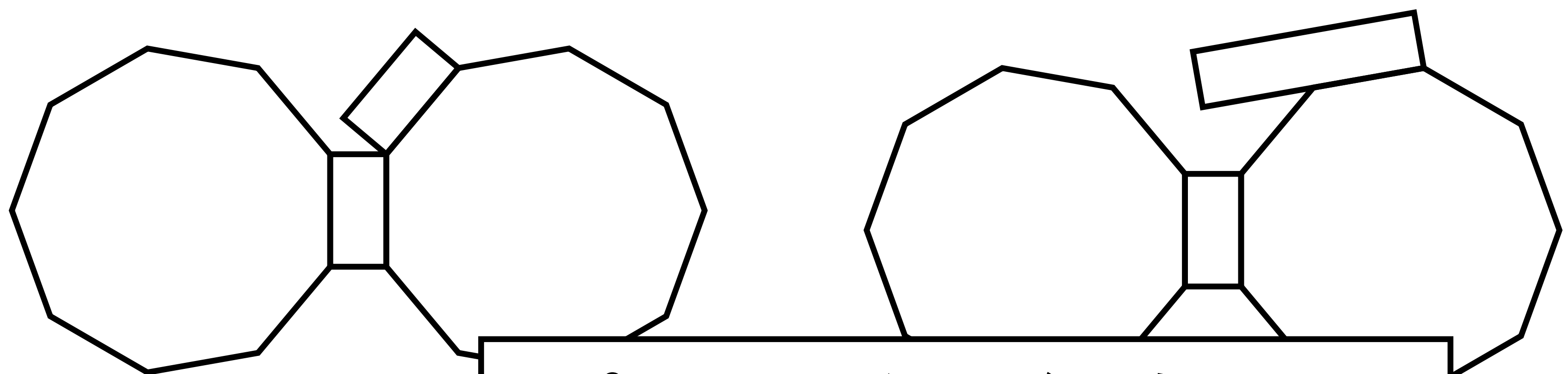
$n = 8$





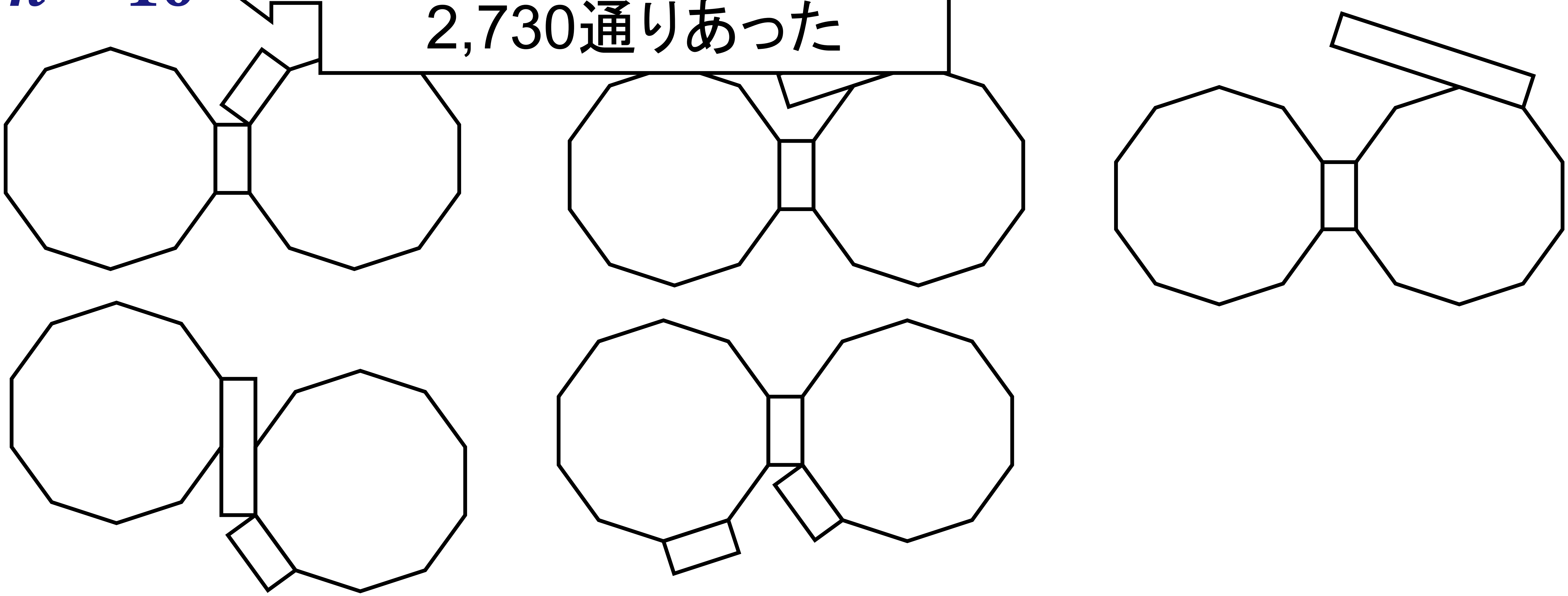
$5 \leq n \leq 10$ の重なる可能性があるパス

$n = 9$



パラメータの組合せは
2,730通りあった

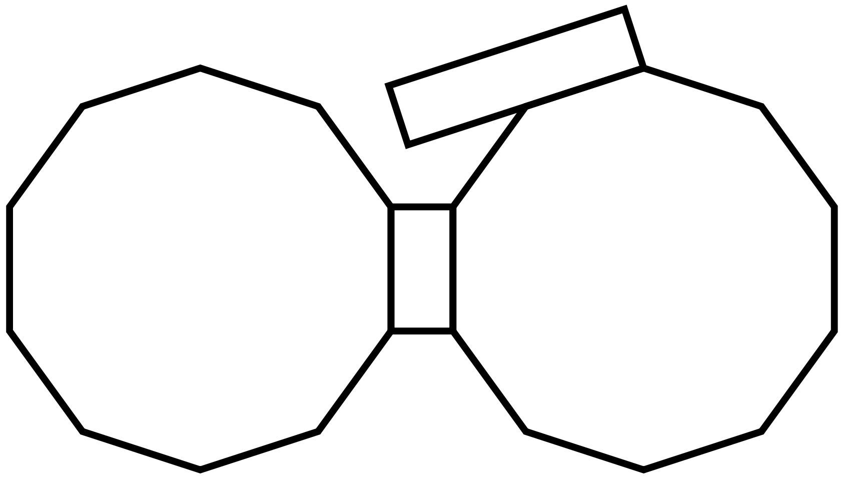
$n = 10$



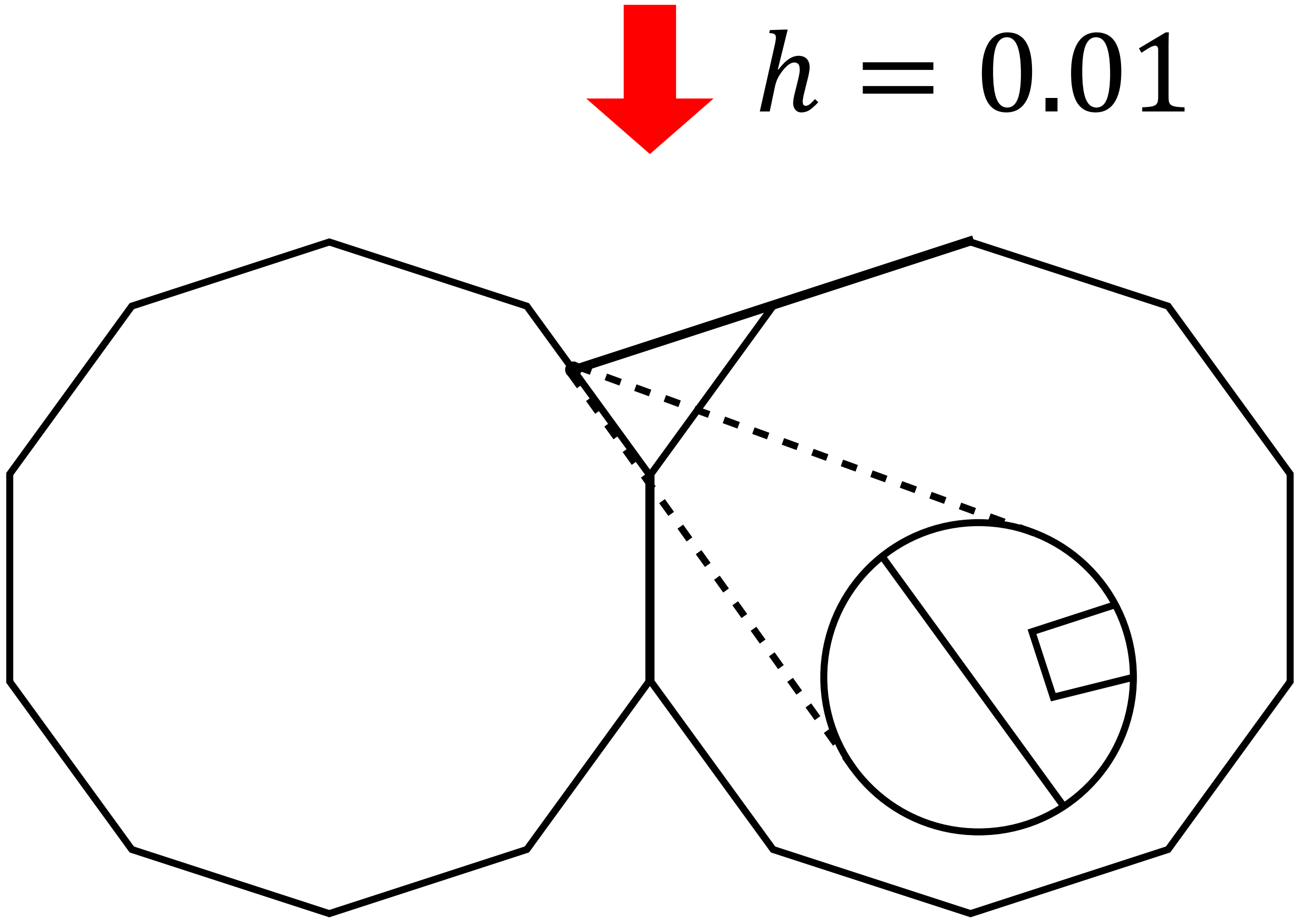
列挙した後は…

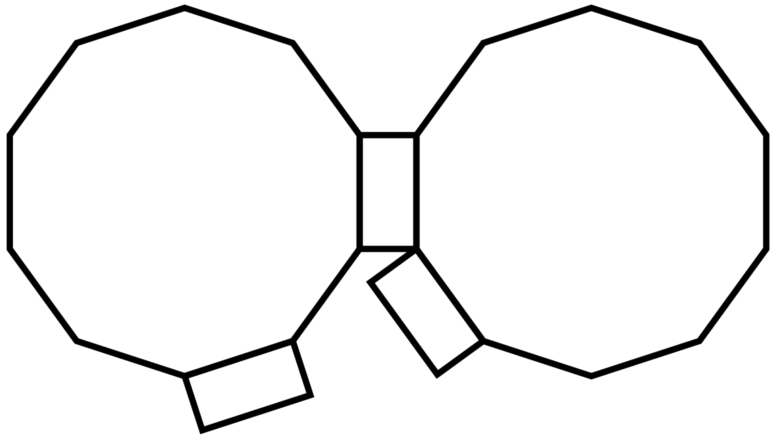
両端に位置する面が
重ならないことを解析
計算で証明

$n = 10$ における重なりそうなパス

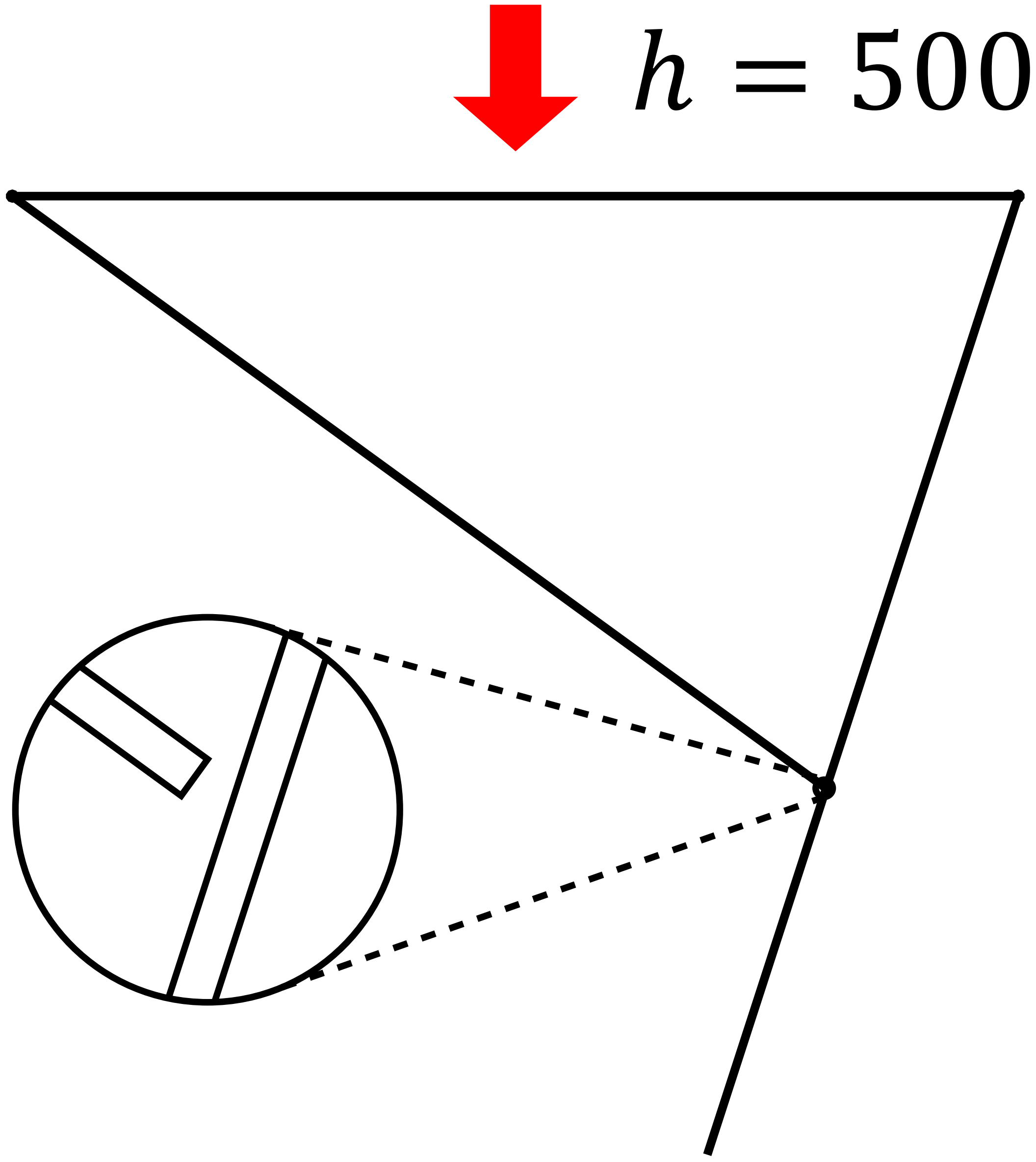


$h = 0.01$





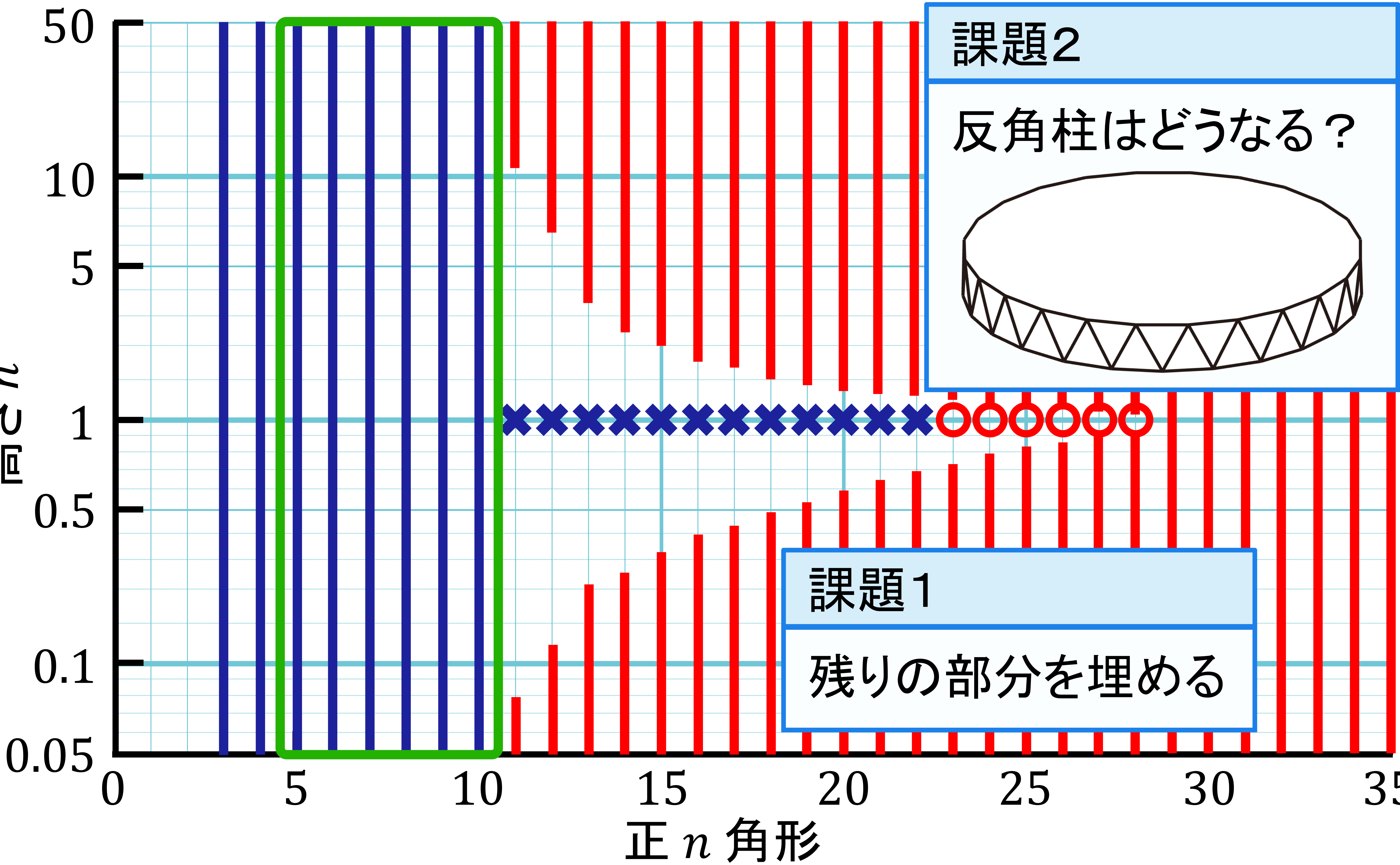
$h = 500$



まとめと課題

✖ or ――― :いずれも重ならない

○ or ――― :特定の方法で重なる



課題2

反角柱はどうなる？

課題1

残りの部分を埋める

補足スライド

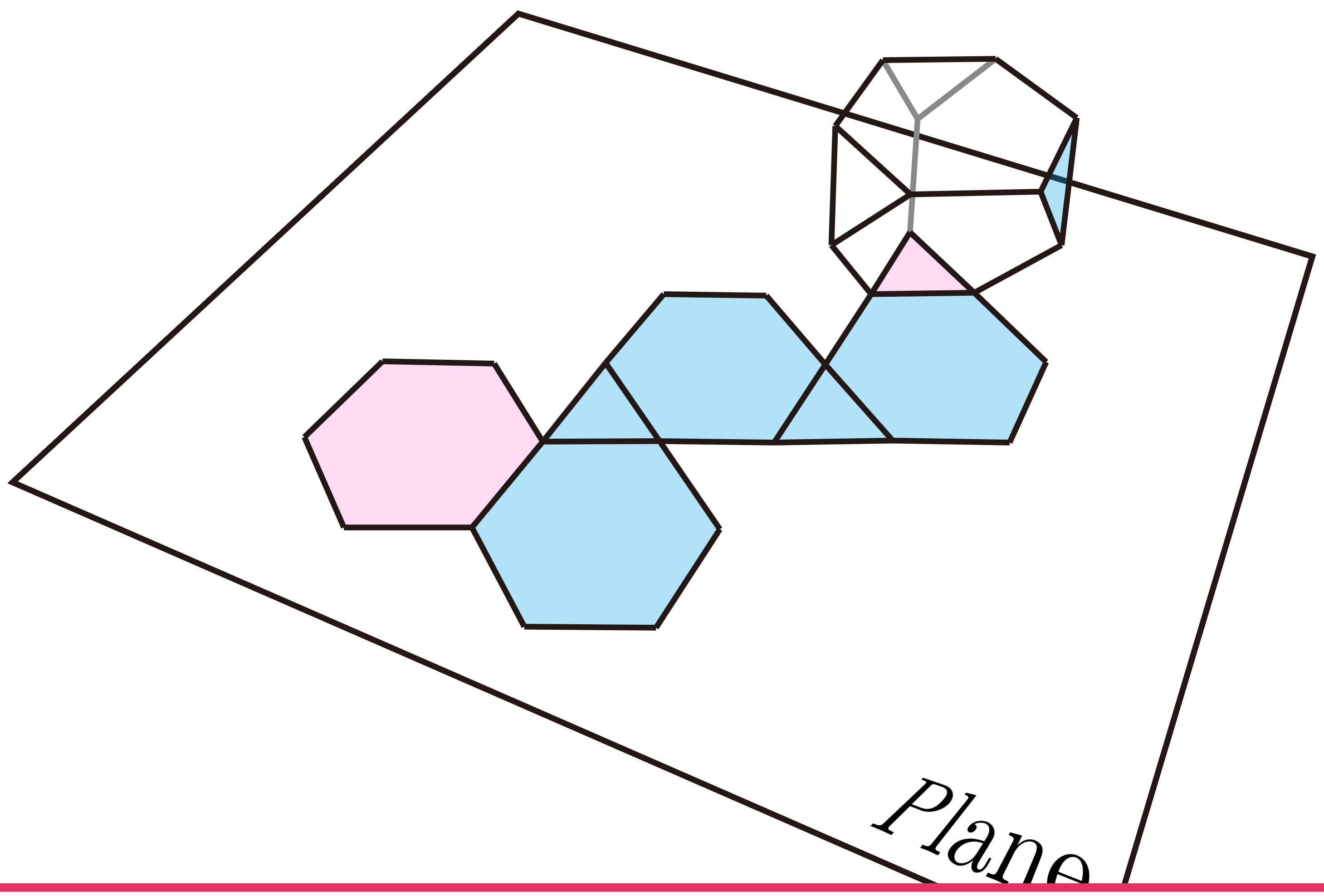
整面凸多面体における重なりの存在

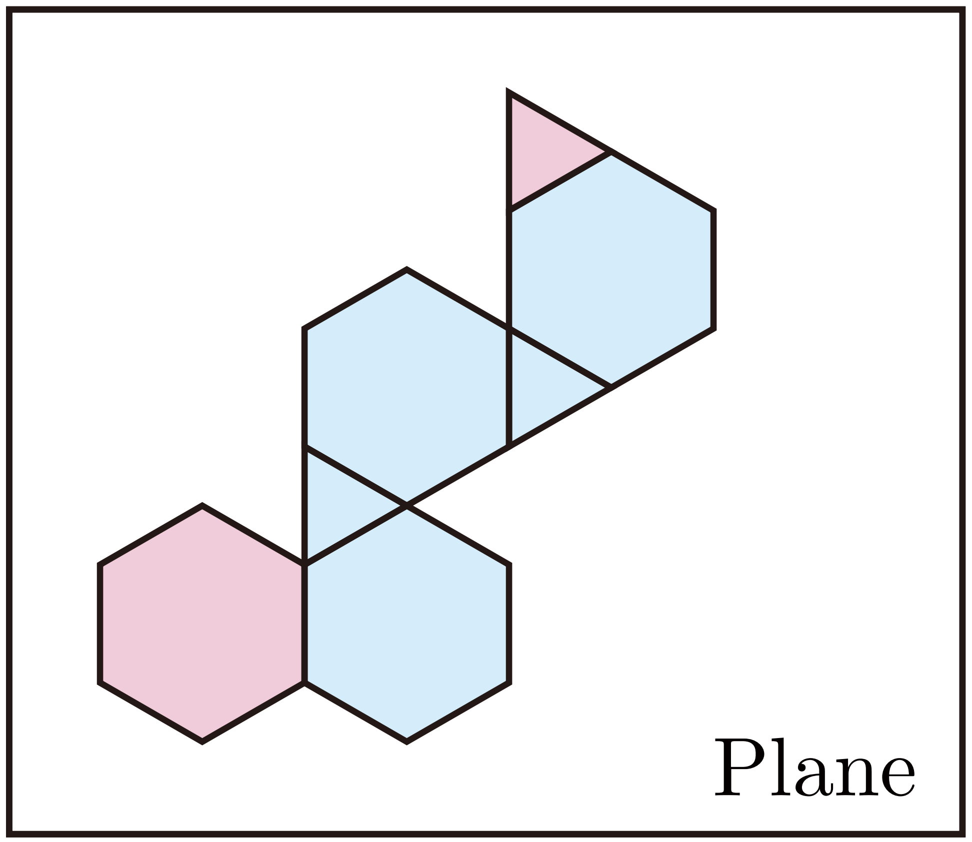
整面凸多面体	重なりを持つ辺展開図は存在するか
正多面体 (全 5 種類)	No [T. Horiyama & W. Shoji, 2011]
半正多面体 (全 13 種類)	Yes (6 種類) No (7 種類) [T. Horiyama & W. Shoji, 2011] [Hirose, 2015] [T. Shiota & T. Saitoh, 2024]
アルキメデスの n 角柱 ($n \geq 3$)	No $(3 \leq n \leq 23)$ Yes $(n \geq 24)$ [T. Shiota & T. Saitoh, 2024]
アルキメデスの m 反角柱 ($n \geq 3$)	No $(3 \leq n \leq 11)$ Yes $(n \geq 12)$ [T. Shiota & T. Saitoh, 2024]
ジョンソンの立体 (全 92 種類)	No (48 種類) Yes (44 種類) [T. Shiota & T. Saitoh, 2024]

回転展開の詳細

回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2024]

① 多面体を転がすことで，任意の二面間のパスを列挙する
② パスの両端点に位置する面どうしの重なりを確認する





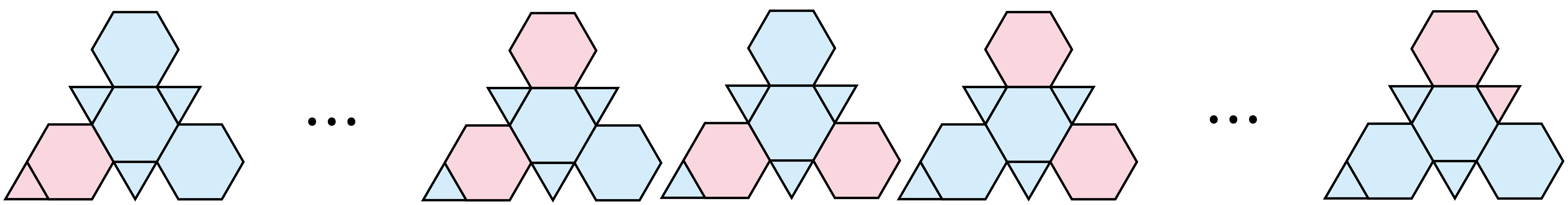
なぜパスの両端に位置する二面だけを確認すれば良いのか？

回転展開の詳細

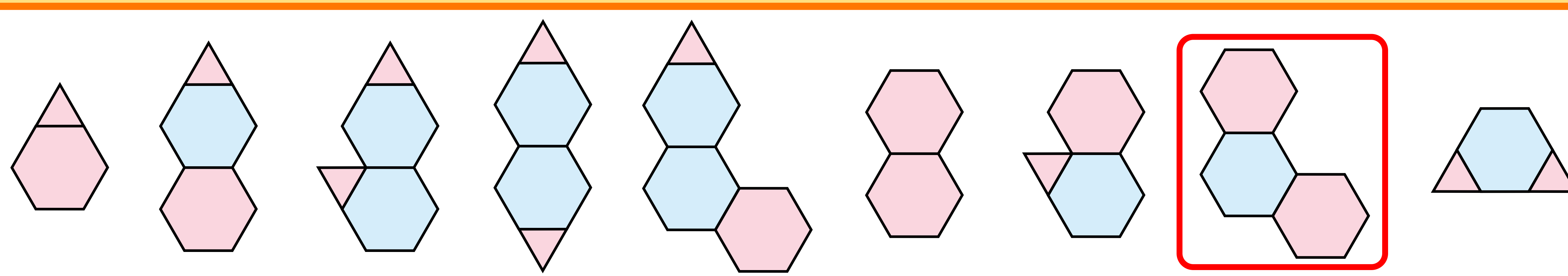
補題11

辺展開図における任意の二面を結ぶパスは，回転展開で列挙されるいずれかのパスに該当する.

[T. Horiyama & W. Shoji, 2011] の方法（$_8C_2 = 28$ 通り）



回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2024]（9 通り）

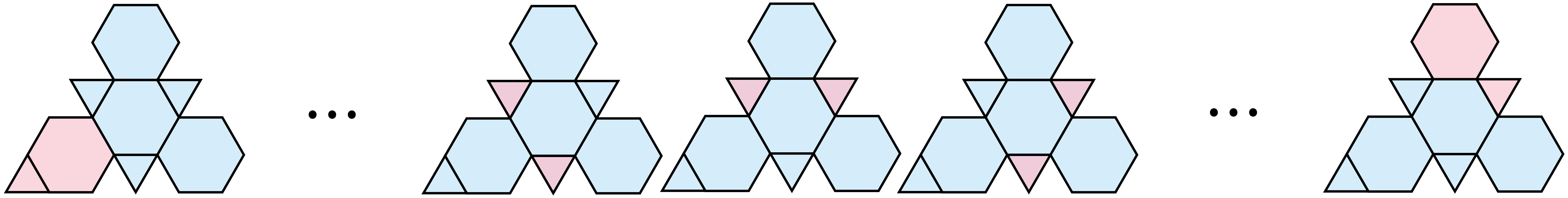


回転展開の詳細

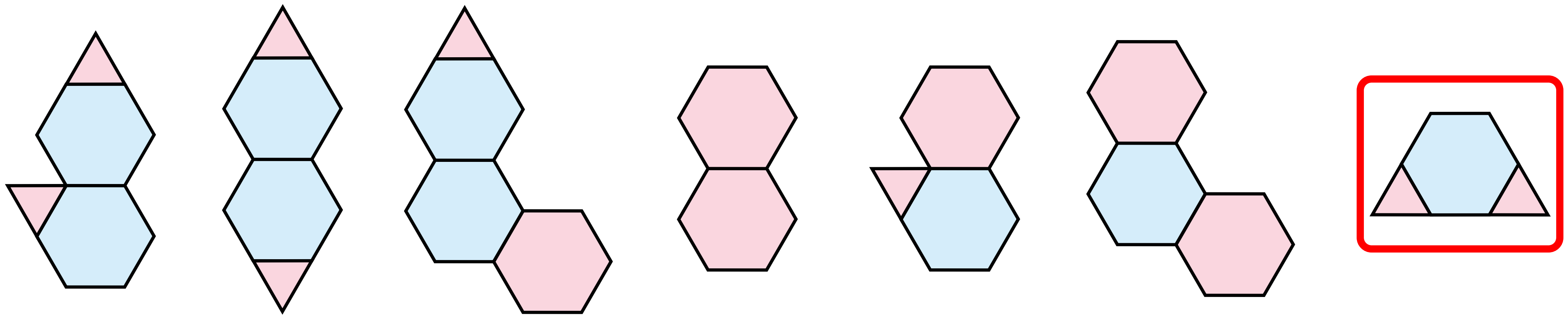
補題11

辺展開図における任意の二面を結ぶパスは，回転展開で列挙されるいずれかのパスに該当する．

[T. Horiyama & W. Shoji, 2011] の方法（${}_8C_2 = 28$ 通り）



回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2024]（9 通り）

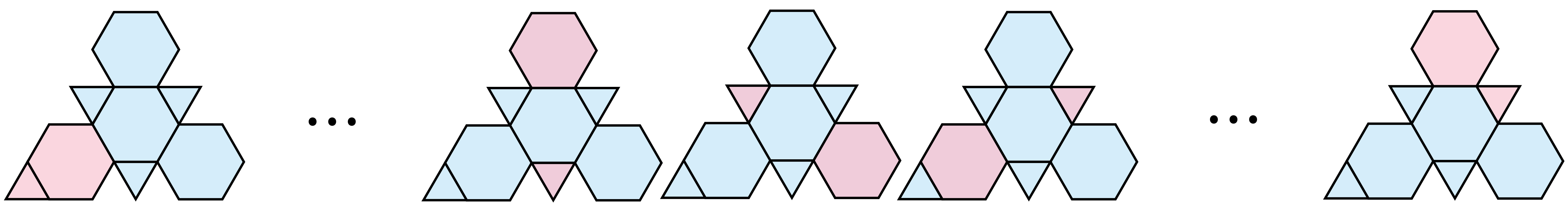


回転展開の詳細

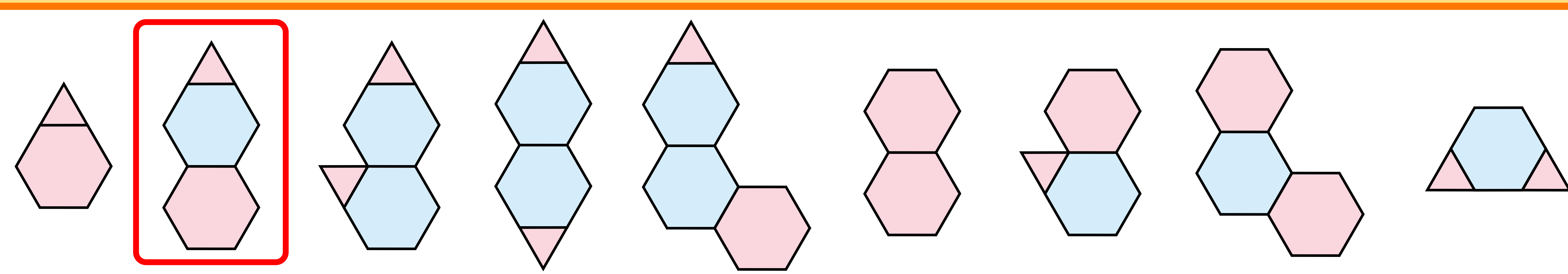
補題11

辺展開図における任意の二面を結ぶパスは，回転展開で列挙されるいずれかのパスに該当する．

[T. Horiyama & W. Shoji, 2011] の方法（${}_8C_2 = 28$ 通り）



回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2024]（9 通り）

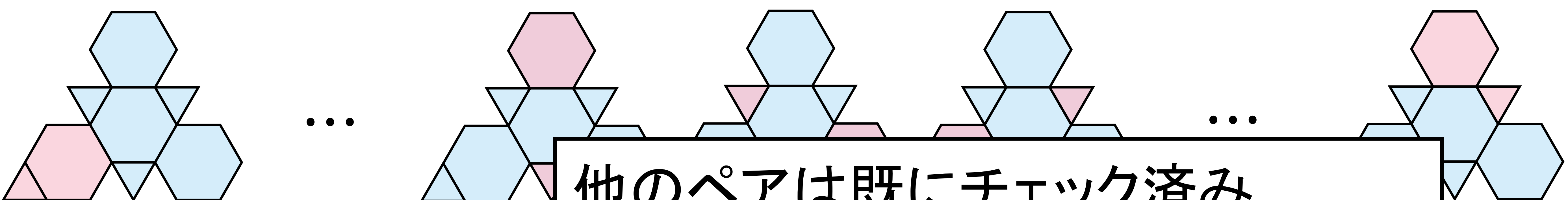


回転展開の詳細

補題11

辺展開図における任意の二面を結ぶパスは，回転展開で列挙されるいずれかのパスに該当する.

[T. Horiyama & W. Shoji, 2011] の方法（${}_8C_2 = 28$ 通り）



他のペアは既にチェック済み

➡ 両端の面のみ確認すればよい

回転展開 [T. Shiota a